Н. Е. КОЧИН, И. А. КИБЕЛЬ, Н. В. РОЗЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

ЧАСТЬ II

Н. Е. КОЧИН, И. А. КИБЕЛЬ, Н. В. РОЗЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
И. А. КИБЕЛЯ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЁРТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебника для университетов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

532
K 75

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвёртому изданию 7

Глава первая. **Теоретические основы газовой динамики (*И. А. Кибель*)** 9

А. Уравнения газовой динамики

§ 1. Введение 9
§ 2. Уравнения гидродинамики в форме интегралов. Сильные разрывы 11
§ 3. Уравнения газовой динамики в дифференциальной форме . . . 18
§ 4. Слабые разрывы. Характеристики уравнений газовой динамики 21
§ 5. Распространение сильных разрывов. Теорема Цемплена . . . 29

Б. Установившиеся движения. Плоская задача

§ 6. Плоская задача. Функции ϑ и i_0 32
§ 7. Поверхности разрыва в плоской задаче 35
§ 8. Критическая скорость. Трубки тока в сжимаемой жидкости . . . 40
§ 9. Плоские вихревые движения со сверхзвуковыми скоростями. Характеристики. Угол Маха 44
§ 10. Плоские безвихревые движения при $v > a_*$ 50
§ 11. Использование характеристик для решения плоской безвихревой задачи при $v > a_*$ 56
§ 12. Движение газа вне выпуклой поверхности. Обтекание угла, большего чем π. Выход из отверстия. Движение внутри трубы. Сопло Лаваля 69
§ 13. Движение газа около вогнутой поверхности. Образование сильного разрыва. Движение внутри угла, меньшего чем π. Обтекание профиля с острой передней частью 76
§ 14. Крыло в плоскопараллельном сверхзвуковом потоке. Приближённые формулы Аккерета, Буземана, Донова. Гиперзвуковые движения 87
§ 15. Функция γ. Примеры. Точные решения 106
§ 16. Дозвуковые скорости. Теория Чаплыгина. Примеры 114
§ 17. Дозвуковые скорости. Метод Христиановича 130
§ 18. Приближённый метод Христиановича для решения плоских безвихревых задач. Сверхзвуковые скорости 146
§ 19. Переход через скорость звука. Предельные линии. Примеры точных решений 156
§ 20. Классификация сверхзвуковых течений по Христиановичу . . . 165

§ 21. Построение «безударного» сопла Лаваля. Истечение газа из отверстия, сопровождаемое переходом через скорость звука 174
§ 22. Численные методы решения плоских задач газовой динамики. Расчёт сверхзвукового обтекания кругового цилиндра 190
§ 23. Движение с очень большими сверхзвуковыми скоростями. Гиперзвуковые течения и обтекание тонких тел 206
§ 24. Случай реального газа, «Идеально-диссоциирующийся» газ . . 213

В. Установившиеся движения. Пространственная задача

§ 25. Движения с осевой симметрией 221
§ 26. Безвихревое осесимметрическое движение при $v > a$. Метод Франкля 225
§ 27. Осесимметрическое обтекание круглого конуса. Конические течения. Обтекание осесимметричных тел 229
§ 28. Пространственная задача. Линеаризация уравнений. Снаряд, движущийся под углом к оси симметрии 245
§ 29. Потенциал ускорения. Теорема Прандтля-Глауэрта. Крыло конечного размаха в сверхзвуковом потоке 262
§ 30. Сверхзвуковое обтекание тонкого крыла конечного размаха произвольной формы в плане. Концевой эффект и вихревая пелена 273
§ 31. Сверхзвуковые конические течения. Некоторые точные (нелинейные) решения 301
§ 32. Осесимметричное обтекание с отошедшей ударной волной . . 320

Г. Неустановившиеся движения

§ 33. Одноразмерные движения. Общие уравнения. Характеристики 325
§ 34. Сильные разрывы в одномерной нестационарной задаче . . . 329
§ 35. Случай постоянной энтропии. Движение поршня в неограниченной трубе. Точные решения. Наличие отражающей стенки 331
§ 36. Возникновение и перемещение сильного разрыва 341
§ 37. Односторонний взрыв. Плоский, цилиндрический и сферический взрыв без противодавления. Сферический взрыв с противодавлением 344

Глава вторая. **Движение вязкой жидкости (*Н. Е. Кочин*)** [1] . . . 369

А. Основные уравнения движения вязкой жидкости

§ 1. Понятие вязкой жидкости 369
§ 2. Тензор скоростей деформации 373
§ 3. Тензор напряжений 377
§ 4. Уравнения движения вязкой жидкости 385
§ 5. Различные формы уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости 388

[1]) § 10, § 19, § 20, часть § 34, § 35 и § 36 написаны И. А. Кибелем.

§ 6. Начальные и граничные условия 397
§ 7. Диссипация энергии 400
§ 8. Обобщение уравнений Гельмгольца 403
§ 9. Закон подобия. Число Рейнольдса 406
§ 10. Уравнение притока тепла для вязкой сжимаемой жидкости . . 415

Б. Точные решения уравнений движения вязкой жидкости

§ 11. Одномерное течение между двумя параллельными плоскими стенками 420
§ 12. Течение Пуазейля 427
§ 13. Общий случай стационарного одномерного течения 432
§ 14. Нестационарное одномерное течение 437
§ 15. Стационарное течение жидкости между двумя цилиндрами . . 447
§ 16. Диффузия вихря 450
§ 17. Течение в диффузоре 460
§ 18. Решение Гамеля и его обобщения 475
§ 19. Одномерное движение вязкой сжимаемой жидкости 481
§ 20. Задача об обтекании полубесконечной пластинки несжимаемой жидкостью 485

В. Приближённые решения уравнений движения вязкой жидкости в случае малых чисел Рейнольдса

§ 21. Плоское течение между двумя пластинками 498
§ 22. Медленное вращение сферы 502
§ 23. Медленное движение сферы 504
§ 24. Парадокс Стокса 511
§ 25. Уточнённое решение задачи о движении сферы 516
§ 26. Движение цилиндра 528
§ 27. Гидродинамическая теория смазки 534

Г. Приближённые решения уравнений движения вязкой жидкости в случае больших чисел Рейнольдса

§ 28. Общая характеристика течений при больших числах Рейнольдса. Вывод основных уравнений теории пограничного слоя 542
§ 29. Вывод Мизеса. Уравнение Мизеса 549
§ 30. Интегральное соотношение Кармана и его обобщения 556
§ 31. Уравнения теории пограничного слоя для сжимаемой жидкости 566
§ 32. Пограничный слой в несжимаемой жидкости вдоль плоской пластинки 569
§ 33. Пограничный слой в диффузоре. Ламинарная струя 578
§ 34. Приближённые методы теории пограничного слоя. Отрыв слоя. Метод Кочина—Лойцянского 588
§ 35. Пограничный слой в сжимаемой жидкости. Обтекание пластинки. Метод Дородницына 608
§ 36. Сжимаемая жидкость. Пограничный слой для произвольного профиля 627
§ 37. Основные уравнения теории исчезающей вязкости 632
§ 38. Реакция потока на тело 641
§ 39. Обтекание цилиндра 644
§ 40. Обтекание плоской пластинки 652

Глава третья. **Элементы теории турбулентности** (*И. А. Кибель*) 658

А. Турбулентность и неустойчивость

§ 1. Введение 658
§ 2. Устойчивость движения между двумя коаксиальными цилиндрами 659
§ 3. Устойчивость течения между пластинками и устойчивость в пограничном слое 666

Б. Развитая турбулентность

§ 4. Сглаживание 686
§ 5. Основные уравнения Рейнольдса 691
§ 6. Характеристики турбулентности 698

В. Добавочные напряжения и средние значения гидродинамических элементов

§ 7. Путь перемешивания и метод подобия 706
§ 8. Примеры 709

Литература 718

Именной указатель 721

Предметный указатель 724

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЁРТОМУ ИЗДАНИЮ

В новом издании книги наиболее значительной переработке подверглась первая глава — теоретические основы газовой динамики. В неё введено пять новых параграфов, в которых приводятся результаты, полученные с помощью электронных быстродействующих машин для задач на сверхзвуковое обтекание как в плоском, так и в пространственном случаях, изложены теория гиперзвуковых движений, теория диссоциирующего газа, линейная пространственная задача обтекания крыла. Ряд параграфов значительно расширен. Так, в параграфе, посвящённом взрыву, даётся теория точечного взрыва без учёта противодавления, а также детально излагается способ решения на электронной быстродействующей машине задачи о взрыве с учётом противодавления; в параграфе, посвящённом крылу в плоско-параллельном потоке, расширено изложение, касающееся обтекания пластинки; даны новые примеры точных решений в осесимметричном случае. Уточнён ряд отдельных результатов и методов. Так, например, для метода характеристик указываются новые варианты и, в частности, излагается применение его к расчётам, проводимым с помощью электронных вычислительных машин.

В главе о вязкой жидкости вставлен параграф, посвящённый точному решению задачи обтекания пластинки, и дано сравнение этого решения с известным решением, относящимся к пограничному слою. При подготовке нового издания исправлены опечатки, допущенные в предыдущем издании. Как и в прежних изданиях, мы старались не только познакомить читателя с теми или иными основными идеями, но и изложить, по мере возможности, технику решения гидродинамических задач.

И. Кибель

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

§ 1. Введение. Газовая динамика — это гидродинамика больших скоростей и малой пространственной протяжённости. Области её применения суть: конструирование скоростных самолётов, внутренняя и внешняя баллистика, теория паровых турбин, теория ракет и т. п. Малая пространственная протяжённость изучаемого явления позволяет отбросить в уравнениях газовой динамики внешние силы (совершенно так же, как это делается в обычной теории крыла аэроплана). Действительно, абсолютное значение изменения давления $|\Delta p|$, происходящего благодаря наличию силы тяжести, при перемещении по вертикали на Δz будет:

$$|\Delta p| = g\rho\,\Delta z = \frac{pg}{RT}\Delta z,$$

отсюда

$$\frac{|\Delta p|}{p} = g\frac{\Delta z}{RT} = 9{,}8\frac{\Delta z}{287\cdot T},$$

и если принять T за 273, то для изменения давления на 1% понадобится перемещение по вертикали примерно на 80 *м*. Этот вывод подтверждается также и принципом подобия, согласно которому действие внешних сил будет тем меньше, чем меньше будет масштаб явления.

Вторая особенность газовой динамики — наличие больших скоростей — заставляет отказаться здесь от рассмотрения несжимаемой жидкости. Действительно, несжимаемая жидкость, имеющая давление p_1, плотность ρ_1 и движущаяся со скоростью v_1, приобретает, набегая на препятствие ($v = 0$), давление

$$p = p_1 + \rho_1\frac{v_1^2}{2}.$$

Напротив, сжимаемая, движущаяся адиабатически жидкость приобретает давление

$$p = p_1\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa}\frac{\rho_1}{p_1}v_1^2\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} =$$

$$= p_1\left[1 + \frac{\rho_1}{2p_1}v_1^2 + \frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{\rho_1 v_1^2}{2p_1}\right)^2 + \ldots\right] \approx p_1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{2}\left(1 + \frac{\rho_1}{\varkappa p_1}\frac{v_1^2}{4}\right).$$

Отсюда видим, что лишь когда $\rho_1 v_1^2/4\varkappa p_1 < 1/100$, т. е. при $\varkappa = 1{,}405$, $T = 273$, $v_1 < 70$ *м/сек*, давления для случаев сжимаемой и несжимаемой жидкости будут разниться меньше чем на 1%. Газовая динамика имеет, однако, зачастую дело со скоростями, значительно бóльшими. На необходимость учёта сжимаемости при больших скоростях указывает (качественно) также принцип подобия.

Как будет выяснено в следующей главе, при больших скоростях вязкость играет меньшую роль (большие значения числа Рейнольдса) и область влияния её ограничивается ничтожным пограничным слоем.

В таких вопросах, как сопротивление трения, наличие пограничного слоя будет, конечно, при всей малости слоя, иметь принципиальное значение. Однако, как мы увидим, при больших скоростях возникают, вообще говоря, другие виды сопротивлений, отодвигающие на задний план сопротивление трения. Наконец, при больших скоростях обмен теплом с внешним пространством не успевает, как правило, совершиться — отсюда вытекает возможность ограничиться рассмотрением движений адиабатических. Таким образом уравнения газовой динамики суть, вообще говоря, уравнения движения идеальной сжимаемой жидкости, не подверженной действию внешних сил.

В дальнейшем мы увидим, что наличие больших скоростей порождает совершенно специфическое явление, резко отличающее газовую динамику от иных областей применения механики сжимаемой жидкости (динамическая метеорология и акустика): мы имеем в виду образование поверхностей, при переходе через которые давление, а также и другие гидродинамические элементы претерпевают разрыв непрерывности. Наличие таких поверхностей («волны», «поверхности разрыва», «скачки уплотнения») заставляет осторожнее подойти к выводу уравнений гидродинамики в дифференциальной форме, выводу, обычно делаемому в предположении, что гидродинамические элементы непрерывны. Мы начнём поэтому с уравнений в форме интегралов.

Сделаем ещё одно замечание. При весьма больших скоростях, таких, например, с какими приходится иметь дело в случае искусственных спутников Земли, в газе за скачком уплотнения могут образоваться огромные температуры. В реальной атмосфере, состоящей в основном из молекул кислорода и азота, возникает при этом ряд процессов, связанных с диссоциацией молекул на атомы, а при

ещё бо́льших температурах — с их ионизацией. Поэтому мы должны быть подготовлены к необходимости использования более общих законов термодинамики, чем те, с которыми приходится иметь дело в акустике, динамической метеорологии и в классической механике сжимаемой жидкости.

§ 2. Уравнения гидродинамики в форме интегралов. Сильные разрывы. Уравнения движения могут быть записаны, в нашем случае, в виде (приращение количества движения равно импульсу силы):

$$\left(\int\int\int_{(\tau)} \rho V\, d\tau\right)_{t=t_2} - \left(\int\int\int_{(\tau)} \rho V\, d\tau\right)_{t=t_1} = -\int_{t_1}^{t_2}\left(\int\int_{(S)} pn\, ds\right) dt \quad (2.1)$$

[(τ) — произвольный объём жидкости, ограниченный поверхностью (S), $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к (S), t_1 и t_2 — два каких-то момента времени]. Уравнение неразрывности естественнее всего при этом записать в виде:

$$\left(\int\int\int_{(\tau)} \rho\, d\tau\right)_{t=t_2} = \left(\int\int\int_{(\tau)} \rho\, d\tau\right)_{t=t_1}. \quad (2.2)$$

Уравнение энергии [приращение живой силы частицы (τ), сложенное с приращением внутренней энергии $\int\int\int_{(\tau)} \rho U\, d\tau$, где U — внутренняя энергия единицы массы, равно работе внешних сил, приложенных к частице] имеет вид:

$$\left(\int\int\int_{(\tau)} \rho \frac{V\cdot V}{2}\, d\tau\right)_{t=t_2} - \left(\int\int\int_{(\tau)} \rho \frac{V\cdot V}{2}\, d\tau\right)_{t=t_1} + \\ + \frac{1}{A}\left(\int\int\int_{(\tau)} \rho U\cdot d\tau\right)_{t=t_2} - \frac{1}{A}\left(\int\int\int_{(\tau)} \rho U\, d\tau\right)_{t=t_1} = \\ = -\int_{t_1}^{t_2}\left(\int\int_{(S)} pV\cdot \boldsymbol{n}\, ds\right) dt. \quad (2.3)$$

Все три уравнения [(2.1), (2.2), (2.3)] могут быть записаны следующим образом:

$$\left(\int\int\int_{(\tau)} a\, d\tau\right)_{t=t_2} - \left(\int\int\int_{(\tau)} a\, d\tau\right)_{t=t_1} = \int_{t_1}^{t_2}\left(\int\int_{(S)} c_n\, ds\right) dt, \quad (2.4)$$

причём в первом случае

$$a = \rho V, \quad c_n = -pn, \quad (2.5)$$

во втором

$$a = \rho, \quad c_n = 0, \quad (2.6)$$

в третьем

$$a = \rho \frac{V \cdot V}{2} + \frac{\rho U}{A}; \quad c_n = -pV \cdot n. \tag{2.7}$$

Если функции a и c_n и их производные существуют и непрерывны в интервале от t_1 до t_2 и во всех точках объёмов, занимаемых жидкой частицей (τ) при движении её от t_1 до t_2, то мы можем вывести из (2.4) обычные дифференциальные уравнения гидродинамики. Производные от наших функций могут при этом претерпевать разрыв при переходе через отдельные поверхности.

Предположим, однако, что всегда существует одна поверхность [1]) Σ:

$$F(x, y, z, t) = 0, \tag{2.8}$$

проходящая через точки (τ) и перемещающаяся в пространстве [вхождение t в уравнение (2.8)], такая, что сами функции a и c_n претерпевают при переходе через эту поверхность разрыв. Часть пространства, прилегающая к поверхности Σ, делится этой последней на две области: с одной стороны от поверхности

$$F(x, y, z, t) < 0,$$

с другой:

$$F(x, y, z, t) > 0.$$

Первую область назовём отрицательной и условимся обозначать значения, к которым стремится некая функция $b(x, y, z, t)$, если приближаться к Σ, оставаясь в отрицательной области, через b_-; вторую область назовём положительной, а соответствующие ей значения b на Σ назовём b_+. Разность $b_+ - b_-$ обозначим через $[b]$:

$$b_+ - b_- = [b]$$

и назовём разрывом или скачком функции b на поверхности Σ. Сама поверхность Σ называется при этом *поверхностью разрыва* функции b.

Предполагая, что $[a]$ и $[c_n]$ отличны от нуля, посмотрим, какие условия налагает на эти разрывы наличие уравнения (2.4). Предварительно введём некоторые термины. Поверхность (2.8) в разные моменты времени будет занимать в пространстве различные положения. Рассчитаем скорость N, с которой поверхность эта будет в некоторой своей точке удаляться по нормали от своего положения. Возьмём некую точку $M(x, y, z)$ на поверхности Σ в момент t и проведём нормаль к Σ в M, направляя эту нормаль в положительную область. Пусть эта нормаль пересекается с той поверхностью,

[1]) Мы ограничиваемся случаем существования единственной поверхности; никакого труда не представит перенести наши рассуждения на случай любого конечного числа поверхностей.

в которую переходит Σ к моменту $t+t'$, в точке $M^*(x^*, y^*, z^*)$. Тогда

$$\lim_{t'\to 0}\frac{\overline{MM^*}}{t'}$$

и будет искомой скоростью. Но

$$x^* = x + \frac{\overline{MM^*}}{g}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \ldots,$$

где

$$g = +\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2} \quad \left(F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \ \ldots\right)$$

и

$$F(x^*, y^*, z^*, t+t') = 0 = F\left(x+\frac{\overline{MM^*}}{g}F_x, \ \ldots, \ t+t'\right) =$$

$$= F(x, y, z, t) + \frac{\overline{MM^*}}{g}(F_x^2+F_y^2+F_z^2) + F_t t' + O(\overline{MM^*}^2) + O(t'^2).$$

Здесь и далее символ $O(t'^2)$ означает: «величина порядка t'^2».

Далее, $F(x, y, z, t) = 0$, так как точка $M(x, y, z)$ лежит в момент t на поверхности Σ, и потому

$$\lim_{t'\to 0}\frac{\overline{MM^*}}{t'} = -\frac{F_t}{g}.$$

Получаем важную формулу

$$N = -\frac{F_t}{g} = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{2.9}$$

Величина N носит название *скорости перемещения поверхности разрыва*. Она имеет чисто геометрический характер и никак не связана с существующим движением жидкости. Однако, поскольку речь идёт о перемещении поверхности Σ в движущейся, в свою очередь, жидкости, представляет интерес ещё и другая величина — именно скорость, с которой поверхность разрыва Σ перемещается от одной жидкой частицы к другой (скорость эта была бы равна N в случае, если бы жидкость покоилась). Чтобы найти эту скорость в каждой точке M поверхности Σ, достаточно, очевидно, вычесть из скорости N величину V_n проекции на нормаль $\boldsymbol{n}$ к поверхности Σ скорости V движения жидкости в этой точке M поверхности. Полученная величина

$$\theta = N - V_n \tag{2.10}$$

носит название *скорости распространения поверхности разрыва*. Заметим, что если V_n будет претерпевать разрыв, то то же будет происходить и с θ.

Пользуясь понятием скорости распространения поверхности разрыва, мы без труда можем вывести соотношения, связывающие вследствие уравнений гидродинамики скачки (разрывы) различных гидродинамических элементов. Для этого обратимся сперва к моменту t_1 и обозначим через Σ_{t_1} положение поверхности разрыва в этот момент, а через Σ'_{t_2} — положение в момент t_1 тех точек жидкости, которые в момент t_2 (бесконечно близкий к t_1) окажутся на поверхности разрыва.

На поверхности Σ_{t_1} отметим точку M и построим малый цилиндрик (рис. 1) с осью, совпадающей с нормалью к Σ_{t_1} в точке M и

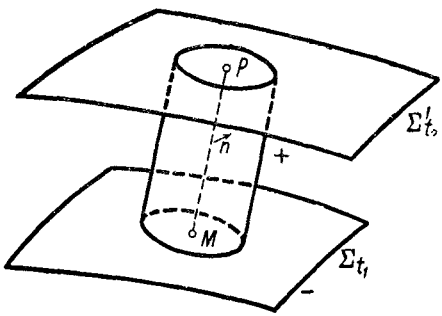

Рис. 1.

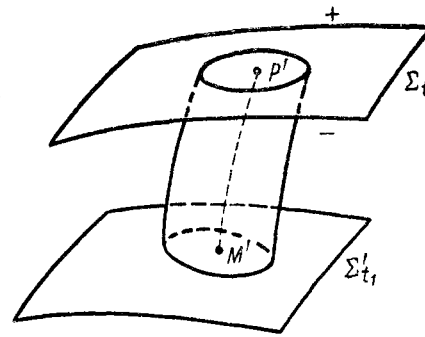

Рис. 2.

до пересечения с поверхностью Σ'_{t_2} [1]); объём этого цилиндрика и примем за объём интегрирования (τ) (к моменту t_1) в выражении (2.4). Посмотрим теперь, что произойдёт к моменту t_2. Вследствие движения жидкости, точка M перейдёт в какую-то точку M'; поверхность Σ'_{t_1}, переместившись и деформировавшись, займёт некоторое положение Σ'_{t_1}; наконец, точки поверхности Σ'_{t_1} перейдут в точки поверхности разрыва Σ_{t_2}, отвечающей моменту t_2. Цилиндрик наш деформируется, причём в то время как в момент t_1 он находился целиком в положительной области, в момент t_2 он ляжет в отрицательной, отвечающей этому моменту области (рис. 2).

Обращаясь сперва к левой части уравнения (2.4), оценим величины объёмов интегрирования $(\tau)_{t_1}$ и $(\tau)_{t_2}$. Очевидно, что первый будет:

$$\pi r^2 \theta_+ (t_2 - t_1) + \varepsilon_1 r^2 (t_2 - t_1),$$

[1]) Пусть нормаль эта пересекает Σ'_{t_2} в точке P. Считая, что нормаль направлена в сторону положительной области (не представит труда провести все рассуждения для противоположного случая), будем, очевидно, иметь для малых $t_2 - t_1$:

$$\overline{MP} = \theta_+ (t_2 - t_1) + O((t_2 - t_1)^2).$$

где r — бесконечно малый радиус цилиндрика, а ε_1 — величина бесконечно малая; второй же:

$$\pi r^2 \theta_- (t_2 - t_1) + \varepsilon_2 r^2 (t_2 - t_1),$$

где ε_2 бесконечно мала. При этом как в том, так и в другом случаях мы разумеем под θ значения скорости распространения в одной и той же точке M и в один и тот же момент времени t_1 — значения, вычисленные при приближении с разных сторон к поверхности Σ_{t_1} [1]).

Теперь мы можем написать:

$$\left(\int\int\int_{(\tau)} a\, d\tau\right)_{t_1} = a_+ \pi r^2 \theta_+ (t_2 - t_1) + \varepsilon_3 r^2 (t_2 - t_1),$$

$$\left(\int\int\int_{(\tau)} a\, d\tau\right)_{t_2} = a_- \pi r^2 \theta_- (t_2 - t_1) + \varepsilon_4 r^2 (t_2 - t_1)$$

(ε_i — всюду в дальнейшем бесконечно малые величины), и следовательно,

$$\left(\int\int\int_{(\tau)} a\, d\tau\right)_{t_2} - \left(\int\int\int_{(\tau)} a\, d\tau\right)_{t_1} =$$

$$= -\pi r^2 (t_2 - t_1)(a_+ \theta_+ - a_- \theta_-) + \varepsilon_5 r^2 (t_2 - t_1) =$$

$$= -\pi r^2 (t_2 - t_1)[a\theta] + \varepsilon_5 r^2 (t_2 - t_1).$$

(a_+ и a_- — значения a в точке M в момент t_1). Перейдём теперь к правой части (2.4). Поверхность (S) складывается из трёх частей (рис. 3): боковой поверхности цилиндра, на которой, очевидно,

$$\int\int_{(S)} c_n\, ds = O(1)\, r\, (t_2 - t_1),$$

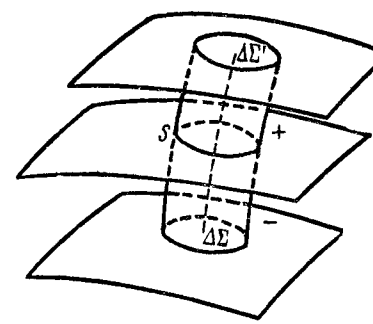

Рис. 3.

и двух оснований $\Delta\Sigma$ и $\Delta\Sigma'$. Наш цилиндрик деформируется и перемещается так, что поверхность разрыва в момент t_1 является его одним основанием, в момент t_2 — его другим основанием, а в моменты t, лежащие между t_1 и t_2, занимает промежуточные положения, располагаясь где-то между «нижним» и «верхним» основаниями (рис. 3). Отсюда получается, что $\Delta\Sigma$ находится за весь промежуток времени

[1]) Вообще говоря, $[\theta] \neq 0$, ибо $[V_n] \neq 0$; величина же N из (2.10) разрыва не терпит.

от t_1 до t_2 в одной области, а $\Delta\Sigma'$ — в другой. Предположим, что $\Delta\Sigma$ находится в области отрицательной, а $\Delta\Sigma'$ — в положительной. Тогда в выражении $\int\int_{(S)} c_n\,ds$ величина c_n, как легко показать, отличается от значения c_n, взятого в точке M и в момент t_1, на величину, исчезающую вместе с $(t_2 - t_1)$ и с r. Замечая, что вследствие (2.5), (2.7) всегда можно написать:

$$c_n = c_x \cos(n,\ x) + c_y \cos(n,\ y) + c_z \cos(n,\ z),$$

где n — внешняя по отношению к области (τ) нормаль, и сохраняя для нормали к $\Delta\Sigma$ (вернее, для нормали $\overline{MP}$) обозначение n, мы должны, очевидно, написать для $\Delta\Sigma$ [нормаль, идущая в сторону положительной области, направлена здесь внутрь (τ)]:

$$\int\int_{(\Delta\Sigma)} c_n\,ds = -\,c_{n-}\pi r^2 + \varepsilon_6 r^2.$$

Совершенно аналогично этому

$$\int\int_{(\Delta\Sigma')} c_n\,ds = c_{n+}\pi r^2 + \varepsilon_7 r^2$$

(нормаль, идущая в положительную область, направлена здесь во внешнюю часть пространства). Теперь мы можем написать, очевидно:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int\int_{(S)} c_n\,ds\right)dt =$$

$$= c_{n+}\pi r^2 (t_2 - t_1) - c_{n-}\pi r^2 (t_2 - t_1) + \varepsilon_8 r^2 (t_2 - t_1) + O(1)\, r\,(t_2 - t_1)^2.$$

Собирая вместе полученные оценки, будем иметь:

$$\left(\int\int_{(\tau)}\int a\,d\tau\right)_{t_2} - \left(\int\int_{(\tau)}\int a\,d\tau\right)_{t_1} - \int_{t_1}^{t_2}\left(\int\int_{(S)} c_n\,ds\right)dt =$$

$$= -\,\{[a\theta] + [c_n]\}\,\pi r^2 (t_2 - t_1) + \varepsilon_9 r^2 (t_2 - t_1) + O(1)\, r\,(t_2 - t_1)^2.$$

Переходя к пределу, полагая $(t_2 - t_1) \to 0$, а затем и $r \to 0$, получим основное соотношение

$$[a\theta] + [c_n] = 0. \tag{2.11}$$

Остаётся только вспомнить значения a и c_n из (2.5), (2.6) и (2.7); получим:

$$[\rho\theta V] = [p]\,\boldsymbol{n}, \tag{2.12}$$

$$[\rho\theta] = 0, \tag{2.13}$$

$$\left[\rho\theta\frac{V\cdot V}{2} + \frac{\rho U}{A}\theta\right] = [pV\cdot\boldsymbol{n}]. \tag{2.14}$$

Так как по (2.13) произведение $\rho\theta$ не терпит разрыва, то мы можем это произведение вынести всюду за знаки разрыва и написать:

$$\rho\theta\,[\boldsymbol{V}] = [p]\,\boldsymbol{n}, \tag{2.15}$$

$$[\rho\theta] = 0, \tag{2.16}$$

$$\rho\theta\left[\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2} + \frac{U}{A}\right] = [pV_n]. \tag{2.17}$$

До сих пор мы не говорили о виде внутренней энергии нашего газа. Мы обратимся теперь к классической газовой динамике, газовой динамике так называемого идеального (в термодинамическом смысле), или совершенного газа. В этом случае внутренняя энергия U единицы массы имеет вид

$$U = c_v T, \tag{2.18}$$

где c_v — теплоёмкость газа при постоянном объёме (величина постоянная), а T — температура.

Мы вернемся в § 24 к случаю реального газа, а пока будем рассматривать только идеальный газ. Для него условие (2.17) должно быть заменено соотношением

$$\rho\theta\left[\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2} + \frac{c_v T}{A}\right] = [pV_n]. \tag{2.19}$$

Соотношения (2.15), (2.16) и (2.19), коими связаны величины θ, ρ, $\boldsymbol{V}$, p, T по обе стороны поверхности разрыва, носят название *условий динамической совместности*. Здесь имеется в виду совместность двух движений: с элементами $\boldsymbol{V}_+$, p_+, ... и с элементами $\boldsymbol{V}_-$, p_-, ... Весьма существенным является наше предположение о том, что существует всегда одна и только одна поверхность разрыва. В этом смысле условия динамической совместности необходимы, и если бы оказалось, что в некоторый момент в жидкости образовалась поверхность разрыва, такая, что гидродинамические элементы с обеих сторон от неё различны, но не связаны соотношениями (2.15), (2.16) и (2.19), то такая поверхность разрыва существовать в дальнейшем одна не смогла бы; здесь возникает взрыв (см. далее § 37 этой главы).

В тех точках пространства, через которые поверхность разрыва в данный момент не проходит, мы должны удовлетворить обычным уравнениям гидродинамики.

Если

$$\theta = 0,$$

то поверхность разрыва не распространяется по частицам, отделяя всегда одну массу газа от другой. Такая поверхность разрыва называется *стационарной*. Здесь по (2.15) $[p] = 0$, а по (2.19) $[V_n] = 0$; напротив, $[\rho]$ и скачок касательных к Σ составляющих скорости совершенно произвольны. Примерами такой поверхности могут

служить: волнующаяся поверхность реки (отделяющая воздух от воды), поверхность тёплого или холодного фронта (в метеорологии), поверхность газовой струи.

Значительно больший интерес для газовой динамики представляют случаи, когда

$$\theta \neq 0.$$

Здесь обязательно будет

$$[p] \neq 0, \quad [V_n] \neq 0$$

(если при $\theta \neq 0$ $[p] = 0$, то по (2.15) $[V] = 0$, затем по (2.19) $[T] = 0$ и, значит, $[\rho] = 0$ [1]), т. е. разрыва вообще нет). Пример — «баллистическая волна», бегущая перед носом снаряда. Полезно отметить, что при $\theta \neq 0$ скачок касательной к Σ составляющей скорости равен нулю (в этом убеждаемся, умножая скалярно обе части (2.15) на любой единичный вектор, расположенный перпендикулярно к $\boldsymbol{n}$).

Поверхности Σ, на которых сами гидродинамические элементы претерпевают разрыв, носят название *поверхностей сильного разрыва*. В том случае, если сами гидродинамические элементы непрерывны, но среди их первых производных по координатам или по времени найдётся хотя бы одна, меняющаяся скачком при переходе через поверхность; последняя называется поверхностью разрыва первого порядка. Вообще говоря, если при переходе через поверхность Σ функция b непрерывна, но производная по координате или по времени, начиная с некоторого порядка, терпит разрыв, то Σ называется *поверхностью слабого разрыва* для функции b. Употребительны также термины просто «разрыв» или «волна». Поверхности сильного разрыва, представляющие разрыв давления, называются ещё скачками уплотнения или ударами сжатия.

§ 3. Уравнения газовой динамики в дифференциальной форме. Для той части жидкости, в которой гидродинамические элементы и их первые производные остаются непрерывными, мы можем написать уравнения в дифференциальной форме.

Уравнения движения уже были подробно выведены в ч. I из начала Даламбера. Чтобы получить эти уравнения из (2.1), поделим сначала обе части (2.1) на разность $t_2 - t_1$ и перейдём затем к пределу, полагая, что $t_2 \to t_1 = t$. Получим, очевидно:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{(\tau)} \int\limits \int \rho \boldsymbol{V} d\tau = - \int\limits_{(S)} \int\limits \boldsymbol{p}\boldsymbol{n}\, ds. \tag{3.1}$$

Мы не можем внести слева дифференцирование под знак интеграла, ибо объём (τ) сам зависит от времени, но мы можем написать,

---

[1]) Последнее заключаем из уравнения состояния:

$$p = R\rho T.$$

вводя лагранжевы координаты:

$$\iiint\limits_{(\tau)} \rho V\, d\tau = \iiint\limits_{(\tau)} \rho V\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(\tau_0)} \rho\, VD\, da\, db\, dc,$$

где (τ_0) — положение объёма (τ) в некоторый закреплённый момент t_0, a, b, c — лагранжевы координаты, D — функциональный определитель

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)}.$$

С другой стороны, из уравнения неразрывности следует, что

$$\rho D = \rho_0,$$

где

$$\rho_0 = \rho(a, b, c, t_0) = \rho_0(a, b, c).$$

Таким образом

$$\iiint\limits_{(\tau)} \rho V\, d\tau = \iiint\limits_{(\tau_0)} V(a, b, c, t)\, \rho_0(a, b, c)\, da\, db\, dc.$$

Отметив, что (τ_0) и ρ_0 от времени, по самому их определению, не зависят, мы можем написать:

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_{(\tau)} \rho V\, d\tau = \iiint\limits_{(\tau_0)} \rho_0 \frac{dV}{dt}\, da\, db\, dc.$$

Возвращаясь к старым переменным и к (3.1), получим окончательно

$$\iiint\limits_{(\tau)} \rho \frac{dV}{dt}\, d\tau = -\iint\limits_{(S)} p n\, ds.$$

Далее, преобразуем правый интеграл по формуле Грина к объёмному интегралу и перенесём всё под знак объёмного интеграла. Получим, вследствие произвольности объёма (τ) и предполагаемой непрерывности подынтегральной функции:

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\operatorname{grad} p, \tag{3.2}$$

что совпадает с уравнением (4.3) гл. II части первой, если там отбросить объёмные силы $\boldsymbol{F}$.

Уравнение неразрывности подробно было выведено в первой части. Это будет для сжимаемой жидкости

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0. \tag{3.3}$$

Наконец, уравнение энергии, если разделить обе его части на $t_2 - t_1$ и перейти к пределу, полагая, что $t_2 \to t_1 = t$, даст после собирания членов:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(\tau)}\int\int\rho\left(\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}+\frac{1}{A}c_vT\right)d\tau = -\int\limits_{(S)}\int p\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,ds.$$

Применяя к левой части этого уравнения преобразования, аналогичные тем, что были применены при выводе уравнения, получим:

$$\int\limits_{(\tau)}\int\int\rho\left(\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}+\frac{1}{A}c_v\frac{dT}{dt}\right)d\tau = -\int\limits_{(S)}\int p\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,ds.$$

Преобразуя левую часть к объёмному интегралу по формуле Грина, перенося всё в одну сторону и собирая под один знак интеграла, напишем:

$$\int\limits_{(\tau)}\int\int\left\{\rho\left(\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}+\frac{1}{A}c_v\frac{dT}{dt}\right)+\operatorname{div}(p\boldsymbol{V})\right\}d\tau = 0$$

и вследствие произвольности объёма (τ) и непрерывности подынтегрального выражения

$$\rho\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}+\frac{1}{A}c_v\rho\frac{dT}{dt}+\operatorname{div}(p\boldsymbol{V}) = 0. \tag{3.4}$$

Умножим теперь обе части равенства (3.2) скалярно на $\boldsymbol{V}$ и вычтем из (3.4). Так как

$$\boldsymbol{V}\cdot\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}}{2}$$

и так как

$$\boldsymbol{V}\cdot\operatorname{grad}p = \operatorname{div}(p\boldsymbol{V}) - p\operatorname{div}\boldsymbol{V},$$

мы получим:

$$\frac{1}{A}c_v\rho\frac{dT}{dt}+p\operatorname{div}\boldsymbol{V} = 0.$$

Деля обе части этого равенства на p, заменяя $\operatorname{div}\boldsymbol{V}$ по формуле (3.3) и вспоминая, что по уравнению состояния

$$p = R\rho T, \tag{3.5}$$

мы получим:

$$\frac{1}{AR}\frac{c_v}{T}\frac{dT}{dt}-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Это можно записать ещё, используя снова (3.5), в виде

$$\frac{1}{AR}c_v\left(\frac{d\ln p}{dt}-\frac{d\ln\rho}{dt}\right)-\frac{d\ln\rho}{dt} = 0.$$

Собирая члены с производными, замечая, что

$$c_p - c_v = AR,$$

и производя простые преобразования, получим окончательно:

$$\frac{d}{dt}\frac{p}{\rho^{\varkappa}} = 0,$$

где $\varkappa$ есть отношение теплоёмкостей. Так будет выглядеть «уравнение притока тепла» — условие адиабатичности в дифференциальной форме.

Отметим, что $\varkappa$ всегда будет больше единицы. Для одноатомного газа $\varkappa = {}^5/_3$, для двухатомного газа $\varkappa = {}^7/_5$ (при обычных температурах). Для воздуха мы будем принимать чаще всего $\varkappa = {}^7/_5 = 1{,}4$ [1]).

При выводе уравнений этого параграфа мы предполагали гидродинамические элементы и их производные непрерывными. Пусть теперь есть поверхность Σ, являющаяся поверхностью слабого разрыва, так что сами функции непрерывны всюду, но уже первые их производные по координатам и времени претерпевают при переходе через Σ разрыв. Такого рода слабые разрывы возможны, как мы в дальнейшем увидим, для нестационарного движения и для широкого класса стационарных движений. Остановимся на этом вопросе детальнее.

§ 4. Слабые разрывы. Характеристики уравнений газовой динамики. Наличие поверхности сильного разрыва не накладывало, само по себе, никаких ограничений на скачки гидродинамических элементов, и только необходимость удовлетворить уравнениям (2.1), (2.2) и (2.3) привела к установлению соотношений (2.15), (2.16) и (2.19). Напротив, в случае слабых разрывов уже самый факт существования разрыва производных, имеющего место вдоль многообразия деформирующегося и перемещающегося, но всегда остающегося единственной поверхностью, заставляет связать скачки названных производных некоторыми условиями. Последние являются следствиями геометрической или, вернее, кинематической картины движения и выводятся совершенно независимо от уравнений гидродинамики. Условия эти носят название «условий тождественности» и «кинематической совместности». Чтобы их получить, предположим, что функция $\Phi(x, y, z, t)$ непрерывна во всём пространстве, занимаемом жидкостью, но что её первые производные претерпевают разрыв на некоторой поверхности $\mathfrak{S}$, имеющей уравнение [2])

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{4.1}$$

---

[1]) Употребительны ещё числа $\varkappa = 1{,}41$, а также значение $\varkappa = {}^4/_3$. Последнее получается, по Лайтхиллу, в пределе, если, рассматривая реальный, но так называемый идеально-диссоциирующийся газ (в котором $\varkappa$ зависит от T и от числа диссоциированных молекул), устремлять число диссоциированных молекул к нулю (см. § 24 этой главы).

[2]) Под функцией $\Phi(x, y, z, t)$ мы можем подразумевать какой-нибудь гидродинамический элемент непосредственно или же какую-либо его производную по координатам или по времени.

Мы можем говорить о четырёхмерном пространстве (x, y, z, t) и в нём изображать уже неподвижную гиперповерхность (4.1). Пусть теперь имеется непрерывная вместе с производными функция ψ от четырёх наших независимых переменных и такая, что на гиперповерхности (4.1)

$$\psi(x, y, z, t) = \text{const}.$$

Тогда вдоль гиперповерхности

$$d\psi = 0 = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz + \frac{\partial\psi}{\partial t}dt, \tag{4.2}$$

причём дифференциалы берутся вдоль этой поверхности; но здесь, вследствие уравнения (4.1),

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0, \tag{4.3}$$

это есть единственное условие, которое следует наложить на дифференциалы наших координат вдоль поверхности. Сопоставляя (4.2) и (4.3), заключаем, что во всех точках поверхности разрыва и для любого момента времени должно быть:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} : \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial t} : \frac{\partial f}{\partial t} = \mu_\psi, \tag{4.4}$$

где μ_ψ — некоторая функция от координат и времени, определённая на (4.1).

Рассмотрим теперь функцию $\tilde{\Phi}(x, y, z, t)$, непрерывную *во всём* нашем гиперпространстве и имеющую *непрерывные* же первые производные по координатам и времени. Пусть эта функция тождественно равна функции Φ, но только в положительной области; тогда на поверхности Σ

$$\tilde{\Phi} = \Phi_+; \quad \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_+, \ldots$$

Рассмотрим ещё функцию $\tilde{\tilde{\Phi}}$, непрерывную вместе со своими первыми производными во всём гиперпространстве и такую, что в отрицательной области $\tilde{\tilde{\Phi}} \equiv \Phi$; тогда на Σ:

$$\tilde{\tilde{\Phi}} = \Phi_-; \quad \frac{\partial\tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial x} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_-, \ldots$$

Функция $\tilde{\Phi} - \tilde{\tilde{\Phi}}$ непрерывна со своими производными во всём гиперпространстве и, так как $[\Phi] = 0$, — обращается в нуль на Σ. Но тогда мы можем принять функцию $\tilde{\Phi} - \tilde{\tilde{\Phi}}$ за функцию ψ предыдущей теоремы, и, если заметить, что на Σ, по определению $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\tilde{\Phi}}$, будет:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\Phi} - \tilde{\tilde{\Phi}}) = \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial x} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_- = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right], \ldots,$$

мы можем написать:

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]:\left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]:\left[\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]:\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]=\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z}:\frac{\partial f}{\partial t},$$

что можно записать ещё так:

$$[\nabla\Phi]=\mu_\Phi\nabla f;\quad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]=\mu_\Phi\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{4.5}$$

Условия (4.5) и суть условия совместности, о которых мы говорили. Они показывают, что достаточно задать одну лишь функцию μ_Φ, чтобы определить затем разрывы всех производных Ф. Достаточно знать также разрывы одной какой-нибудь производной. Так, например, если разрыв одной из производных первого порядка равен нулю, то и все производные первого порядка будут на (4.1) непрерывны.

Формулы (4.5) могут быть ещё представлены путём деления и умножения на $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$ в виде

$$[\nabla\Phi]=\lambda_\Phi\boldsymbol{n};\quad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]=-\lambda_\Phi N, \tag{4.6}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали, а N, по (2.9), — скорость перемещения поверхности слабого разрыва.

Кроме кинематических условий (4.5), нам следует подчинить разрывы производных от различных гидродинамических элементов условиям динамическим, проистекающим оттого, что элементы эти должны, в положительной и отрицательной областях отдельно, удовлетворять уравнениям гидродинамики. Считая, что v_x, v_y, v_z, p, ρ непрерывны, можем написать:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla p=-\rho\left\{\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V}\right\},\\
&\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{V}),\\
&\frac{\partial}{\partial t}\frac{p}{\rho^\varkappa}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\frac{p}{\rho^\varkappa}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Уравнения наши не содержат производных более высокого порядка, чем первый. Приписывая один раз всем производным знак плюс, а другой раз знак минус и вычитая получаемые уравнения друг из друга соответственно, придём к соотношениям:

$$[\nabla p]=-\rho\left\{\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}\right]+v_x\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x}\right]+v_y\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial y}\right]+v_z\left[\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial z}\right]\right\},$$

$$\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]+\boldsymbol{V}\cdot[\nabla\rho]+\rho[\operatorname{div}\boldsymbol{V}]=0,$$

$$\rho\left[\frac{\partial p}{\partial t}\right]-\varkappa p\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]+\rho\boldsymbol{V}\cdot[\nabla p]-\varkappa p\boldsymbol{V}\cdot[\nabla p]=0.$$

Используя (4.6), получим тогда:

$$\lambda_p \boldsymbol{n} = \rho \lambda_V N - V_n \lambda_V \rho,$$
$$-\lambda_\rho N + V_n \lambda_\rho + \rho \lambda_V \cdot \boldsymbol{n} = 0,$$
$$\rho \lambda_p N - \varkappa p \lambda_\rho N - \rho V_n \lambda_p + \varkappa p V_n \lambda_\rho = 0$$

(λ_V есть вектор с компонентами λ_{v_x}, λ_{v_y}, λ_{v_z}). Собирая члены с λ, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_p \boldsymbol{n} &= \rho (N - V_n) \lambda_V, \\ \lambda_\rho (N - V_n) &= \rho \lambda_V \cdot \boldsymbol{n}, \\ \rho \lambda_p (N - V_n) - \varkappa \rho (N - V_n) \lambda_\rho &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

Пять величин λ удовлетворяют пяти однородным уравнениям. Для того чтобы существовали λ, отличные от нуля, необходимо, чтобы был равен нулю определитель системы; проще всего получить это условие, умножая скалярно первое уравнение из (4.8) на $\boldsymbol{n}$ и вставляя вместо $\rho(\lambda_V \cdot \boldsymbol{n})$ выражение из левой части второго из уравнений (4.8). Получим тогда:

$$\lambda_p = \lambda_\rho (N - V_n)^2,$$

что в соответствии с последним из (4.8) даст либо

$$N - V_n = 0,$$

либо

$$(N - V_n)^2 = \varkappa \frac{p}{\rho} = a^2. \qquad (4.9)$$

Первое из этих равенств отвечает случаю стационарного разрыва ($\theta = 0$). Второе равенство показывает, что скорость распространения нестационарной ($\theta \neq 0$) поверхности разрыва первых производных всегда равна

$$\pm a = \pm \sqrt{\frac{\varkappa p}{\rho}}.$$

Величина эта носит название скорости звука.

Мы говорили о скорости распространения поверхности слабого разрыва для производных первого порядка. Можно показать, что скорость θ распространения любого слабого разрыва (т. е. разрыва производных любого порядка) будет либо $\theta = 0$, либо $|\theta| = a$. Напротив, как мы вскоре увидим, скорость θ для сильного разрыва со скоростью звука никак не связана.

Покажем теперь, как слабый разрыв связан с характеристиками системы уравнений газовой динамики. Последняя есть система пяти уравнений в частных производных первого порядка по четырём независимым переменным, содержащих пять неизвестных функций. Известно, что к рассмотрению характеристик приводит задача Коши, каковая

в нашем случае формулируется следующим образом. На некоторой гиперповерхности S с уравнением

$$f(x,\ y,\ z,\ t)=0 \tag{4.10}$$

заданы значения всех функций: v_x, v_y, v_z, p, ρ. Требуется найти в области, окружающей S, непрерывные и однозначные функции $v_x, \ldots, \rho$, удовлетворяющие уравнениям (4.7) и обращающиеся на S в систему заданных значений. Напомним, что доказательство теорем существования однозначного решения задачи Коши находится в связи с возможностью определения на многообразии S значений всех производных от всех искомых функций. Чтобы лучше уяснить себе процесс определения этих производных применительно к нашей системе (4.7), сделаем замену независимых переменных, переходя от x, y, z, t к $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{t}$, так что

$$\bar{x}=x;\quad \bar{y}=y;\quad \bar{z}=f(x,\ y,\ z,\ t);\quad \bar{t}=t.$$

В этих новых переменных уравнение гиперповерхности S примет простой вид:

$$\bar{z}=0,$$

и если обозначить

$$v_x(x,\ y,\ z,\ t)=\bar{v}_x(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\ \bar{t});\ \ldots,$$

то, по условию задачи, нам будут даны функции:

$$\{v_x(x,\ y,\ z,\ t)\}_{f=0}=\bar{v}_x(\bar{x},\ \bar{y},\ 0,\ \bar{t});\ \ldots \tag{4.11}$$

С другой стороны, для любой функции α будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial x}&=\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial f}{\partial x}; & \frac{\partial\alpha}{\partial y}&=\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial\bar{y}}+\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial f}{\partial y},\\ \frac{\partial\alpha}{\partial z}&=\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial f}{\partial z}; & \frac{\partial\alpha}{\partial t}&=\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial\bar{t}}+\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

так что

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)_{f=0}=\left(\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial\bar{x}}\right)_{\bar{z}=0}+\left(\frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial\bar{z}}\right)_{\bar{z}=0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{z}=0};\ \ldots \tag{4.13}$$

Но если

$$(\alpha)_{f=0}=\bar{\alpha}(\bar{x},\ \bar{y},\ 0,\ \bar{t})$$

известно, то, так как $(\partial\bar{\alpha}(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\ \bar{t})/\partial\bar{x})_{\bar{z}=0}$ будет просто равно $\partial\bar{\alpha}(\bar{x},\ \bar{y},\ 0,\ \bar{t})/\partial\bar{x}$, производная $(\partial\bar{\alpha}/\partial\bar{x})_{\bar{z}=0}$ может считаться также известной; то же можно сказать и про $(\partial\bar{\alpha}/\partial\bar{y})_{\bar{z}=0}$ и $(\partial\bar{\alpha}/\partial\bar{t})_{\bar{z}=0}$. Таким образом, если бы нам удалось ещё найти $(\partial\bar{\alpha}/\partial\bar{z})_{\bar{z}=0}$, то мы, зная $(\alpha)_{f=0}$,

сумели бы по (4.13) рассчитать $(\partial\alpha/\partial x)_{\bar{z}=0}, \ldots$ У нас имеется пять функций: v_x, v_y, v_z, p, ρ, так что нам надо найти пять производных

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{z}}\right)_{\bar{z}=0}, \quad \left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{z}}\right)_{\bar{z}=0}, \quad \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}}\right)_{\bar{z}=0}, \quad \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}\right)_{\bar{z}=0}, \quad \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{z}}\right)_{\bar{z}=0}.$$

Чтобы найти их, обращаемся к пяти уравнениям (4.7) и записываем их в новых переменных, пользуясь (4.12). Имеем (мы выписываем лишь те члены, которые содержат дифференцирование по $\bar{z}$):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{z}}\left(\bar{v}_x\frac{\partial f}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial f}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}=\ldots\\
&\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{z}}\left(\bar{v}_x\frac{\partial f}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial f}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}=\ldots\\
&\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}}\left(\bar{v}_x\frac{\partial f}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial f}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}=\ldots\\
&\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{z}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{z}}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial f}{\partial z}+\\
&\qquad+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{z}}\left(\bar{v}_x\frac{\partial f}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial f}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}\right)=\ldots\\
&\left(\bar{v}_x\frac{\partial f}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial f}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}-\frac{\varkappa \bar{p}}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{z}}\right)=\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (4.14)$$

Пять наших производных можно найти из этой системы алгебраических уравнений лишь в том случае, если её определитель отличен от нуля. Определитель этот, если обозначить

$$\bar{v}_x\frac{\partial f}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial f}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}=A,$$

будет:

$$\begin{vmatrix}
A & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial f}{\partial x} & 0\\
0 & A & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial f}{\partial y} & 0\\
0 & 0 & A & \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial f}{\partial z} & 0\\
\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}}A\\
0 & 0 & 0 & A & -\frac{\varkappa \bar{p}}{\bar{\rho}}A
\end{vmatrix} = \frac{1}{\bar{\rho}}A^3\left\{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\varkappa \bar{p}}{\bar{\rho}}-A^2\right\}. \quad (4.15)$$

Если гиперповерхность (4.10) и заданные на ней функции v_x, v_y, ... таковы, что (4.15) обращается в нуль, система (4.14) может допускать лишь неопределённые решения. Чтобы эти решения оставались конечными, необходимо при этом потребовать обращения в нуль всех определителей, составленных путём последовательного введения правых частей (4.14) в столбцы определителя системы. В таком случае многообразие (4.10) называется *характеристическим многообразием* (характеристической гиперповерхностью) или просто характеристикой. Заметим, что при вычислении старших производных нам придётся иметь дело вновь только с определителем (4.15). Таким образом, если Σ в задаче Коши есть характеристическая поверхность, то, если и существует решение задачи Коши, оно может не быть единственным. Это значит, что могут найтись два различных решения, принимающих на Σ одни и те же значения, у которых, однако, уже первые производные на Σ различны; таким образом может оказаться, что с разных сторон от Σ движение представляется разными законами, а на самой Σ гидродинамические элементы обоих движений (но не их производные) совпадают. Но в таком случае мы назвали бы Σ перемещающейся поверхностью слабого разрыва. В самом деле, не представляет никакого труда убедиться, что условие равенства нулю (4.15) будет совпадать с одним из условий (4.9). Для этого стоит лишь ввести «скорость распространения» θ характеристики:

$$\theta = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\bar{v}_x\frac{\partial f}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial f}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

и заметить, что

$$A = -\theta\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Тогда равенство определителя (4.15) нулю будет означать, что

$$\theta^3\left(\theta^2-\frac{\varkappa\bar{p}}{\bar{\rho}}\right)=0, \tag{4.16}$$

и мы вернёмся к (4.9).

Мы видим, таким образом, что перемещающиеся поверхности слабого разрыва и характеристические многообразия системы (4.7) — это одно и то же.

Всегда ли можно говорить о характеристических многообразиях? Всегда ли они будут действительными? Отбрасывая случай, когда $\theta = 0$, мы должны иметь на характеристике

$$\theta^2 = (N - V_n)^2 = a^2$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v_x\frac{\partial f}{\partial x}+v_y\frac{\partial f}{\partial y}+v_z\frac{\partial f}{\partial z}=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\,a \tag{4.17}$$

(мы отбрасываем черту над гидродинамическими элементами), где a, как прежде, — скорость звука. В нестационарных случаях уравнение (4.17) позволит, очевидно, при любых v_x, v_y, v_z, a найти действительную функцию $f(x, y, z, t)$, и существование последней никаких ограничений на гидродинамические элементы, вообще говоря, не накладывает.

Предположим, однако, что мы имеем дело с установившимся движением. Естественно считать здесь, что и поверхность разрыва будет неподвижна в пространстве, т. е. что её скорость перемещения (но не скорость распространения) равна нулю:

$$N = 0 \quad \text{или} \quad \theta = -V_n. \tag{4.18}$$

Тогда на поверхности разрыва имеем

$$\frac{f_x v_x + f_y v_y + f_z v_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} = \pm a \tag{4.19}$$

$$\left(f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

или ещё

$$|V_n| = a. \tag{4.20}$$

Пусть теперь установившееся движение жидкости таково, что скорость везде меньше местной скорости звука:

$$|\boldsymbol{V}| < a.$$

В таком случае, какую бы поверхность Σ мы ни провели через некую точку M, всегда проекция V_n скорости жидкости $\boldsymbol{V}$ в M на нормаль n к поверхности Σ будет меньше, чем a, и равенство (4.20) нигде не будет иметь места. Напротив, если жидкость движется так, что

$$|\boldsymbol{V}| \geqslant a,$$

то найдутся поверхности Σ, проходящие через M, такие, что проекция V_n скорости $\boldsymbol{V}$ в M на нормаль к этим поверхностям будет в точности равна a. Отсюда вытекает весьма важное следствие. Если жидкость движется стационарно (установившееся движение) и притом повсюду с дозвуковой скоростью, то действительные характеристические многообразия существовать не могут. Напротив, если движение жидкости совершается со сверхзвуковыми скоростями, то всегда могут быть построены действительные характеристики. Мы видим, что переход через скорость звука играет в установившемся движении весьма существенную роль, меняя тип дифференциальных уравнений движения (эллиптический при дозвуковых скоростях на гиперболический при сверхзвуковых).

Наличие действительных характеристик при сверхзвуковых скоростях значительно облегчает решение задачи о движении. Здесь могут быть развиты эффективные графические методы решения, с каковыми мы и познакомимся в соответствующем месте.

Мы вернёмся сейчас к случаю существования сильных разрывов, чтобы доказать несколько общих теорем, сюда относящихся.

§ 5. Распространение сильных разрывов. Теорема Цемплена. Чтобы найти величину скорости распространения сильного разрыва, прибегнем сначала к соотношениям (2.15), (2.16). Умножая (2.15) скалярно на $\boldsymbol{n}$, получим:

$$\rho\theta\,[V_n] = [p], \tag{5.1}$$

и замечая, что вследствие формулы $\theta = N - V_n$

$$[V_n] = -\,[\theta], \tag{5.2}$$

напишем вместо (5.1)

$$\rho\theta\,(\theta_+ - \theta_-) = -\,(p_+ - p_-). \tag{5.3}$$

Но по (2.16)

$$\rho_+\theta_+ = \rho_-\theta_-, \tag{5.4}$$

поэтому мы можем написать (5.3) в виде

$$\rho_+\theta_+^2 - \rho_-\theta_-^2 = p_- - p_+ \quad \text{или} \quad \frac{\rho_+^2\theta_+^2}{\rho_+} - \frac{\rho_-^2\theta_-^2}{\rho_-} = p_- - p_+,$$

откуда по (5.4):

$$\rho_-^2\theta_-^2\left(\frac{\rho_- - \rho_+}{\rho_-\rho_+}\right) = p_- - p_+,$$

и мы можем найти θ_- из соотношения

$$\theta_-^2 = \frac{\rho_+}{\rho_-}\cdot\frac{p_+ - p_-}{\rho_+ - \rho_-} = \frac{\rho_+}{\rho_-}\frac{[p]}{[\rho]}. \tag{5.5}$$

Особенно явной станет разница между величиной скорости распространения слабого разрыва, всегда равной a, и выражением, получающимся из (5.5), если мы преобразуем (5.5), использовав для этого одно важное следствие соотношения (2.19). Заметив, что $T = p/R\rho$ и что $c_p - c_v = AR$, придадим сначала (2.19) вид

$$\frac{1}{2}\rho\theta\,[\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}] + \frac{\rho\theta}{\varkappa - 1}\left[\frac{p}{\rho}\right] = [pV_n]. \tag{5.6}$$

Умножим теперь обе части (2.15) скалярно на $\boldsymbol{V}_+ + \boldsymbol{V}_-$:

$$\rho\theta\,(\boldsymbol{V}_+ + \boldsymbol{V}_-)\cdot(\boldsymbol{V}_+ - \boldsymbol{V}_-) = \rho\theta\,[\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}] = [p]\,\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{V}_+ + \boldsymbol{V}_-)$$

и вставим $\rho\theta\,[\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}]$ в (5.6); получим:

$$\frac{[p]\,\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{V}_+ + \boldsymbol{V}_-)}{2} + \frac{\rho\theta}{\varkappa - 1}\left[\frac{p}{\rho}\right] = [pV_n]. \tag{5.7}$$

Раскроем знаки разрывов и перенесём все члены в одну сторону; получим:

$$p_+(V_{n+}+V_{n-})-2p_+V_{n+}-p_-(V_{n+}+V_{n-})+2p_-V_{n-}+$$
$$+\frac{2\rho\theta}{\varkappa-1}\left[\frac{p}{\rho}\right]=0,$$

или после сокращений:

$$-(p_++p_-)[V_n]+\frac{2\rho\theta}{\varkappa-1}\left[\frac{p}{\rho}\right]=0. \tag{5.8}$$

Но по (5.2) и (2.16) можно написать

$$[V_n]=-[\theta]=-\left[\frac{\theta\rho}{\rho}\right]=-\theta\rho\left[\frac{1}{\rho}\right],$$

и мы можем переписать (5.8):

$$\frac{p_++p_-}{2}\left[\frac{1}{\rho}\right]+\frac{1}{\varkappa-1}\left[\frac{p}{\rho}\right]=0. \tag{5.9}$$

Раскрывая, далее, знаки разрыва и отыскивая отношение p_+/p_-, мы придём к следующей важной формуле, заменяющей условие (2.19):

$$\frac{p_+}{p_-}=\frac{(\varkappa+1)\rho_+-(\varkappa-1)\rho_-}{(\varkappa+1)\rho_--(\varkappa-1)\rho_+}. \tag{5.10}$$

Пользуясь (5.10), преобразуем теперь выражение (5.5). Вычтем для этого из обеих частей (5.10) по единице:

$$\frac{p_+}{p_-}-1=\frac{[p]}{p_-}=\frac{(\varkappa+1)[\rho]+(\varkappa-1)[\rho]}{(\varkappa+1)\rho_--(\varkappa-1)\rho_+}=\frac{2\varkappa[\rho]}{(\varkappa+1)\rho_--(\varkappa-1)\rho_+}.$$

Следовательно,

$$\frac{[p]}{[\rho]}=\frac{2\varkappa p_-}{(\varkappa+1)\rho_--(\varkappa-1)\rho_+} \tag{5.11}$$

и по (5.5)

$$\theta_-^2=\varkappa\frac{p_-}{\rho_-}\frac{2\rho_+}{(\varkappa+1)\rho_--(\varkappa-1)\rho_+}. \tag{5.12}$$

Наряду с формулой (5.5) отметим выражение

$$\theta_+^2=\frac{\rho_-[p]}{\rho_+[\rho]}, \tag{5.13}$$

получающееся умножением (5.5) на ρ_-^2 и сравнением с $\rho_+^2\theta_+^2$, а также

$$\theta_+^2=\varkappa\frac{p_+}{\rho_+}\frac{2\rho_-}{(\varkappa+1)\rho_+-(\varkappa-1)\rho_-}, \tag{5.14}$$

получающееся из (2.16), (5.12) и (5.10).

Формулы (5.12) и (5.14) показывают, что скорость распространения сильного разрыва всегда отлична от местной скорости звука. В самом деле, по этим формулам равенство

$$\theta_+^2 : \frac{\varkappa p_+}{\rho_+} = 1$$

или равенство

$$\theta_-^2 : \frac{\varkappa p_-}{\rho_-} = 1$$

одинаково влекут за собой условие $\rho_+ = \rho_-$; но тогда по (5.10) $p_+ = p_-$, а по (2.15) $[V] = 0$, и нет никакого сильного разрыва.

Нетрудно далее убедиться, что если $|\theta_+| < a_+$, то $|\theta_-| > a_-$ и наоборот: если $|\theta_-| < a_-$, то $|\theta_+| > a_+$.

Если обратиться к стационарным движениям, для которых $N = 0$, т. е. $\theta = -V_n$, то мы получим очень важное следствие: скорость V_n по крайней мере с одной стороны от поверхности разрыва превосходит местную скорость звука. Значит, неподвижные поверхности сильного разрыва, так же как и неподвижные характеристики, могут существовать лишь при наличии сверхзвуковых скоростей.

Докажем ещё теорему Цемплена: *возможны лишь такие сильные разрывы, при которых*

$$[V_n] < 0.$$

Для доказательства этого положения приходится привлекать второй закон термодинамики, согласно которому энтропия при физических процессах не убывает. Энтропия S может быть представлена в виде

$$S = \frac{c_v}{A} \ln \frac{p}{\rho^\varkappa}, \tag{5.15}$$

и, таким образом, вопрос о возрастании энтропии эквивалентен вопросу о возрастании величины $p/\rho^\varkappa$. Итак, величина $p/\rho^\varkappa$ не убывает.

Пусть имеется у нас нестационарный сильный разрыв. Некая масса, находящаяся с одной стороны от разрыва, попадает затем на другую сторону. Могут представиться два случая: $\theta_+ < 0$ и $\theta_+ > 0$. Если $\theta_+ > 0$, то массы, лежавшие с положительной стороны поверхности разрыва, попадут на отрицательную, и энтропия положительной области заменится на энтропию области отрицательной; так как энтропия не убывает, будет

$$\frac{p_-}{\rho_-^\varkappa} \geqslant \frac{p_+}{\rho_+^\varkappa},$$

т. е.

$$\left[\frac{p}{\rho^\varkappa}\right] \leqslant 0.$$

Напротив, если $\theta_+ < 0$, то массы отрицательной области будут заменены массами положительной стороны, так что окажется

$$\left[\frac{p}{\rho^\varkappa}\right] \geqslant 0.$$

Покажем, что в обоих случаях будет $[V_n] < 0$. В самом деле, вследствие (5.10) можно написать:

$$\left[\frac{p}{\rho^\varkappa}\right] = \frac{p_+}{\rho_+^\varkappa} - \frac{p_-}{\rho_-^\varkappa} = \frac{p_-}{\rho_-^\varkappa}\left\{\frac{p_+}{p_-} - \left(\frac{\rho_+}{\rho_-}\right)^\varkappa\right\} =$$

$$= \frac{p_-}{\rho_+^\varkappa}\left\{\frac{(\varkappa+1)\frac{\rho_+}{\rho_-} - (\varkappa-1)}{\varkappa+1-(\varkappa-1)\frac{\rho_+}{\rho_-}} - \left(\frac{\rho_+}{\rho_-}\right)^\varkappa\right\}.$$

Нетрудно убедиться, что выражение, стоящее здесь в фигурных скобках, будет положительно при $\rho_+/\rho_- > 1$ и отрицательно при $\rho_+/\rho_- < 1$. Так как p и ρ положительны, заключаем, что если $[p/\rho^\varkappa] > 0$, то $[\rho] > 0$; если $[p/\rho^\varkappa] < 0$, то $[\rho] < 0$. Таким образом, если $\theta_+ > 0$, то $[\rho] < 0$, и если $\theta_+ < 0$, то $[\rho] > 0$, но

$$[V_n] = -[\theta] = \theta_- - \theta_+ = \frac{\rho_-\theta_-}{\rho_-} - \frac{\rho_+\theta_+}{\rho_+} = \rho_+\theta_+\frac{[\rho]}{\rho_+\rho_-}$$

и, значит, при $\theta_+ > 0$, $[\rho] < 0$ будет $[V_n] < 0$ и при $\theta_+ < 0$, $[\rho] > 0$ также $[V_n] < 0$. Теорема Цемплена доказана.

Б. УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

§ 6. Плоская задача. Функции ϑ и i_0. Рассмотрим стационарное движение газа, происходящее одинаково во всех плоскостях, параллельных плоскости (x, y), и притом так, что $v_z = 0$. Уравнения Эйлера представим в форме Лэмба:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{v^2}{2} + v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \tag{6.1}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{v^2}{2} - v_x\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \tag{6.2}$$

Уравнение неразрывности даёт

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} = 0, \tag{6.3}$$

а условие адиабатичности:

$$v_x \frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\rho^\varkappa} + v_y \frac{\partial}{\partial y}\frac{p}{\rho^\varkappa} = 0. \tag{6.4}$$

Уравнение (6.3) позволяет заключить о существовании функции тока $\psi(x, y)$ такой, что

$$\rho v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{6.5}$$

С другой стороны, вдоль линии тока имеем:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y};$$

вставляя в это равенство v_x и v_y из (6.5), получим без труда

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0,$$

так что уравнения

$$\psi(x, y) = \text{const.}$$

суть уравнения линий тока (последние, вследствие стационарности, совпадают с траекториями жидких частиц и остаются во время всего движения неизменными).

Умножая первое из (6.5) на v_y, второе на v_x и вычитая, получим:

$$v_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \tag{6.6}$$

Но если $v \neq 0$, соотношения (6.4) и (6.6) заставляют нас считать, что

$$\frac{D\left(\frac{p}{\rho^\varkappa}, \psi\right)}{D(x, y)} = 0.$$

Отсюда заключаем, что

$$\frac{p}{\rho^\varkappa} = \vartheta^\varkappa(\psi), \tag{6.7}$$

где

$$\vartheta = \vartheta(\psi)$$

зависит от ψ.

Легко выразить ϑ через энтропию S. В самом деле, по (5.15) предыдущего раздела имеем:

$$S = \frac{c_v}{A}\ln\left(\vartheta^\varkappa\right) = \frac{c_p}{A}\ln\vartheta\ ^{1}). \tag{6.8}$$

---

[1]) Кроме того, ϑ есть, с точностью до постоянного множителя, потенциальная температура. Под последней разумеется та температура τ, которая получится, если газ адиабатически привести к нормальному давлению P_0. Это будет

$$\tau = \frac{P_0}{RP_0^{1/\varkappa}}\vartheta = \text{const.}\,\vartheta.$$

Умножим теперь (6.1) на v_x, а (6.2) на v_y и сложим полученные уравнения, заменив предварительно ρ по формуле (6.7). Так как

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \vartheta p^{-\frac{1}{\varkappa}}\nabla p = \frac{\vartheta\varkappa}{\varkappa-1}\nabla p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left\{\nabla\left(\vartheta p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) - p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\nabla\vartheta\right\}$$

и так как вследствие (6.7) и (6.6)

$$v_x\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + v_y\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0,$$

мы получим после простых преобразований:

$$v_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\vartheta + \frac{v^2}{2}\right) + v_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\vartheta + \frac{v^2}{2}\right) = 0.$$

Это означает, что вследствие (6.6)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\vartheta p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = i_0(\psi), \tag{6.9}$$

где i_0 — функция одного только ψ.

Чтобы уяснить физический смысл i_0, заметим, что $v^2/2$ есть кинетическая энергия единицы массы, а

$$\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\vartheta p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\rho} = \frac{c_p}{c_p-c_v}RT = \frac{c_p}{A}T$$

есть «теплосодержание» (принято обозначение $c_pT/A = i$)[1]; таким образом, i_0 есть теплосодержание при отсутствии скорости ($v=0$). Величина i_0 определяется, коль скоро известна температура T_0 той точки, в которой скорость равна нулю $\left(i_0 = \frac{c_p}{A}T_0\right)$.

Уравнение (6.9) представляет собою не что иное, как уравнение Бернулли.

Из уравнений (6.1) и (6.2) мы получили одно лишь соотношение (6.9). Второе соотношение позволит нам выразить вихрь и показать, что если ϑ и i_0 будут постоянными величинами (не зависящими от ψ), то движение будет безвихревым, и обратно — если движение безвихревое, то, вообще говоря, ϑ и i_0 постоянны. В самом

[1]) Величина i может быть определена как сумма внутренней энергии и отношения p/ρ:

$$i = \frac{1}{A}U + \frac{p}{\rho} = \frac{c_vT}{A} + \frac{p}{\rho} = \frac{c_v + AR_T}{A} = \frac{c_pT}{A}.$$

Кроме термина теплосодержание для обозначения i употребляются ещё названия: тепловая функция единицы массы и энтальпия.

деле, возьмём, например, (6.2) и вставим в него v^2 из уравнения Бернулли. Произведя сокращение, получим:

$$\Omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{v_x}\left(\frac{\partial i_0}{\partial y} - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)$$

или, так как ϑ и i_0 зависят от y через посредство ψ:

$$\Omega = -\frac{1}{v_x}\left(\frac{di_0}{d\psi} - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \frac{d\vartheta}{d\psi}\right)\frac{\partial \psi}{\partial y}; \tag{6.10}$$

наконец, вследствие (6.5) можем написать:

$$\Omega = -\rho\left(\frac{di_0}{d\psi} - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \frac{d\vartheta}{d\psi}\right). \tag{6.11}$$

формула (6.11) показывает, что если ϑ и i_0 постоянны, то $\Omega = 0$. Обратно, пусть $\Omega = 0$. Тогда по (6.11)

$$\frac{di_0}{d\psi} - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \frac{d\vartheta}{d\psi} = 0, \tag{6.12}$$

и если $d\vartheta/d\psi \neq 0$, то p, а значит, по (6.9) и v, будут функциями одного ψ:

$$p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{di_0}{d\psi} \Big| \frac{d\vartheta}{d\psi}. \tag{6.13}$$

Случай этот не представляет интереса; ему отвечают движения с линиями тока — либо концентрическими кругами, либо параллельными прямыми (см. ниже § 15). Таким образом, вообще говоря, если $\Omega = 0$, то должно быть

$$\frac{d\vartheta}{d\psi} = 0,$$

а по (6.12) и

$$\frac{di_0}{d\psi} = 0.$$

Заметим, что может оказаться, что $di_0/d\psi \neq 0$ а $d\vartheta/d\psi = 0$ или же $di_0/d\psi = 0$, а $d\vartheta/d\psi \neq 0$; при этом, разумеется, $\Omega \neq 0$. Мы увидим, что случай постоянного i_0 и переменной энтропии ϑ представляет для газовой динамики наибольший интерес.

§ 7. Поверхности разрыва в плоской задаче. Покажем прежде всего, что в плоской стационарной задаче i_0 не претерпевает скачка при переходе через поверхность сильного разрыва. Для этого обратимся к уравнению (5.6) и перепишем его, заметив, что, вследствие стационарности, $V_n = -\theta$, так:

$$\rho\theta\left\{\frac{1}{2}[v^2] + \frac{1}{\varkappa - 1}\left[\frac{p}{\rho}\right]\right\} = -[p\theta]$$

или, что очевидно,

$$\rho\theta\left[\frac{v^2}{2}+\frac{1}{\varkappa-1}\frac{p}{\rho}\right]=-\left[\frac{p}{\rho}\rho\theta\right]=-\rho\theta\left[\frac{p}{\rho}\right],$$

откуда, перенося всё влево и собирая члены под знаками разрыва

$$\rho\theta\left[\frac{v^2}{2}+\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\rho}\right]=0,$$

а это и означает, что если $\theta\neq 0$, то вследствие (6.9) и (6.7)

$$[i_0]=0. \tag{7.1}$$

В приложениях газовой динамики речь идёт обычно о незавихренных потоках газа, обтекающих какое-либо препятствие (крыло, например) или вытекающих из отверстия (сопло и т. п.). Так как в незавихренном потоке $i_0=\text{const}$. и так как по (7.1) даже наличие сильного разрыва не изменяет величины i_0, то, оставляя в стороне влияние пограничного слоя, мы можем считать в практически важных и интересных случаях просто

$$i_0=\text{const}.$$

Обратимся ко второй величине, характеризующей завихренность потока,— ϑ. Покажем, что если в набегающем потоке и было $\vartheta=\text{const}$., то после прохождения потока сквозь поверхность сильного разрыва обязательно, вообще говоря, станет $d\vartheta/d\psi\neq 0$, т. е. если поток до прохождения скачка уплотнения и был потенциальным, то после он становится вихревым. Для доказательства обратимся к формуле (5.10) и умножим обе её части на $(\rho_-/\rho_+)^{\varkappa}$. Можем написать тогда:

$$\frac{p_+}{\rho_+^{\varkappa}}\frac{\rho_-^{\varkappa}}{p_-}=\left(\frac{\rho_-}{\rho_+}\right)^{\varkappa}\frac{\varkappa+1-(\varkappa-1)\dfrac{\rho_-}{\rho_+}}{(\varkappa+1)\dfrac{\rho_-}{\rho_+}-(\varkappa-1)},$$

или, по определению ϑ из (6.7):

$$\left(\frac{\vartheta_+}{\vartheta_-}\right)^{\varkappa}=\left(\frac{\rho_-}{\rho_+}\right)^{\varkappa}\frac{\varkappa+1-(\varkappa-1)\dfrac{\rho_-}{\rho_+}}{(\varkappa+1)\dfrac{\rho_-}{\rho_+}-(\varkappa-1)}. \tag{7.2}$$

Формула (7.2) показывает, что $\vartheta_-/\vartheta_-=1$, т. е. $[\vartheta]=0$, лишь в том случае, когда $\rho_-/\rho_+=1$, т. е. $[\rho]=0$, т. е. когда скачка уплотнения просто нет. Как мы увидим дальше, $[\rho]$ будет, вообще говоря, различен в разных точках поверхности разрыва, но тогда и $[\vartheta]$ будет меняться от одной линии тока к другой, так что если ϑ «слева» от поверхности разрыва и было постоянно, то, претерпев в разных

точках этой поверхности разные скачки, оно станет функцией от ψ. Движение, бывшее перед скачком уплотнения безвихревым, станет затем, вообще говоря, вихревым.

Восемь гидродинамических элементов: p_+, ρ_+, v_{x+}, v_{y+}, p_-, ρ_-, v_{x-}, v_{y-} — связаны вдоль поверхности разрыва четырьмя соотношениями [формулы (2.12), (2.13) и (5.10)]:

$$\rho\theta\,[v_x] = [p]\cos(n,\ x), \tag{7.3}$$

$$\rho\theta\,[v_y] = [p]\cos(n,\ y), \tag{7.4}$$

$$[\rho\theta] = 0, \tag{7.5}$$

$$\frac{p_+}{p_-} = \frac{(\varkappa+1)\rho_+ - (\varkappa-1)\rho_-}{(\varkappa+1)\rho_- - (\varkappa-1)\rho_+}, \tag{7.6}$$

содержащими, кроме упомянутых элементов, ещё девятую величину — угол между нормалью n к поверхности разрыва и осью Ox или Oy. θ, вследствие стационарности движения, выражается через V_n:

$$\theta = -V_n. \tag{7.7}$$

Таким образом, мы можем, зная все гидродинамические элементы с одной стороны от поверхности разрыва, найти связи между любой парой элементов по другую сторону от поверхности или между каким-либо из этих элементов и углом наклона поверхности. Наибольший интерес представляет установление соотношения между обеими компонентами скоростей, а также выражение плотности через угол наклона поверхности разрыва.

Рассмотрим произвольную точку M поверхности разрыва. Пусть нам известны величины p_-, ρ_-, v_{x-}, v_{y-}. Повернём ось Ox так, чтобы она пошла параллельно направлению скорости V_- в точке M, и обозначим

$$v_{x-} = v_1,\quad p_- = p_1,\quad \rho_- = \rho_1;\quad v_{x+} = v_x,\quad v_{y+} = v_y,\quad p_+ = p;\quad \rho_+ = \rho.$$

Пусть ещё угол наклона $(n,\ x)$ нормали n в точке M поверхности разрыва будет φ. Тогда, так как $v_{y-} = 0$, имеем прежде всего

$$-\theta_+ = V_{n+} = v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi, \tag{7.8}$$

$$-\theta_- = V_{n-} = v_1\cos\varphi, \tag{7.9}$$

а используя (5.12), получим:

$$v_1^2\cos^2\varphi = \varkappa\frac{p_1}{\rho_1}\frac{2\rho}{(\varkappa+1)\rho_1 - (\varkappa-1)\rho},$$

откуда без всякого труда найдём ρ/ρ_1 через $\operatorname{tg}\varphi$:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1+2\dfrac{a_1^2}{v_1^2}(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}, \tag{7.10}$$

где, как всегда, буквой a обозначена скорость звука

$$a_1^2 = \varkappa \frac{p_1}{\rho_1}.$$

Формула (7.10) показывает, что если φ меняется от точки к точке вдоль поверхности разрыва, то ρ/ρ_1 будет разным в разных точках поверхности, и по (7.2), если даже и было $\vartheta_1 = \text{const}$., то ϑ станет в разных точках разное, и возникнут вихри. Так, например, если V_- сохраняет всюду постоянное направление, то при кривой линии разрыва вихри образуются неизбежно; лишь если поверхность разрыва есть плоскость, движение останется безвихревым.

Чтобы найти зависимость между v_x и v_y, разделим сперва (7.4) на (7.3); получим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x - v_1}. \tag{7.11}$$

С другой стороны, по (7.3), после сокращения на $\cos(n, x) = \cos\varphi$,

$$-\rho_1 v_1 (v_x - v_1) = p - p_1, \tag{7.12}$$

а вследствие (7.6)

$$p - p_1 = 2\varkappa p_1 \frac{\frac{\rho}{\rho_1} - 1}{\varkappa + 1 - (\varkappa - 1)\frac{\rho}{\rho_1}}. \tag{7.13}$$

Сравнивая два выражения для $p - p_1$ ((7.12) и (7.13)), вставляя вместо ρ/ρ_1 правую часть (7.10) и заменяя $\operatorname{tg}\varphi$ через посредство (7.11), приходим после простых преобразований к следующей формуле, связывающей v_x и v_y:

$$v_y^2 = (v_1 - v_x)^2 \frac{\frac{2}{\varkappa+1}\left(v_1 - \frac{a_1^2}{v_1}\right) - (v_1 - v_x)}{v_1 - v_x + \frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_1^2}{v_1}}. \tag{7.14}$$

Остановимся на формулах (7.10) и (7.14).

Формула (7.10) выражает ρ/ρ_1 через φ. Представляют интерес также формулы, выражающие через φ отношение p/p_1, а также величины v_x и v_y. Внося (7.10) в (7.6), получим после элементарных преобразований

$$\frac{p}{p_1} = \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\frac{v_1^2}{a_1^2}\cos^2\varphi - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}. \tag{7.15}$$

Вставляя это отношение в формулу (7.12), получим:

$$v_x = v_1\left(1 + \frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_1^2}{v_1^2} - \frac{2}{\varkappa+1}\cos^2\varphi\right). \tag{7.16}$$

Наконец, внося v_x из (7.16) в (7.11) и решая полученное уравнение относительно v_y, получим:

$$v_y = \frac{2}{\varkappa+1} v_1 \operatorname{tg}\varphi \left(\frac{a_1^2}{v_1^2} - \cos^2\varphi \right). \tag{7.17}$$

Формула (7.14) имеет многочисленные приложения.

В плоскости (v_x, v_y) при данных значениях a_1 и v_1 уравнение (7.14) представляет кривую, симметричную относительно оси v_x, пересекающую её в точках

$$v_x = v_1, \quad v_y = 0$$

(двойная точка) и

$$v_x = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} v_1 + \frac{2}{\varkappa+1} \frac{a_1^2}{v_1}, \quad v_y = 0$$

и имеющую в качестве асимптоты прямую (рис. 4)

$$v_x = v_1 + \frac{2}{\varkappa+1} \frac{a_1^2}{v_1}.$$

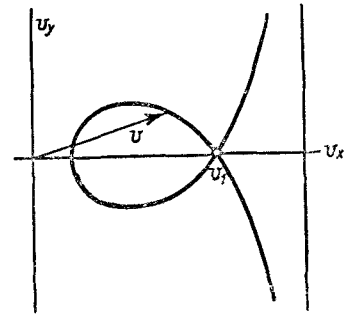

Рис. 4.

Эта кривая может быть получена путём инверсии гиперболы в её вершине и называется *гипоциссоидой* (обычная циссоида Диоклеса может быть получена путём инверсии параболы в её вершине). Если скорость в точке M_- отрицательной области имеет величину v_1 (при этом скорость звука a_1 получится, если i_0 известно, из уравнения Бернулли), то конец вектора $\boldsymbol{V}_+$ скорости в точке M_+ будет лежать где-то на упомянутой гипоциссоиде. Если бы нам было известно направление $\boldsymbol{V}_+$, мы могли бы, воспользовавшись гипоциссоидой, найти и величину вектора $\boldsymbol{V}_-$; совершенно аналогично, зная величину $\boldsymbol{V}_+$, мы нашли бы без труда и направление (вернее, абсолютную величину угла, составляемого вектором $\boldsymbol{V}_+$ с направлением v_1).

Наконец, при помощи нашей гипоциссоиды можно найти направление поверхности разрыва в точке M, если известно направление скорости после прохождения поверхности разрыва. В самом деле, так как вследствие (7.3) и (7.4)

$$[v_x]\cos(\tau, x) + [v_y]\cos(\tau, y) = 0$$

(τ — касательная к линии разрыва в плоскости x, y), то, если обозначить через V_τ проекцию скорости на касательную к линии разрыва, — будет $[V_\tau] = 0$. Отсюда следует, что направление поверхности разрыва должно быть таково, что если на него спроектировать скорость до и после разрыва, то эти две проекции будут одинаковы

($V_{\tau+} = V_{\tau-}$). Имея гипоциссоиду (рис. 5) и зная направление ON, а значит, и величину $\overline{ON}$ скорости $\boldsymbol{V}_+$ после прохождения разрыва, соединим двойную точку P гипоциссоиды ($\overline{OP} = V_-$) с точкой N и опустим на продолжение прямой $\overline{PN}$ перпендикуляр из точки O до пересечения с $\overline{PN}$ в точке Q. Очевидно теперь, что направление OQ таково, что проекции на него $\boldsymbol{V}_+$ и $\boldsymbol{V}_-$ одинаковы. Нам остаётся только перенести это направление на плоскость (x, y), чтобы получить нужное направление кривой разрыва.

Заметим, что всякий луч, выходящий из точки O, пересечёт гипоциссоиду, вообще говоря, в трёх точках (рис. 5). Однако, в силу теоремы Цемплена, точки N', расположенные на уходящих в бесконечность ветвях гипоциссоиды, рассматривать не следует. В самом деле, желая получить при помощи точки N' направление касательной к поверхности разрыва, мы должны опустить перпендикуляр OQ', но тогда $Q'N'$ есть нормаль к этой поверхности и

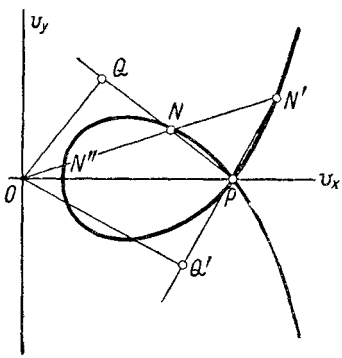

Рис. 5.

$$\overline{Q'P} = V_{n-}, \quad \overline{Q'N'} = V_{n+},$$

так что, вопреки теореме Цемплена (§ 5), имеем:

$$V_{n+} > V_{n-}.$$

Точки N и N'' обе допустимы с точки зрения теоремы Цемплена.

Ветвь гипоциссоиды, содержащая точки типа N', также может быть использована. Для этого достаточно поменять местами знаки плюс и минус при выводе формулы (7.14), положив $\overline{OP} = \boldsymbol{V}_+$, а векторы типа $\overline{ON'}$ принять за $\boldsymbol{V}_-$. Теперь гипоциссоида будет совокупностью точек, изображающих концы векторов тех скоростей, которые *после* прохождения разрыва могут совпасть с $\overline{OP}$. При таком толковании гипоциссоиды точки типа N не могут быть допущены по теореме Цемплена.

Сказанным здесь относительно сильных разрывов мы пока ограничимся; мы вернёмся к ним уже непосредственно в приложениях к конкретным случаям движений.

§ 8. Критическая скорость. Трубки тока в сжимаемой жидкости. Мы знаем из предыдущих параграфов, а также из недавнего рассмотрения разрывов, как важно отличать случаи, когда движение происходит со скоростью меньшей, чем скорость звука, от случаев сверхзвуковых скоростей. Введём теперь важное понятие «крити-

ческой скорости». Напишем для этого уравнение Бернулли (6.9) в виде:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\varkappa - 1} = i_0 \tag{8.1}$$

(здесь и в дальнейшем мы считаем, на основании сказанного в начале предыдущего пункта, что $i_0 = \text{const}$.) и предположим, что в некоторой точке M скорость движения v оказалась в точности равной существующей в этой точке скорости a распространения звука:

$$v = a. \tag{8.2}$$

Соотношения (8.1), (8.2) представляют собой систему алгебраических уравнений, из которой мы можем определить непосредственно в числах величину скорости v в точке M. Это будет v_*:

$$v_* = \sqrt{2\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} i_0}. \tag{8.3}$$

Скорость эта и носит название «критической скорости». Соответственно этому имеем и критическую скорость звука a_*:

$$a_* = v_* = \sqrt{2\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} i_0}. \tag{8.4}$$

Мы видим, что величина v_* не зависит от рода движения и положения точки. Для всех движений, обладающих одним и тем же i_0, будем иметь всегда одно и то же v_*. Нетрудно убедиться, вследствие (8.1), что если в какой-то точке оказалось $v > a_*$, то будет также и $v > a$ (скорость газа будет больше местной скорости звука), и если $v < a_*$, то будет также и $v < a$. Обратно — наличие неравенств $v \lessgtr a$ повлечёт за собой, соответственно, наличие неравенств $v \lessgtr a_*$ [1]).

Привлекая ещё скорость звука a_0 в тех точках, где скорость газа $v = 0$,

$$\frac{a_0^2}{\varkappa - 1} = i_0, \tag{8.5}$$

мы можем дать для a_* выражение

$$a_* = \sqrt{\frac{2}{\varkappa + 1}}\, a_0 \approx 0{,}9119 a_0 \tag{8.6}$$

при $\varkappa = 1{,}405$. Таким образом, критическая скорость всегда меньше той скорости звука, которая возникает в покоящемся газе, обладающем данным значением i_0.

Уравнение Бернулли, если выразить в нём i_0 через посредство a_*, примет вид:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\varkappa - 1} = \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}\frac{a_*^2}{2}. \tag{8.7}$$

[1]) Это можно непосредственно установить из (8.9) (см. ниже).

Формула (8.1) показывает, что максимальное возможное значение v получится, когда второе слагаемое левой части обращается в нуль, т. е. это будет

$$v_{\max} = \sqrt{2i_0}.$$

По (8.7) мы можем написать

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\, a_* \approx 2{,}437 a_*. \tag{8.8}$$

Дальнейшее увеличение скорости газа привело бы к отрицательным давлениям и к явлениям кавитации. Таким образом, величина v/a_* заключается всегда в сравнительно тесных пределах:

$$0 \leqslant \frac{v}{a_*} \leqslant \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}.$$

При расчётах удобно пользоваться безразмерными скоростями v_x/a_*, v_y/a_*. Отношение $\mathsf{M} = v/a$ называется *числом Маха*.

Деля (8.7) на v^2, мы можем затем найти связь между v/a и v/a_* в виде:

$$\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{2}{\varkappa-1}\left(\frac{v}{a_*}\right)^2 \frac{1}{\dfrac{\varkappa+1}{\varkappa-1} - \left(\dfrac{v}{a_*}\right)^2}. \tag{8.9}$$

Видим, что число M может изменяться в пределах от 0 до ∞. Отметим ещё три употребительные формы уравнения Бернулли. Введём $p_0(\psi)$ — давление, которое возникло бы в некоторой точке линии тока $\psi = \text{const}$, если бы в этой точке скорость обратилась в нуль. Очевидно, что вследствие (6.9) и (8.6)

$$\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\,\vartheta p_0^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = a_*^2,$$

так что

$$a^2 = \varkappa\frac{p}{\rho} = \varkappa\vartheta p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \frac{\varkappa+1}{2}\, a_*^2.$$

Заменяя a^2 в уравнении (8.7) этим значением, получим

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 1 - \frac{v^2}{\dfrac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\, a_*^2}. \tag{8.10}$$

Аналогичным образом, вводя $\rho_0(\psi)$ (плотность при $v = 0$) и имея в виду, что

$$\varkappa\vartheta p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = a^2 = \varkappa\vartheta^{\varkappa} p^{\varkappa-1} \quad \text{и} \quad \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\,\vartheta^{\varkappa}\rho_0^{\varkappa-1} = a_*^2,$$

мы получим

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\varkappa-1} = 1 - \frac{v^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}. \tag{8.11}$$

Наконец, вводя температуру T_0 при $v=0$ и замечая, что

$$a^2 = \frac{\varkappa p}{\rho} = \varkappa RT \quad \text{и} \quad \frac{\varkappa RT_0}{\varkappa-1} = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\frac{a_*^2}{2},$$

можем написать

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{v^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}. \tag{8.12}$$

Величина T_0 зависит лишь от a_* и поэтому не зависит от ψ; напротив, p_0 и ρ_0 будут постоянны лишь в случае безвихревого движения; так как p_0 и ρ_0 просто связаны с ϑ, то легко найти скачки этих величин при переходе через поверхность разрыва. Очевидно, будем иметь

$$\frac{p_{0+}}{p_{0-}} = \left(\frac{\vartheta_-}{\vartheta_+}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \quad \text{и} \quad \frac{\rho_{0+}}{\rho_{0-}} = \left(\frac{\vartheta_-}{\vartheta_+}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}},$$

причём ϑ_-/ϑ_+ можно найти по (7.2) и (7.10) через наклон поверхности разрыва.

Формула (8.11) позволяет доказать очень важную теорему, относящуюся к трубкам тока в стационарном движении сжимаемой жидкости. Рассмотрим бесконечно тонкую трубку тока, и пусть скорость в элементарном сечении её Δf_1 (ортогональном к линии тока) будет v_1, а плотность ρ_1; пусть какое-либо другое сечение Δf_2 характеризуется скоростью v_2 и плотностью ρ_2. Так как масса между этими двумя сечениями исчезнуть не может, мы должны написать

$$\Delta f_1 \rho_1 v_1 = \Delta f_2 \rho_2 v_2.$$

Таким образом, площадь Δf любого ортогонального сечения нашей трубки будет

$$\Delta f = \frac{\text{const.}}{\rho v}.$$

В несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const.}$) площадь, таким образом, обратно пропорциональна скорости (чем больше скорости, тем у́же трубки тока, и наоборот). Для сжимаемой жидкости мы можем, пользуясь (8.11), написать:

$$\Delta f = \frac{\text{const.}}{\left(1 - \frac{v^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} v}.$$

Постоянная, стоящая справа, сохраняет своё значение вдоль всей трубки. Но такая функция будет иметь минимум, и притом единственный, при $v = a_*$. В самом деле:

$$\frac{d\Delta f}{dv} = \frac{\text{const.}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{\dfrac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}+1} \cdot v^2} \left\{1 - \frac{v^2}{\dfrac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2} - \frac{2v^2}{(\varkappa+1)a_*^2}\right\}$$

и $(d\Delta f/dv)_{v=a_*} = 0$, а, как легко видеть, $(d^2\Delta f/dv^2)_{v=a_*} > 0$. Мы получаем следующий замечательный результат: при дозвуковых скоростях, так же как и в несжимаемой жидкости, трубки тока будут тем уже, чем больше скорости; наоборот, при сверхзвуковых скоростях трубки тока будут тем шире, чем больше скорости.

§ 9. Плоские вихревые движения со сверхзвуковыми скоростями. Характеристики. Угол Маха. Продолжим изучение дифференциальных уравнений движения, предполагая, что $i_0 = \text{const}$. Мы имеем два конечных соотношения: уравнение Бернулли

$$\frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{\varkappa\vartheta(\psi)\, p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{\varkappa-1} = \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\varkappa-1} = i_0$$

и условие адиабатичности:

$$p = \vartheta^{\varkappa}(\psi)\rho^{\varkappa},$$

и два соотношения дифференциальных: выражение для вихря

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\varkappa p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{\varkappa-1}\rho\frac{d\vartheta}{d\psi} \tag{9.1}$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} = 0.$$

Исключим из уравнения неразрывности плотность. Заметим, что по определению ϑ и a:

$$\varkappa\frac{p}{\rho} = a^2 = \varkappa\vartheta^{\varkappa}\rho^{\varkappa-1}.$$

Можно теперь написать уравнение неразрывности, введя $\ln\rho$, в виде

$$\frac{\partial \ln\rho}{\partial x}v_x + \frac{\partial \ln\rho}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

а потом, выражая ρ через ϑ и a^2 и замечая, что

$$v_x\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + v_y\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0$$

(см. (6.4) и (6.7)), привести после простых преобразований к форме:

$$a^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+\frac{1}{\varkappa-1}\left(v_x\frac{\partial a^2}{\partial x}+v_y\frac{\partial a^2}{\partial y}\right)=0.$$

Выражая далее a^2 по формуле Бернулли через v^2 и собирая члены при различных производных, получим:

$$\left(a^2-v_x^2\right)\frac{\partial v_x}{\partial x}-v_xv_y\frac{\partial v_x}{\partial y}-v_xv_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+\left(a^2-v_y^2\right)\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \quad (9.2)$$

Отметим, что (9.2) имеет один и тот же вид как для вихревого, так и для безвихревого движения. В самом деле, заменив в (9.2) a^2 по формуле (8.7), приведём (9.2) к виду:

$$\left[(\varkappa+1)\left(a_*^2-v_x^2\right)-(\varkappa-1)\,v_y^2\right]\frac{\partial v_x}{\partial x}-2v_xv_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+$$
$$+\left[(\varkappa+1)\left(a_*^2-v_y^2\right)-(\varkappa-1)\,v_x^2\right]\frac{\partial v_y}{\partial y}=0, \quad (9.3)$$

так что ϑ совершенно выпадает из уравнения (в (9.2) ϑ могло входить через a). Уравнение (9.1), напротив, указывает на наличие вихря ($d\vartheta/d\psi\neq 0$).

В большинстве задач газовой динамики функцию ϑ приходится рассматривать как известную функцию от ψ. Если линии тока уходят на бесконечность (например, в случае обтекания контура безграничным потоком), задание $\vartheta(\psi)$ входит как своеобразное условие на бесконечности. Если мы имеем стационарное движение, в котором вихрь на бесконечности равен нулю, в таком потоке везде будет $\vartheta=\text{const}$., если на пути несущихся в этом движении жидких частиц не встречается поверхность сильного разрыва. Если же частицы проходят сквозь поверхность сильного разрыва, то ϑ в них изменится скачком, причём, как мы видели, скачок этот будет, вообще говоря, для разных точек разным. Это и заставляет нас в общей теории брать уравнение (9.1) с правой частью, отличной от нуля.

Введём обозначение

$$\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\rho\frac{d\vartheta}{d\psi}=\Omega, \quad (9.4)$$

тогда (9.1) напишется в виде

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=\Omega. \quad (9.5)$$

Нам надо научиться решать совместно дифференциальные уравнения (9.3), (9.5). В них входят две неизвестные скорости v_x и v_y и, кроме того, неизвестная функция ψ.

Функция ψ входит, однако, только в (9.5), и притом не под знаками дифференциалов. Для определения ψ необходимо ещё прибавить

одно из двух соотношений [см. (6.5)] [1]):

$$v_x = \varkappa^{\frac{1}{\varkappa-1}} \vartheta^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} (a^2)^{-\frac{1}{\varkappa-1}} \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\varkappa^{\frac{1}{\varkappa-1}} \vartheta^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} (a^2)^{-\frac{1}{\varkappa-1}} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (9.6)$$

Мы начнём с теории наиболее простого случая. Именно, предположим, что движение таково, что скорость во всех точках плоскости (x, y) превышает скорость звука, т. е. во всех точках плоскости $v > a_*$. Наличие действительных характеристик позволяет здесь развить эффективные методы решения системы (9.2), (9.5).

Чтобы построить характеристики, которые в случае плоской стационарной задачи будут, очевидно, линиями пересечения с плоскостью (x, y) цилиндрических поверхностей, предположим, что некоторая кривая L с уравнением

$$y = y(x)$$

есть характеристика для данного движения. Обозначая производную по x, взятую вдоль линии L, через $\frac{d}{dx} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ и прибавляя к системе (9.2), (9.5) соотношения, выполняющиеся вдоль L:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{dv_x}{dx}, \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{dv_y}{dx}, \quad (9.8)$$

напишем условие того, что L есть характеристика [т. е. условие невозможности однозначного определения четырёх производных $\partial v_x/\partial x$, $\partial v_x/\partial y$, $\partial v_y/\partial x$, $\partial v_y/\partial y$ из нашей системы четырёх уравнений (9.2), (9.5), (9.7) и (9.8)]. Выражая $\partial v_x/\partial x$ и $\partial v_y/\partial x$ из (9.7) и (9.8) и вставляя их в (9.2), (9.5), получим:

$$\left[y'\left(a^2 - v_x^2\right) + v_x v_y\right]\frac{\partial v_x}{\partial y} - \left[y' v_x v_y + a^2 - v_y^2\right]\frac{\partial v_y}{\partial y} =$$

$$= \left(a^2 - v_x^2\right)\frac{dv_x}{dx} - v_x v_y \frac{dv_y}{dx},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} + y'\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{dv_y}{dx} - \Omega,$$

где $y' = \frac{dy}{dx}$. Следовательно, вдоль L должно быть

$$\begin{vmatrix} y'\left(a^2 - v_x^2\right) + v_x v_y & -y' v_x v_y - a^2 + v_y^2 \\ 1 & y' \end{vmatrix} = 0 \quad (9.9)$$

[1]) Каждое из этих двух соотношений есть следствие другого, что вытекает из (9.2).

и

$$\begin{vmatrix} y'(a^2-v_x^2)+v_xv_y(a^2-v_x^2) & \dfrac{dv_x}{dx}-v_xv_y\dfrac{dv_y}{dx} \\ 1 & \dfrac{dv_y}{dx}-\Omega \end{vmatrix}=0\ *). \quad (9.10)$$

Обращаясь сперва к (9.9), получим, раскрывая определитель, следующее соотношение, связывающее y', v_x и v_y:

$$y'^2(v_x^2-a^2)-2v_xv_yy'+v_y^2-a^2=0. \quad (9.11)$$

Заметим попутно, что это соотношение было уже получено нами в другом виде в общей теории слабых разрывов. В самом деле, мы видели, что проекция V_n скорости газа на нормаль n к характеристической поверхности должна равняться местной скорости звука

$$|V_n|=a.$$

В нашем случае

$$V_n=v_x\cos(n,\ x)+v_y\cos(n,\ y)=-\frac{v_xy'}{\sqrt{1+y'^2}}+\frac{v_y}{\sqrt{1+y'^2}},$$

и потому условие $V_n^2=a^2$ примет вид:

$$(v_y-v_xy')^2=a^2(1+y'^2),$$

что, как нетрудно убедиться, совпадает с (9.11). Таким образом, тангенс угла наклона y' характеристики может принимать два значения, определяемые как корни квадратного уравнения (9.11):

$$y'=\frac{v_xv_y\pm a\sqrt{v_x^2+v_y^2-a^2}}{v_x^2-a^2}. \quad (9.12)$$

Соответственно этому через каждую точку плоскости (x, y) можно провести два элемента характеристик, а вся плоскость (x, y) (в предположении всюду сверхзвуковой скорости) может быть покрыта двумя семействами характеристик. Если движение уже известно, т. е. v_x и v_y известны как функции координат, уравнения (9.12) представят два дифференциальных уравнения, каждое из которых, будучи проинтегрировано, даст одну систему характеристик в плоскости (x, y). В дальнейшем мы всегда будем называть ту характеристику, которая отвечает знаку плюс перед корнем в (9.12), характеристикой первого семейства, а ту, что даёт y' со знаком минус перед корнем, — второго

*) Равенство нулю определителя с заменённым первым столбцом получается как следствие (9.9) и (9.10).

семейства. Будем писать соответственно $y_1(x)$ или $y_2(x)$, так что

$$y_1' = \frac{v_x v_y + a\sqrt{v_x^2 + v_y^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2}, \tag{9.13}$$

$$y_2' = \frac{v_x v_y - a\sqrt{v_x^2 + v_y^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2}. \tag{9.14}$$

Обратимся, однако, к уравнению (9.10), которое должно выполняться вдоль характеристик наравне с уравнением (9.9). Раскрывая его и группируя члены, получим сперва

$$\left[y'\left(a^2 - v_x^2\right) + 2v_x v_y\right]\frac{dv_y}{dx} - \left(a^2 - v_x^2\right)\frac{dv_x}{dx} = \\ = \left[y'\left(a^2 - v_x^2\right) + v_x v_y\right]\Omega, \tag{9.15}$$

или вследствие (9.11)

$$\frac{v_y^2 - a^2}{y'}\frac{dv_y}{dx} + \left(v_x^2 - a^2\right)\frac{dv_x}{dx} = \left[v_x v_y + y'\left(a^2 - v_x^2\right)\right]\Omega, \tag{9.16}$$

откуда, деля на $\dfrac{v_y^2 - a^2}{y'}$ и заменяя члены в квадратной скобке правой части по формуле (9.12):

$$\frac{dv_y}{dx} + y'\frac{v_x^2 - a^2}{v_y^2 - a^2}\frac{dv_x}{dx} = \mp\frac{a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_y^2 - a^2}\,y'\Omega, \tag{9.17}$$

где справа знак минус отвечает первому семейству, и тогда вместо y' должно стоять y_1', а знак плюс отвечает значению $y' = y_2'$.

Мы можем представить произведение корней уравнения (9.11) в виде:

$$y_1' y_2' = \frac{v_y^2 - a^2}{v_x^2 - a^2},$$

и потому вдоль характеристик первого семейства будет

$$dv_y + \frac{1}{y_2'}\,dv_x = -\Omega\frac{a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_y^2 - a^2}\,y_1'\,dx, \tag{9.18}$$

а вдоль второго

$$dv_y + \frac{1}{y_1'}\,dv_x = \Omega\frac{a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_y^2 - a^2}\,y_2'\,dx. \tag{9.19}$$

Соотношениям (9.12) и (9.17) можно придать более обозримый вид, если ввести вместо проекций v_x и v_y скорости величину ско-

рости v и угол β, образуемый вектором скорости с осью Ox (рис. 6):

$$v_x = v\cos\beta; \quad v_y = v\sin\beta. \tag{9.20}$$

Заметим, прежде всего, что скорость $\boldsymbol{V}$ в точке $M(x, y)$ будет всегда направлена по биссектрисе между касательными к обеим характеристикам, проходящим через M. В этом можно убедиться из рассмотрения (9.12), проще же это можно получить из равенства

$$|V_n| = a.$$

В самом деле, тот факт, что проекция V_n на нормаль к обеим характеристикам скорости $\boldsymbol{V}$ точки M равна по абсолютной величине одному и тому же числу, указывает, что скорость составляет один и тот же угол с обеими касательными, проведёнными в M к нашим характеристикам. Угол этот называется *углом Маха*. Обозначим его буквой α; тогда по определению α будет (рис. 6):

$$\sin\alpha = \frac{a}{v}. \tag{9.21}$$

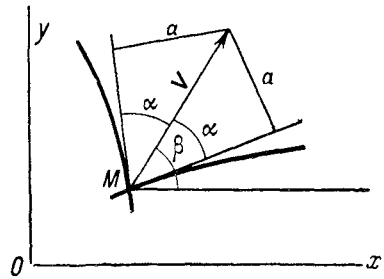

Рис. 6.

Следует подчеркнуть, что величина угла Маха α зависит исключительно от отношения v/a, но не зависит от угла β. В самом деле, по (8.9) мы можем написать:

$$\sin^2\alpha = \frac{\varkappa+1}{2}\left(\frac{a}{v}\right)^2 - \frac{\varkappa-1}{2}. \tag{9.22}$$

Теперь мы можем представить (9.12) в виде:

$$y' = \operatorname{tg}(\beta \pm \alpha). \tag{9.23}$$

Прежде чем преобразовать (9.18) и (9.19), найдём, как изменяется ϑ при перемещении вдоль характеристики. Вдоль последней будет

$$\vartheta = \vartheta\{\psi[x, y(x)]\},$$

так что

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{d\vartheta}{d\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}y'\right),$$

или, по (6.5),

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\rho(v_y - v_x y')\frac{d\vartheta}{d\psi}.$$

Но тогда можно представить Ω, стоящее в (9.18) и (9.19), в виде

$$\Omega = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\rho\frac{d\vartheta}{d\psi} = -\frac{\varkappa}{\varkappa-1}p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\frac{1}{v_y - v_x y'}\frac{d\vartheta}{dx} =$$
$$= -\frac{1}{\varkappa-1}\frac{a^2}{v_y - v_x y'}\frac{d\ln\vartheta}{dx}.$$

Вставим это значение Ω в (9.18) и (9.19) и заменим ещё v_x и v_y по (9.20), а y' по (9.23). Получим:

$$d(v\sin\beta) + \operatorname{ctg}(\beta \mp \alpha)\, d(v\cos\beta) =$$
$$= \pm \frac{1}{\varkappa - 1} \frac{a^3 \sqrt{v^2 - a^2}\operatorname{tg}(\beta \pm \alpha)}{v\{\sin\beta - \operatorname{tg}(\beta \pm \alpha)\cos\beta\}} \frac{d\ln\vartheta}{(v^2\sin^2\beta - a^2)}.$$

Наконец, собирая члены с dv и $d\beta$, деля на коэффициент при $d\beta$ и применяя (9.21), получим после простых преобразований:

$$d\beta \mp \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{v} dv = \pm \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\varkappa - 1} d\ln\vartheta. \tag{9.24}$$

Мы вернёмся к вихревой задаче в § 13, а сейчас приступим к решению отдельных конкретных задач в безвихревом случае. Здесь мы будем иметь значительное упрощение формул (9.18), (9.19) и сможем значительно дальше продвинуться в общей теории.

§ 10. Плоские безвихревые движения при $v > a_*$. Если вихри отсутствуют, т. е.

$$\Omega = 0,$$

уравнения (9.18) и (9.19) могут быть записаны в виде: вдоль характеристик первого семейства:

$$\frac{dv_y}{dv_x} = -\frac{1}{y_2'}; \tag{10.1}$$

вдоль характеристик второго семейства:

$$\frac{dv_y}{dv_x} = -\frac{1}{y_1'}. \tag{10.2}$$

Рассмотрим, кроме плоскости (x, y), которая вся покрыта линиями характеристик $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, плоскость компонентов скоростей (v_x, v_y). Мы имеем дело со сверхзвуковыми скоростями, значит, в этой плоскости мы должны рассмотреть точки, лежащие вне круга $v = a_*$. С другой стороны, мы знаем (§ 8), что скорость движения газа

$$v \leqslant \sqrt{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}}\, a_*.$$

Таким образом, интересующие нас точки плоскости (v_x, v_y) все расположены в кольце между окружностями $v = a_*$ и $v = \sqrt{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}}\, a_*$. Предположим, что мы перемещаемся вдоль характеристики $y = y_1(x)$ в плоскости (x, y). В плоскости (v_x, v_y) мы будем перемещаться

при этом, вообще говоря, вдоль некоторой линии. Эту линию назовём характеристикой первого семейства в плоскости (v_x, v_y). На этой линии должно быть выполнено всюду соотношение (10.1). Аналогичное построение повторим для характеристик второго семейства. Через точку M плоскости (x, y) проведём элементы характеристик первого и второго семейства. Пусть точке M отвечает точка M' плоскости (v_x, v_y) (координаты точки M' суть компоненты скорости в точке M). Равенство (10.2) показывает тогда, что касательная к характеристике первого семейства, проходящей в плоскости (x, y) через M, будет нормальна к характеристике второго семейства, проходящей через соответствующую точку M' в плоскости (v_x, v_y) (ось Ox параллельна оси v_x); также, по (10.1), касательная к характеристике второго семейства в (x, y) будет параллельна нормали к характеристике первого семейства в (v_x, v_y).

Характеристики в плоскости (x, y) будут иметь в различных задачах газовой динамики различную форму. Напротив, характеристики в плоскости (v_x, v_y) будут для всех безвихревых задач иметь всегда один и тот же вид, так что мы можем их рассчитать раз и навсегда. Действительно, из уравнения (10.1), например, вследствие (9.14), следует, что

$$\frac{dv_y}{dv_x} = -\frac{v_x^2 - a^2}{v_x v_y - a\sqrt{v^2 - a^2}},$$

т. е., так как a^2 выражается только через $v_x^2 + v_y^2$ и правая часть, таким образом, зависит только от v_x, v_y, но не зависит явно от x, y, то мы имеем для определения характеристики первого семейства в плоскости (v_x, v_y) обыкновенное дифференциальное уравнение.

Для интеграции этого уравнения удобно обратиться в плоскости (v_x, v_y) к полярным координатам v, β, уже введённым нами по формулам (9.20). Именно, (9.24) даст нам для безвихревого случая ($\vartheta = \text{const.}$) просто

$$d\beta \mp \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{v} dv = 0, \tag{10.3}$$

и так как $\operatorname{ctg}\alpha$ зависит исключительно от v (вернее, от отношения v/a_*), то переменные разделены, и достаточно выполнить квадратуру. Вследствие (9.22), имеем:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\frac{\left(\frac{v}{a_*}\right)^2 - 1}{1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\left(\frac{v}{a_*}\right)^2}}, \tag{10.4}$$

так что

$$\beta = \pm \int \sqrt{\frac{\left(\frac{v}{a_*}\right)^2 - 1}{1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\left(\frac{v}{a_*}\right)^2}} \frac{d\frac{v}{a_*}}{\frac{v}{a_*}} + \text{const.}$$

Квадратура легко выполняется, и мы получим

$$\beta = \pm \left\{ \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} \sqrt{\frac{v^2 - a_*^2}{a_*^2 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} v^2}} \right) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{v^2 - a_*^2}{a_*^2 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} v^2}} \right\} + \text{const.} \quad (10.5)$$

Уравнения (10.5) представляют два (соответственно двум знакам правой части) семейства линий, зависящих каждое от одного параметра. Все эти линии располагаются в кольце

$$a_* \leqslant v \leqslant \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\, a_*.$$

Нетрудно убедиться, что это—эпициклоиды, которые можно получить, следя за движением точек окружности радиуса

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} - 1\right) a_*,$$

катящейся по кругу $v = a_*$. Мы приходим к важному результату: характеристики в плоскости (v_x, v_y) представляются в случае безвихревой задачи всегда в виде эпициклоид.

Равенство (10.5) может быть ещё записано, если ввести вместо v угол α по (10.4), так:

$$\beta = \pm \left\{ \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} \operatorname{ctg} \alpha \right) + \alpha \right\} + \text{const.} \quad (10.6)$$

Для удобства дальнейших вычислений мы будем писать для характеристики первого семейства

$$\left.\begin{aligned} \zeta\left(\frac{v}{a_*}\right) - \beta &= 2\lambda, \\ \zeta\left(\frac{v}{a_*}\right) + \beta &= 2\mu, \end{aligned}\right\} \quad (10.7)$$

а для второго·

где λ и μ — постоянные, а

$$\zeta\left(\frac{v}{a_*}\right) = \int_1^{v/a_*} \sqrt{\frac{\left(\frac{v}{a_*}\right)^2 - 1}{1 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\left(\frac{v}{a_*}\right)^2}} \frac{d\frac{v}{a_*}}{\frac{v}{a_*}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} \sqrt{\frac{v^2 - a_*^2}{a_*^2 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} v^2}}\right) - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{v^2 - a_*^2}{a_*^2 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} v^2}}. \quad (10.8)$$

Через каждую точку M' плоскости (v_x, v_y) $\left(\text{в кольце } a_* \leqslant v \leqslant \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\, a_*\right)$ проходит одна эпициклоида первого семейства и одна второго семейства. При этом, по (10.7), разность соответствующих значений постоянных $\mu - \lambda$ будет в точности равна полярному углу β точки (v_x, v_y):

$$-\lambda + \mu = \beta,$$

т. е. будет сохраняться на всём радиусе-векторе, проходящем через M'; а сумма значений λ и μ будет

$$\lambda + \mu = \zeta\left(\frac{v}{a_*}\right),$$

т. е. сохраняется на всём круге с центром в начале (проходящем через M').

На прилагаемой таблице I мы даём значения числа $S(v/a_*) = 1000 - 180/\pi \cdot \zeta$, начиная от 1000 вниз через 1, и рядом соответствующие значения α в градусах и значения величин p/p_0, v/a, v/a_* и $\rho v/a_* \rho_*$.

В плоскости (x, y) направление обеих характеристик, проходящих через точку M, можно узнать по формулам (9.13), (9.14), если известны v_x и v_y в этой точке M. Если, однако, наши эпициклоиды уже заготовлены, то, зная v_x, v_y, можно найти направления y_1', y_2', не производя вычислений по формулам (9.13) и (9.14). В самом деле, достаточно вспомнить, что элементы эпициклоид, проходящих через M' (с данными v_x и v_y), нормальны к элементам характеристик противоположных номеров, проходящих через M; таким образом, чтобы построить, например, направление характеристики первого семейства в точке M, надо провести через M линию, перпендикулярную

Таблица I

S	α	$\frac{p}{p_0}$	v/a	v/a_*	$\rho v/a_*\rho_*$	S	α	$\frac{p}{p_0}$	v/a	v/a_*	$\rho v/a_*\rho_*$
1000	90,00	0,527	1,000	1,000	1,000	972	28,98	0,116	2,062	1,657	0,564
999	67,28	0,477	1,084	1,068	0,994	971	28,42	0,110	2,098	1,673	0,547
998	61,96	0,449	1,133	1,107	0,986	970	27,88	0,104	2,135	1,688	0,530
997	58,18	0,424	1,178	1,141	0,976	969	27,34	0,097	2,174	1,704	0,512
996	55,12	0,401	1,220	1,173	0,965	968	26,82	0,092	2,214	1,720	0,494
995	52,66	0,381	1,258	1,201	0,953	967	26,32	0,086	2,251	1,735	0,477
994	50,58	0,363	1,295	1,227	0,940	966	25,80	0,080	2,296	1,752	0,459
993	48,70	0,345	1,332	1,253	0,926	965	25,33	0,075	2,339	1,767	0,442
992	47,07	0,329	1,366	1,276	0,912	964	24,87	0,071	2,378	1,781	0,426
991	45,54	0,313	1,401	1,299	0,897	963	24,42	0,066	2,422	1,795	0,410
990	44,16	0,298	1,435	1,322	0,882	962	23,98	0,062	2,466	1,810	0,394
989	42,84	0,284	1,470	1,344	0,865	961	23,54	0,058	2,508	1,824	0,379
988	41,62	0,270	1,505	1,666	0,849	960	23,12	0,054	2,550	1,837	0,364
987	40,51	0,257	1,539	1,387	0,832	959	22,70	0,051	2,595	1,851	0,349
986	39,48	0,245	1,572	1,407	0,815	958	22,29	0,047	2,640	1,864	0,335
985	38,47	0,233	1,608	1,428	0,797	957	21,89	0,044	2,689	1,878	0,320
984	37,53	0,221	1,641	1,448	0,779	956	21,49	0,041	2,734	1,891	0,306
983	36,67	0,210	1,675	1,467	0,762	955	21,11	0,038	2,778	1,903	0,294
982	35,82	0,199	1,710	1,486	0,743	954	20,73	0,036	2,826	1,917	0,281
981	35,02	0,189	1,744	1,504	0,725	953	20,37	0,033	2,873	1,928	0,269
980	34,26	0,179	1,779	1,523	0,707	952	20,00	0,031	2,920	1,939	0,257
979	33,51	0,170	1,815	1,541	0,689	951	19,64	0,029	2,968	1,951	0,246
978	32,80	0,161	1,850	1,559	0,670	950	19,29	0,027	3,021	1,963	0,234
977	32,10	0,153	1,884	1,576	0,653	949	18,93	0,025	3,074	1,975	0,222
976	31,45	0,145	1,918	1,592	0,635	948	18,59	0,023	3,131	1,987	0,211
975	30,80	0,137	1,954	1,609	0,617	947	18,26	0,021	3,188	1,999	0,200
974	30,19	0,130	1,989	1,625	0,600	946	17,97	0,019	3,350	2,012	0,188
973	29,58	0,123	2,025	1,641	0,582	870,68	0,00	0,000	∞	2,437	0,000

к касательной к проходящей через M' эпициклоиде второго семейства (оси x и v_x всегда параллельны).

На рис. 7 изображён кусок плоскости (v_x, v_y) (сектор в 70° круга радиуса $\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\,a_*$ с центром в начале координат), на котором нанесены попадающие туда части эпициклоид первого и второго семейств и некоторые круги $S = \text{const}$. Если в (10.7) ввести вместо ζ число S, мы получим

$$S + \beta^\circ = 1000 - \frac{360}{\pi}\lambda = 2(\xi + 100),$$

$$S - \beta^\circ = 1000 - \frac{360}{\pi}\mu = 2(\eta - 100)$$

(β° — в градусах), где ξ и η — новые постоянные, заменяющие λ и μ. На рис. 7 эпициклоиде первого семейства, проходящей через точку $v = a_*$ ($S = 1000$), $\beta^\circ = 0$ (на рисунке надписаны значения $\eta - \xi$,

а не β), соответствует $\xi = 400$, эпициклоиде второго семейства, проходящей через ту же точку, отвечает $\eta = 600$. Эпициклоиды проведены для $\xi = 400$; 401; 402; ...; для $\xi = 399$; 398; ..., для

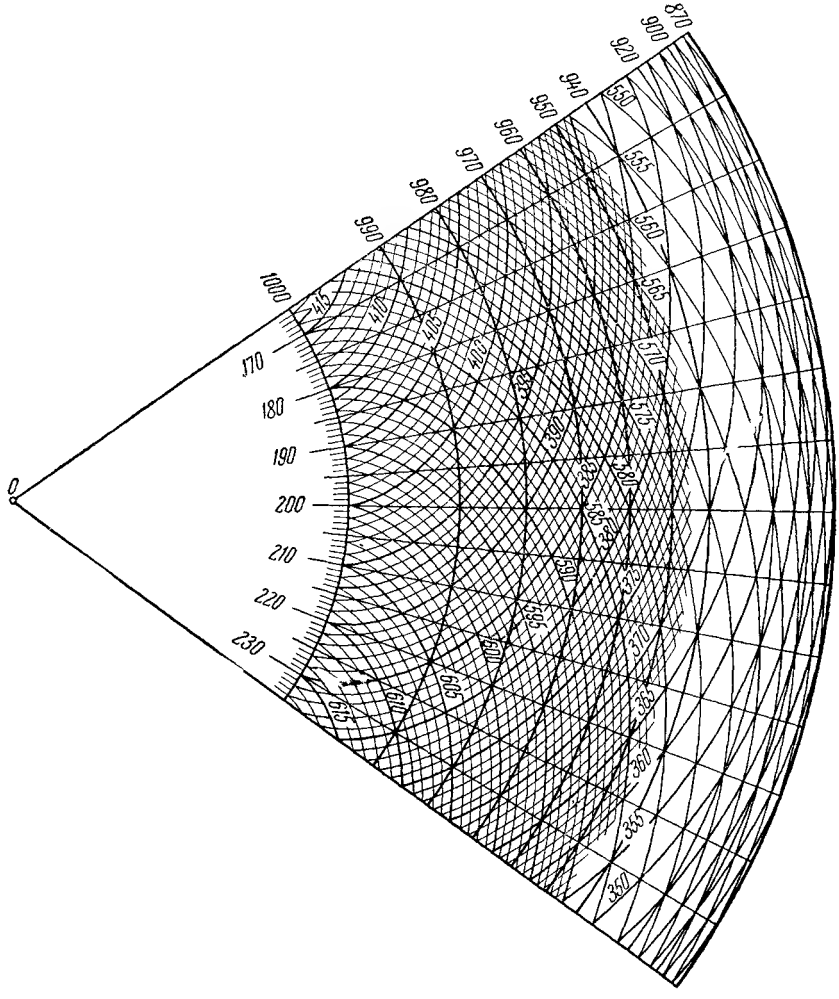

Рис. 7.

$\eta = 600$; 601; ...; $\eta = 599$; 598; ... Круги $S = \text{const}$. проведены для $S = 1000$, 990, 980 ... Заметим, что в каждой точке

$$S = \xi + \eta, \quad \beta^\circ = \xi - \eta + 200.$$

Покажем теперь, как при помощи характеристик можно численным образом определить поле скоростей и давление во всех точках плоскости (x, y) в отдельных задачах газовой динамики.

§ 11. Использование характеристик для решения плоской безвихревой задачи при $v > a_*$. Мы увидим, что любой случай движения газа со сверхзвуковой скоростью и при отсутствии

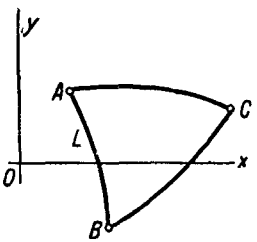

Рис. 8.

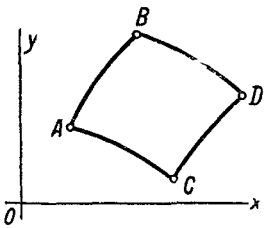

Рис. 9.

сильного разрыва мы сможем изучить, если научимся решать следующие четыре задачи:

Задача 1. Поле скоростей [т. е. $v_x(x, y)$ и $v_y(x, y)$] задано в плоскости (x, y) на дуге $\overset{\smile}{AB}$ некоторой линии L (рис. 8), не являющейся характеристикой. Определить v_x и v_y во всех точках области, ограниченной дугой $\overset{\smile}{AB}$ и двумя характеристиками (разных семейств), выходящими из точек A и B (рис. 8) (в некотором криволинейном треугольнике).

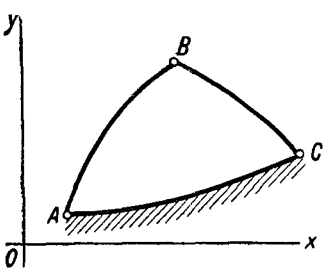

Рис. 10.

Задача 2. Поле скоростей известно на дугах $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{AC}$ двух характеристик разных семейств, выходящих из точки A. Найти v_x и v_y в области, ограниченной этими дугами и дугами $\overset{\smile}{BD}$ и $\overset{\smile}{CD}$ характеристик разных семейств, выходящих из B и C (рис. 9).

Задача 3. Поле скоростей задано на дуге $\overset{\smile}{AB}$ характеристики какого-либо семейства, причём известно, что точка A лежит на твёрдой стенке[1]). Найти v_x и v_y в области, ограниченной $\overset{\smile}{AB}$, твёрдой стенкой $\overset{\smile}{AC}$ и характеристикой $\overset{\smile}{BC}$ другого семейства, выходящей из точки B (рис. 10).

[1]) Направление последней в A таково, что вторая характеристика, проходящая через A, пойдёт «внутри» стенки.

Задача 4. То же, что и в 3, но вместо стенки $\overset{\smile}{AC}$ речь идёт о свободной поверхности $\overset{\smile}{AC}$, форма которой заранее, конечно, неизвестна (рис. 11).

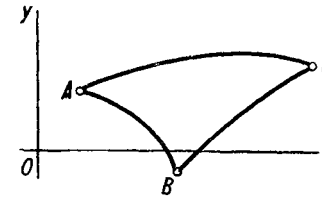

Рис. 11.

Заметим, что в задаче 1 нам задана линия $\overset{\smile}{AB}$, отрезки же характеристик $\overset{\smile}{DC}$ и $\overset{\smile}{BC}$ заранее неизвестны. Напротив, в задаче 2 характеристики $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{AC}$ считаются заранее известными (неизвестны $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{CD}$), в задаче 3 характеристика $\overset{\smile}{AB}$ и контур считаются заданными, наконец, в задаче 4 дана дуга $\overset{\smile}{AB}$ характеристики, а свободная поверхность неизвестна, так же как и $\overset{\smile}{BC}$.

Чтобы приближённо решить задачу 1, поместим на дуге $\overset{\smile}{AB}$ густой ряд точек M_1, M_2, ..., M_n (рис. 12). Так как значения (v_x, v_y) на AB известны, то в каждой из точек A, M_1, M_2, ..., M_n, B мы можем построить отрезки прямых по направлениям касатель-

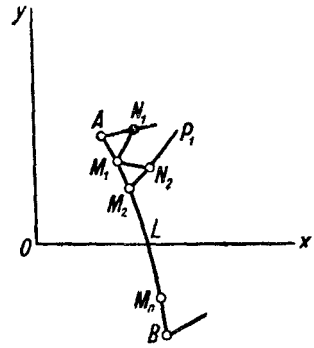

Рис. 12.

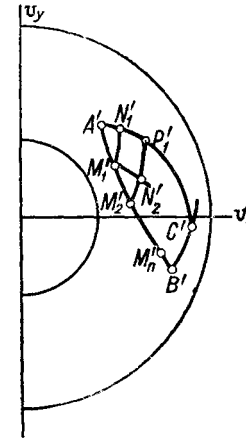

Рис. 13.

ных к обеим характеристикам по формулам (9.13) и (9.14). Проведённые нами отрезки прямых *приближённо* примем за элементы самих характеристик, выходящих из A, M_1, ..., B; в точке A нам достаточно построить лишь элемент характеристики $\overset{\smile}{AC}$ (пусть это будет характеристика второго семейства), а в точке B — элемент $\overset{\smile}{BC}$ (первого семейства). Пусть элементы характеристик разных семейств, проведённые из соседних точек дуги $\overset{\smile}{AB}$, пересекаются в точках N_1,

N_2, ... (например, N_2 есть пересечение элемента характеристики второго семейства, выходящей из M_1, и характеристики первого семейства, выходящей из M_2). Чтобы найти v_x, v_y в точках N_1, N_2, ..., рассуждаем так. Отметим скорости v_x и v_y точек A, M_1, ..., B в плоскости (v_x, v_y); пусть это будут точки A', M_1', ..., B' (рис. 13). Перемещаясь в плоскости (x, y) по характеристике второго семейства из точки A, мы будем в плоскости (v_x, v_y) двигаться по эпициклоиде второго семейства, проходящей через A'; перемещаясь же вдоль характеристики первого семейства из M_1, мы пойдём по плоскости (v_x, v_y) вдоль эпициклоиды первого семейства, выходящей из M_1'. Обе нужные нам эпициклоиды могут быть заранее нарисованы, поэтому точка их пересечения N_1' (рис. 13) может быть сразу найдена хотя бы графически. Совершенно очевидно, что координаты v_x и v_y точки N_1' и дадут скорости v_x и v_y в точке N_1. Аналогичным образом мы найдём скорости точек N_2 и т. д. Ниже мы укажем на очень удобный приём графического определения скоростей v_x, v_y в этих точках.

Теперь мы можем взять за отправную сеть ряд точек N_1, N_2, ... и рассуждать по отношению к ним так же, как мы рассуждали о точках A, M_1, ..., M_n, B. Именно в N_1, N_2, ... скорости уже известны; значит, можно во всех этих точках построить характеристики обоих семейств [по формулам (9.13), (9.14) или как нормали к эпициклоидам плоскости (v_x, v_y)] до пересечения их в точках P_1, P_2, P_3, ...; скорости же в этих точках найдутся как координаты точек пересечения эпициклоид, проходящих через точки N_1', N_2', ... соответственно. Так постепенно мы заполним весь криволинейный треугольник, о котором идёт речь в задаче 1. Линии $\overset{\smile}{AC}$ и $\overset{\smile}{BC}$, неизвестные вначале, построятся при этом сами собой (приближённо, как ломаные, а не как плавные кривые; это же относится ко всем характеристикам). Таким образом, в густой сетке точек (густота эта будет зависеть от густоты точек M_1, M_2, ..., M_n на $\overset{\smile}{AB}$) нашего «треугольника» мы будем знать скорости. Линии тока определить теперь легко, если вспомнить, что скорости направлены по биссектрисам углов между характеристиками, а последние по самому построению нам везде известны. Давление находится по уравнению Бернулли. Задача 1 решена.

Решение задачи 2 принципиально не отличается от решения задачи 1. Поместим на характеристике $\overset{\smile}{AB}$ густой ряд точек M_1, M_2, ..., M_n, а на характеристике $\overset{\smile}{AC}$ густой ряд точек N_1, N_2, ..., N_n. Во всех этих точках скорости v_x, v_y нам заданы. Через точки M_1, M_2, ... проведём затем элементы характеристик

второго семейства (считаем, что $\overset{\smile}{AB}$ — характеристика первого семейства), а через точки N_1, N_2, ... — отрезки характеристик первого семейства (рис. 14). Пусть пересечением характеристики первого семейства, вышедшей из N_1, и характеристики второго семейства, вышедшей из M_1, будет точка P_1. Чтобы найти скорость в P_1, замечаем, что перемещение вдоль характеристики N_1P_1 означает передвижение в плоскости (v_x, v_y) вдоль некоторой эпициклоиды первого семейства, выходящей из точки N_1' с координатами, равными компонентам скорости в точке N_1, а перемещение вдоль $\overset{\smile}{M_1P_1}$ означает передвижение по эпициклоиде второго семейства от точки M_1' с координатами — компонентами скорости в точке M_1. Точка пересечения P_1' (рис. 15) упомянутых эпициклоид и даст компоненты скорости в P_1. Зная скорости в точке P_1, можем провести через эту точку обе характеристики до пересечения с элементами характеристик первого и второго семейства, выходящих из N_2 и из M_2 соответственно. Получим точки P_2 и P_3. Чтобы найти скорость в P_2, рассуждаем совершенно так же, как это делали при рассмотрении точки P_1, только роль прежней точки A будет теперь играть точка N_1, роль точки M_1 будет играть P_1, а на место точки N_1 придётся ставить N_2. Аналогично можно сказать про точку P_3. Продолжая построение далее, покроем постепенно весь криволинейный четырёхугольник, о котором идёт речь в задаче 2, сеткой характеристик; на пересечениях последних мы будем знать всюду v_x и v_y. Линии тока поведутся затем как биссектрисы между касательными к характеристикам, а давление найдётся из уравнения Бернулли. Задача будет решена. Отметим, что все заданные точки A', N_1', N_2', ... расположатся на одной и той же эпициклоиде второго семейства, точки же A', M_1', M_2', ... лягут на одну и ту же эпициклоиду первого семейства. Обе эти эпициклоиды выходят из A'.

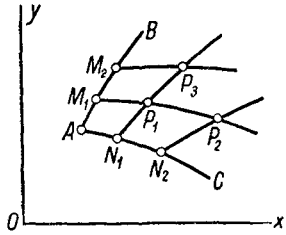

Рис. 14.

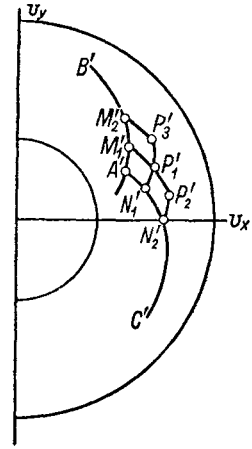

Рис. 15.

Переходим к решению задачи 3. Пусть дуга $\overset{\smile}{AB}$ есть дуга заданной характеристики первого семейства. Нанесём на ней ряд точек M_1, M_2, ... (рис. 16). Так как скорости везде на $\overset{\smile}{AB}$ нам известны, мы можем в каждой из точек M_1, M_2, ... построить элементы характеристик второго семейства [хотя бы по формуле (9.14)]. Проделаем это построение. Характеристику второго семейства, проходящую через M_1, доведём до пересечения в точке N_1 с заданной нам стенкой. Теперь мы можем определить скорость в точке N_1. В самом деле, направление скорости там известно — это направление стенки. Проведём в плоскости (v_x, v_y) радиус-вектор под углом,

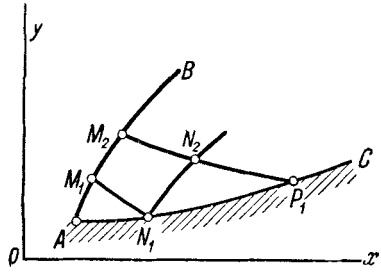

Рис. 16.

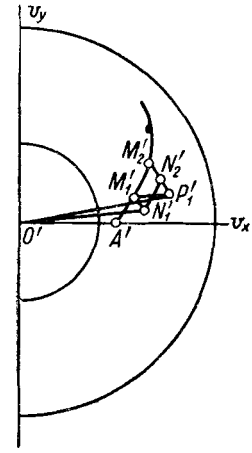

Рис. 17.

равным углу между направлением касательной в N_1 к контуру и осью Ox. Где-то на этом радиусе-векторе нам надо будет искать точку, координаты которой v_x, v_y дадут скорости в точке N_1. С другой стороны, точка N_1 лежит на характеристике второго семейства, выходящей из точки M_1. Пусть точке M_1 отвечает в плоскости (v_x, v_y) точка M_1' (рис. 17). Проводя через M_1' эпициклоиду второго семейства до пересечения с упомянутым выше радиусом-вектором, мы встретим последний в точке N_1', которая, очевидно, и будет иметь в качестве координат скорости v_x, v_y в точке N_1. Зная скорости в N_1, построим в плоскости (x, y) характеристику первого семейства $\overset{\smile}{N_1N_2}$ до пересечения N_2 с характеристикой второго семейства $\overset{\smile}{M_2N_2}$, выходящей из M_2. Скорости в N_2 найдутся как координаты точки v_x, v_y пересечения эпициклоиды первого семейства, проходящей через N_1', и эпициклоиды второго семейства, идущей через M_2'. Проведём из N_2 обе характеристики, причём характеристику первого семейства доведём до пересечения N_3 с харак-

теристикой второго семейства, выходящей из M_3, а характеристику второго семейства, выходящую из N_2, проведём до пересечения с контуром (пусть это будет точка P_1). Скорость в N_3 находится аналогично тому, как находилась скорость в N_2; чтобы найти скорость в P_1, замечаем, что направление скорости там известно (так же как было известно направление скорости в N_1), и построим радиус-вектор с этим направлением в плоскости (v_x, v_y); пересечение P_1' этого радиуса-вектора с эпициклоидой второго семейства, проходящей через N_2', и даст нам искомую скорость в P_1. Зная скорость в P_1 и в N_3, проводим там характеристики и т. д. Задача наша будет решена.

Обратим внимание на один очень важный частный случай задачи 3. Предположим, что нам известно, что вдоль характеристики $\overset{\smile}{AB}$ скорости имеют всюду одну и ту же постоянную величину и направление. Случай этот представится, например, в задаче обтекания профиля безграничным потоком, имеющим постоянную величину и направление скорости. В самом деле, пусть профиль этот начинается от точки A (рис. 16), причём безграничный поток набегает на него слева со скоростью, параллельной оси Ox. Тогда вдоль характеристики $\overset{\smile}{AB}$ (точка B может быть взята на бесконечности) совершается переход от режима прямолинейного набегания на контур к режиму обтекания контура. Вдоль характеристики $\overset{\smile}{AB}$ происходит «склеивание» двух различных движений ($\overset{\smile}{AB}$ как характеристика может быть такой линией слабого разрыва), и на всей $\overset{\smile}{AB}$ скорость постоянна по величине и направлению и равна скорости набегающего потока. Отметим попутно, что в таком случае линия $\overset{\smile}{AB}$ будет прямая. Действительно, тангенс наклона y_1' вдоль этой кривой, выражающийся при помощи формулы (9.13), будет всюду один и тот же, так как правая часть (9.13) состоит лишь из компонентов скоростей, а они считаются постоянными вдоль $\overset{\smile}{AB}$.

Итак, пусть вдоль $\overset{\smile}{AB}$ всюду $\beta = \beta_1$, а $v = v_1$. Обратим внимание на характеристики второго семейства $\overset{\smile}{M_1N_1}$ и др. Вдоль них будет, согласно формуле (10.7),

$$\zeta\left(\frac{v}{a_*}\right) + \beta = 2\mu,$$

где μ — различные постоянные, характеризующие отдельные характеристики семейства. Найдём μ для характеристики $\overset{\smile}{M_1N_1}$. Последняя пересекается с $\overset{\smile}{AB}$ в точке M_1; здесь $\beta = \beta_1$ и $v = v_1$,

следовательно, должно быть

$$\zeta\left(\frac{v_1}{a_*}\right)+\beta_1=2\nu,$$

и уравнение, связывающее v и β вдоль $\widetilde{M_1N_1}$, будет иметь вид:

$$\zeta\left(\frac{v}{a_*}\right)+\beta=\zeta\left(\frac{v_1}{a_*}\right)+\beta_1. \tag{11.1}$$

Но вдоль $\widetilde{M_2P_1}$ будет выполняться в точности то же соотношение, ибо M_2 лежит на $\widetilde{AB}$, а там $v=v_1$ и $\beta=\beta_1$, так что и для этой линии должно быть выполнено (11.1). Таким образом, в нашем случае скорость v и угол β во всех точках, лежащих между контуром и характеристикой AB, будут связаны соотношением (11.1) с одной и той же константой μ, в то время как в общем случае постоянная будет меняться от характеристики к характеристике.

Соотношение (11.1) играет здесь роль дополнительного конечного соотношения, связывающего компоненты скоростей (v_x и v_y могут быть выражены через v и β). Пользуясь этим соотношением, мы можем привести задачу к решению лишь одного уравнения в частных производных первого порядка с одной искомой функцией (напомним, что в общем случае мы имеем систему двух уравнений с двумя функциями), т. е., в конечном счёте, к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Чтобы получить это единственное уравнение, напишем, например, условие отсутствия вихря, выражая v_x и v_y через v и β:

$$\frac{\partial v\sin\beta}{\partial x}-\frac{\partial v\cos\beta}{\partial y}=0. \tag{11.2}$$

Помня, что теперь v и β связаны соотношением (11.1), мы можем, далее, выполнить дифференцирование и написать

$$\left(\frac{dv}{d\beta}\sin\beta+v\cos\beta\right)\frac{\partial\beta}{\partial x}-\left(\frac{dv}{d\beta}\cos\beta-v\sin\beta\right)\frac{\partial\beta}{\partial y}=0,$$

или, так как по (10.3)

$$\frac{dv}{d\beta}=-v\operatorname{tg}\alpha$$

(мы имеем дело с характеристикой второго семейства), где α — угол Маха, мы можем написать, после простых преобразований:

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}+\operatorname{tg}(\beta+\alpha)\frac{\partial\beta}{\partial y}=0 \tag{11.3}$$

[здесь α — функция v по (9.22), а v — функция от β по (11.1)].

Это уравнение в частных производных первого порядка интегрируется и даёт:

$$\beta=F(y-\operatorname{tg}(\beta+\alpha)x), \tag{11.4}$$

где F — произвольная функция своего аргумента, каковая может

быть определена, если задан контур $\overset{\smile}{AC}$; достаточно написать, что на данной линии $\overset{\smile}{AC}$ β есть данная функция от координат x и y.

Итак, если отрезок $\overline{AB}$ характеристики в задаче 3 есть прямая линия, то движение внутри треугольника ABC может быть найдено совершенно точно. Стоит только после того, как F из (11.4) известна, решить (11.4) относительно β; мы получим β, а затем по (11.1) и v в функциях от x и y.

Мы еще не раз вернёмся к этому вопросу.

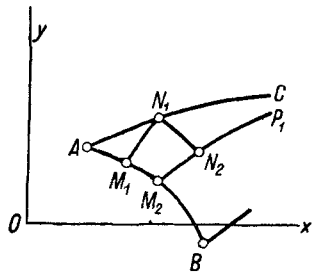

Рис. 18.

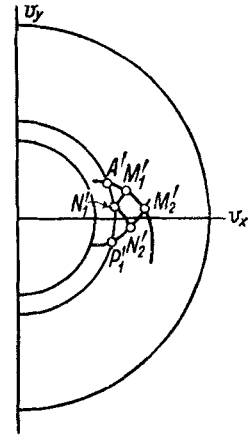

Рис. 19.

Перейдем к решению задачи 4. Пусть скорости заданы вдоль некоторой дуги $\overset{\smile}{AB}$ характеристики, например второго семейства, и пусть известно, что A лежит на свободной границе потока. Надо найти форму свободной поверхности $\overset{\smile}{AC}$ и движение между $\overset{\smile}{AC}$, $\overset{\smile}{AB}$ и отрезком $\overset{\smile}{BC}$ характеристики первого семейства, проходящей через B (рис. 18). Нанесём на $\overset{\smile}{AB}$ ряд точек M_1, M_2, ... Проведём через точку A элемент прямой, направленной вдоль известной в точке A скорости; этот элемент примем за элемент свободной поверхности, проходящей через A. Проведём затем через M_1 характеристику первого семейства до пересечения с этим элементом в точке N_1. На свободной поверхности величина давления p будет всюду одна и та же (это определение свободной поверхности), значит, величина v скорости всех точек свободной поверхности, по уравнению Бернулли, будет всюду одинакова. Построим поэтому в плоскости (v_x, v_y) круг радиуса $v = v_1$, где v_1 — именно это постоянное значение. Чтобы определить направление скорости точки N_1, достаточно будет теперь, так как N_1 лежит на свободной поверхности, найти в плоскости (v_x, v_y) точку пересечения N_1' эпициклоиды первого семейства, идущей из точки M_1', координаты которой суть известные компоненты скорости точки M_1, с окружностью $v = v_1$ (рис. 19). Определив

скорость в точке N_1, построим продолжение свободной поверхности как отрезок прямой, направленной вдоль этой скорости, затем из N_1 проведём элемент характеристики второго семейства до пересечения в точке N_2 с элементом характеристики первого семейства, идущей из M_2. Скорость N_2 найдётся как точка пересечения эпициклоиды первого семейства, проходящей через M_2' [изображение M_2 в плоскости (v_x, v_y)], и эпициклоиды второго семейства, идущей через N_1'. Зная скорость в N_2, проводим характеристику первого семейства до пересечения с элементом свободной поверхности в точке P_1 и т. д. Задача будет решена.

Прежде чем приступить к приложениям к конкретным задачам газовой динамики, скажем несколько слов об оценке погрешности излагаемого здесь метода. Нетрудно убедиться, что решение всех наших четырёх задач основано на умении пользоваться следующими двумя операциями, — назовём их *А* и *Б*.

Операция А. Даны скорости v_x и v_y в двух соседних точках M_1 и M_2 плоскости (x, y). Найти скорость в точке N пересечения характеристик разных семейств, выходящих из M_1 и M_2 соответственно. Чтобы проделать эту операцию, достаточно найти точку пересечения эпициклоид разных семейств, выходящих из M_1' и M_2' [точки плоскости (v_x, v_y), координаты коих суть заданные компоненты скоростей точек M_1 и M_2 соответственно].

Операция Б. Скорость в точке M плоскости (x, y) известна. Дана линия L, не являющаяся характеристикой (точка M лежит вблизи неё) и такая, что на ней мы знаем направление (или величину) скорости. Найти величину (или направление) скорости в точке N встречи характеристики $\overset{\frown}{MN}$, идущей из M, с линией L. Здесь достаточно в плоскости (v_x, v_y) разыскать точку M' с координатами, равными данным в точке M значениям v_x и v_y, и провести через M' эпициклоиду до пересечения с радиусом-вектором, параллельным направлению скорости в N' (или до пересечения с кругом, отвечающим известной величине скорости в N').

Для примера рассмотрим подробнее операцию *А*. Точно мы можем провести лишь половину этой операции: мы можем найти точку N', т. е. скорость в точке N; положение последней точки нам, однако, неизвестно, ибо вид характеристик в плоскости (x, y) заранее неизвестен. Мы можем, однако, построить отрезки касательных к характеристикам в точках M_1 и M_2 [по формулам (9.13) и (9.14)]. Эти отрезки мы и принимаем приближённо за характеристики M_1N и M_2N (рис. 20). Пересечение этих отрезков даст точку N^*, а не N, но мы можем в случае одно-однозначной зависимости между v_x, v_y и x, y заключить каждую из кирволинейных дуг характеристик в некий угол и таким образом оценить погрешность, получающуюся оттого, что вместо N мы взяли N^*. Для этого, пользуясь упомяну-

той однозначной зависимостью, надо лишь доказать, что делается без особого труда (см. уравнения эпициклоид), что наклон касательной к характеристике монотонно меняется вдоль соответствующего участка характеристики; если это так, то, проведя через M_1 отрезок прямой $\overline{M_1N^{**}}$, параллельный направлению касательной к одной из характеристик в N [это направление мы можем вычислить заранее, хотя положение точки N в плоскости (x, y) неизвестно, совершенно точно, используя (9.13) или (9.14) и найденную точно точку N'], а через M_2 — отрезок $\overline{M_2N^{**}}$, параллельный

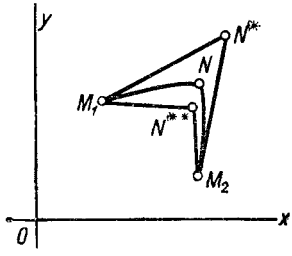

Рис. 20.

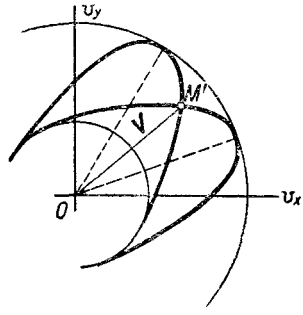

Рис. 21.

касательной к другой характеристике в N, мы можем утверждать, что криволинейная дуга $\overset{\frown}{M_1N}$ характеристики лежит вся внутри угла $\angle N^*M_1N^{**}$, а дуга $\overset{\frown}{M_2N}$ — внутри угла $\angle N^*M_2N^{**}$.

Таким образом, точность вычисления зависит лишь от близости точек M_1 и M_2.

Решение всех приведённых здесь задач производится при помощи построения в плоскости (x, y) характеристик обоих семейств, проходящих через точки, в коих скорости известны. Мы ссылались при этом всё время на формулы (9.13) и (9.14), позволяющие всегда проделать расчёт направлений y_1' или y_2'. Хотя этот расчёт и элементарен, он требует всё же неприятных выкладок — извлечения корней и т. п. Буземан дал графический приём быстрого определения направления характеристик в плоскости (x, y) (в тех точках, где скорости уже известны). Пусть скорость точки $M(x, y)$ плоскости (x, y) будет $V(v_x, v_y)$. Отметим в плоскости точку $M'(v_x, v_y)$ с соответствующими координатами и проведём через M' эллипс с центром в начале и с полуосями, равными a_* и $\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\,a^*$ соответственно. Легко видеть, что таких эллипсов будет, вообще говоря, два (рис. 21). Покажем, что большие оси этих эллипсов окажутся как раз параллельными характеристикам, проходящим в плоскости (x, y) через точку M (оси Ox и v_x всегда параллельны). Чтобы доказать это, представим себе, что вектор скорости V точки M разложен на две составляющие: V_τ по касательной к характеристике (например, первого семейства), проходящей в плоскости (x, y) через M, и V_n — по нормали к этой характеристике

в плоскости (x, y). Мы знаем, что

$$|V_n| = a.$$

Обратимся к уравнению Бернулли (8.7) и заменим в нём a^2 на V_n^2, а v^2 на $V_n^2 + V_\tau^2$. Тогда, собирая члены при V_τ^2 и V_n^2 и деля на $\frac{(\varkappa+1)}{2(\varkappa-1)}$, получим соотношение

$$\frac{V_\tau^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} + \frac{V_n^2}{1} = a_*^2. \tag{11.5}$$

Спроектируем теперь радиус-вектор $\overrightarrow{OM'} = |V|$ на большую ось одного из проведённых нами эллипсов и на перпендикуляр к ней. Пусть первая проекция будет v_τ, а вторая v_n. Тогда по самому построению эллипсов будет

$$\frac{v_\tau^2}{\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\right)^2 a_*^2} + \frac{v_n^2}{a_*^2} = 1.$$

Так как, с другой стороны, для точки M' имеем $V^2 = v_n^2 + v_\tau^2$, то величины v_n^2 и v_τ^2 удовлетворяют тем же двум линейным уравнениям, что и величины V_n^2 и V_τ^2, и поэтому можно положить

$$v_\tau = V_\tau, \quad v_n = V_n.$$

Следовательно, направление большой оси нашего эллипса будет совпадать с направлением характеристики, идущей через M, а направление малой оси — с направлением нормали к этой характеристике.

Изложенный здесь способ построения характеристик в плоскости (x, y) годится, естественным образом, не только для безвихревого, но и для вихревого случая, ибо он основывается на равенстве $|V_n| = a$, одинаково справедливом в обоих этих случаях.

Эллипс, о котором здесь идёт речь (назовём его эллипсом Буземана), может быть заготовлен раз навсегда на прозрачной бумаге (или на целлулоиде); совместив его центр с началом координат, будем поворачивать его вокруг начала до тех пор, пока точка M', дающая в плоскости (v_x, v_y) скорости точки M, не окажется на эллипсе; нам останется тогда лишь снести направление большой оси эллипса в этом его положении на плоскость (x, y) — направление характеристики, проходящей через M, будет найдено. Направление второй характеристики найдётся как направление большой оси второго возможного положения эллипса.

Эллипс Буземана позволяет построить также и характеристики в плоскости (v_x, v_y), т. е. эпициклоиды. В самом деле, мы видели [формулы (10.1), (10.2)], что характеристики плоскости (v_x, v_y) (эпициклоиды) будут ортогональны к характеристикам (другого номера) плоскости (x, y). Направление большой оси эллипса Буземана совпадает с направлением характеристики в плоскости (x, y) — значит, направление малой его оси (ортогональной к большой оси) будет совпадать с направлением эпициклоиды (другого семейства). Поэтому, чтобы построить элемент эпициклоиды, проходящей через M', нам достаточно провести через M' эллипс Буземана и затем построить элементарный отрезок, выходящий из M' и параллельный малой оси эллипса (рис. 22). Вторая эпициклоида найдётся при построении вто-

рого возможного положения эллипса. Отсюда получаем способ построения всех эпициклоид плоскости (v_x, v_y) при помощи эллипса Буземана. Поместим на эллипсе Буземана, находящемся в произвольном положении, ряд точек и проведём через эти точки отрезки, параллельные малой оси эллипса (рис. 22); повернём затем эллипс на малый угол и, отметив точки пересечения его с малыми отрезками, построим в этих точках новые элементарные отрезки, параллельные новому положению малой оси эллипса. Продолжая построение дальше (причём вращать эллипс придётся как по, так и против часовой стрелки), заполним всё кольцо

$$a_* \leqslant v \leqslant \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\, a_*$$ эпициклоидами.

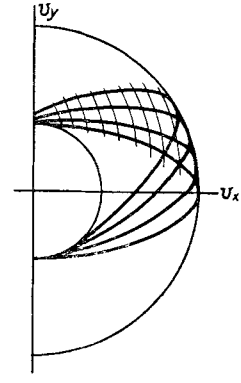

Рис. 22.

Способ использования характеристик для приближённого решения плоских безвихревых задач при $v > a_*$, изложенный в этом параграфе, был приспособлен для ручного счета и широко применялся до появления быстродействующих электронных вычислительных машин.

Для вычислений с помощью электронных машин способ этот неудобен тем, что в расчёт входят тригонометрические функции (это заставляет обращаться к большому числу подпрограмм и требует много машинного времени). В самом деле, рассмотрим, например, вновь операцию A. Вдоль характеристик выполняются соотношения (9.23) и (10.3). Это значит, что мы можем написать в точке M_2 (рис. 20) для характеристики 1-го семейства:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \operatorname{tg}(\beta_2 + \alpha_2),$$

где постановка индекса 2 означает, что соответствующая функция взята в точке M_2. С другой стороны, в M_1 имеем для характеристики 2-го семейства:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \operatorname{tg}(\beta_1 - \alpha_1)$$

(индекс 1 относится к значениям в точке M_1). Заменяя производные конечными разностями (это фактически мы все время и делали), мы найдём координаты (x^*, y^*) точки пересечения наших характеристик из соотношений:

$$y^* - y_2 = \operatorname{tg}(\beta_2 + \alpha_2)(x^* - x_2), \tag{11.6}$$

$$y^* - y_1 = \operatorname{tg}(\beta_1 - \alpha_1)(x^* - x_1). \tag{11.7}$$

В то же время по (10.3) имеем:

$$\beta^* - \beta_2 = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_2}{v_2}(v^* - v_2), \tag{11.8}$$

$$\beta^* - \beta_1 = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha_1}{v_1}(v^* - v_1), \tag{11.9}$$

где β^*, v^* — значения этих функций в точке M^*. Таким образом, x^*, y^*, β^*, v^* определяются из системы линейных уравнений (11.6)—(11.9), а коэффициенты этой системы содержат тригонометрические функции.

Эльерс [1]) предложил приспособить расчёты с помощью характеристик для электронных вычислительных машин следующим образом. В качестве искомых величин следует принять не α и $\beta(v, \beta)$, а две новые величины

$$\gamma = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \delta = \operatorname{tg}\beta. \tag{11.10}$$

В этих новых величинах соотношения на характеристиках (9.23) примут вид:

$$dy = \frac{\gamma\delta + 1}{\gamma + \delta}\, dx. \tag{11.11}$$

В то же время по (9.22)

$$\frac{a_*^2}{v^2} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} + \frac{2}{\varkappa + 1}\,\frac{1}{1 + \gamma^2},$$

так что, после элементарных выкладок, мы получим

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}\, d\ln\left(\frac{a_*}{v}\right)^2 = \frac{\gamma\, d\gamma}{(1 + \gamma^2)\left(\dfrac{\varkappa + 1}{2} + \dfrac{\varkappa - 1}{2}\gamma^2\right)}$$

и $d\beta = \dfrac{1}{1 + \delta^2}\, d\delta$. Поэтому (10.3) запишется в следующем виде:

$$\frac{1}{1 + \delta^2}\, d\delta = \pm \frac{\gamma^2\, d\gamma}{(1 + \gamma^2)\left(\dfrac{\varkappa + 1}{2} + \dfrac{\varkappa - 1}{2}\gamma^2\right)}. \tag{11.12}$$

Коэффициенты в (11.11), (11.12) — алгебраические функции. Сам расчёт следует проводить итерациями. Именно, если для сокращения письма ввести обозначения:

$$\frac{\gamma\delta + 1}{\gamma - \delta} = a, \quad \frac{\gamma\delta + 1}{\gamma + \delta} = b,$$

$$F = 2\gamma^2/(1 + \gamma^2)\,[\varkappa + 1 + (\varkappa - 1)\,\gamma^2], \quad E = (1 + \delta^2)^{-1},$$

то мы можем написать (рассматриваем операцию А) в первом приближении

$$y^* - y_2 = a_2(x^* - x_2); \qquad y^* - y_1 = b_1(x^* - x_1),$$
$$(\delta^* - \delta_2)E_2 = (\gamma^* - \gamma_2)F_2; \quad (\delta^* - \delta_1)E_1 = (\gamma^* - \gamma_1)F_1$$

[1]) Ehlers, The method of characteristics for isoenergetic supersonic flows adapted for high-speed digital computers, J. Soc. Ind. a. Appl. Math. **7**, 1959.

или, решая эти уравнения относительно x^*, y^*, δ^*, γ^*:

$$x^* = \frac{y_1 - y_2 + a_2 x_2 - b_1 x_1}{a_2 - b_1}, \quad y^* = y_1 + b_1 (x^* - x_1), \qquad (11.13)$$

$$\delta^* = \frac{F_2 (\gamma_1 F_1 + \delta_1 F_1) + F_1 (\delta_2 E_2 - \gamma_2 F_2)}{E_2 F_1 + E_1 F_2}, \quad \gamma^* = \frac{\gamma_1 F_1 + \delta_1 E_1 - E_1 \delta^*}{F_1}. \qquad (11.14)$$

После того как первое приближение построено, надо перейти ко второму приближению, вычислив значения a^*, b^*, E^*, F^* (по первому приближению) и вставив в формулы (11.13), (11.14) вместо a_2, b_1, E_1, E_2, F_1, F_2 величины $\frac{a_2 + a^*}{2}$, $\frac{b_1 + b^*}{2}$, $\frac{E_1 + E^*}{2}$, $\frac{F_1 + F^*}{2}$, $\frac{F_2 + F^*}{2}$ соответственно. Таким образом, получим новые значения x, y, δ, γ — второе приближение. Этот процесс нужно повторять до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

На протяжении этого параграфа мы говорили несколько раз относительно ограничений, при которых наши рассуждения были справедливы. Так, например, мы считали, что в участках, нас интересующих, не возникало поверхности сильного разрыва, мы предполагали одно-однозначное отображение плоскости (x, y) на плоскость (v_x, v_y) (что существенно было при оценке погрешности приближённого метода). В § 20, где мы будем говорить о движениях, происходящих в одной части плоскости с дозвуковыми скоростями, в другой — со сверхзвуковыми скоростями, мы вернёмся, следуя Христиановичу, к детальному и строгому обследованию всех случаев, которые могут представиться в сверхзвуковом поле; а сейчас перейдём к конкретному рассмотрению отдельных простых примеров.

§ 12. Движение газа вне выпуклой поверхности. Обтекание угла, большего чем π. Выход из отверстия. Движение внутри трубы. Сопло Лаваля. Рассмотрим некоторые движения со сверхзвуковыми скоростями. Предполагаем, как в предыдущем пункте, отсутствие сильных разрывов. Начнём с задачи о движении газа вокруг искривлённого контура, выпуклость которого всегда направлена в сторону газа. Предположим, что контур представляется при $x < 0$ в виде отрицательной оси Ox, а при $x > 0$ — в виде кривой, лежащей «под» осью положительных x-ов и так, что касательная к этой кривой меняется непрерывно и в точке O совпадает с осью Ox (рис. 23). Вдоль оси Oy поток безграничен. Считаем, что поток, бегущий над прямолинейной частью контура, постоянен по величине и направлению и имеет скорость, по величине большую

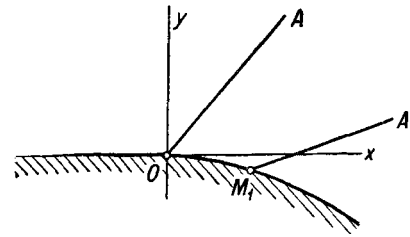

Рис. 23.

скорости звука. Пусть в этой области $v_x = v_1 > a_*$; $v_y = 0$. Проведём характеристику первого семейства через точку O. Характеристика первого семейства OA, проходящая в плоскости (x, y) через точку O, будет, как мы уже знаем, прямой линией [всем её точкам будет отвечать в плоскости (v_x, v_y) одна и только одна точка $M'(v_1, 0)$], значит, во всех её точках y_1' будет иметь одно и то же значение. Чтобы найти движение «вправо» от характеристики OA, напомним, что вследствие постоянства скорости на OA, по сказанному в предыдущем параграфе (задача 3), мы будем здесь иметь не только

$$\zeta\left(\frac{v}{a_*}\right) + \beta = 2\mu$$

вдоль каждой характеристики второго семейства, но и вообще

$$\zeta\left(\frac{v}{a_*}\right) + \beta = \text{const.}$$

во всей части плоскости, ограниченной контуром и характеристикой OA. Это значит, что скорости этой части плоскости все расположатся на одной и той же эпициклоиде второго семейства, проходящей через M'. Проведём эту эпициклоиду. Чтобы найти теперь скорость в какой-либо точке M_1 контура, достаточно провести в плоскости (v_x, v_y) радиус-вектор, параллельный касательной к контуру в точке M_1; пересечение M_1' этого радиуса-вектора с проведённой эпициклоидой и даст искомую скорость. Зная M_1', мы можем найти направление элемента характеристики первого семейства, выходящей из M_1, в плоскости (x, y). Однако легко видеть, что вся характеристика первого семейства, выходящая из M_1, будет прямой линией, так же как и характеристика OA. В самом деле, перемещаясь в (x, y) вдоль характеристики $\overline{M_1A_1}$, мы будем пересекать различные характеристики второго семейства (не обозначены на рисунке), но в плоскости (v_x, v_y) всем этим различным характеристикам отвечает, как мы знаем, одна-единственная эпициклоида второго семейства, проведённая нами через M', скорости вдоль $\overline{M_1A_1}$ найдутся поэтому как пересечение эпициклоиды первого семейства, проходящей через M_1', и всегда одной эпициклоиды второго семейства, идущей через M', т. е. все скорости вдоль $\overline{M_1A_1}$ будут равны по величине и направлению скорости точки M_1, а отсюда и заключаем, что $\overline{M_1A_1}$ есть прямая линия. Таким образом, все характеристики первого семейства в нашей задаче будут прямые линии (характеристики второго семейства будут, конечно, криволинейны). Отметим, что, как в этом легко убедиться из рассмотрения эпициклоиды, выпуклость контура ведёт к тому, что, по мере продвижения вдоль контура «вправо», мы будем встречать всё большие

и большие значения скорости, причём характеристики первого семейства будут становиться всё менее и менее наклонными к оси Ox.

Рассмотрим теперь задачу об обтекании угла.

Предположим, что контур при $x<0$ совпадает с отрицательной ветвью оси Ox, а при $x>0$ имеет уравнение $y=-\operatorname{tg}\beta_0 x$ (рис. 24); по-прежнему над горизонтальной стенкой

$$v_x=v_1\,(>a_*);\quad v_y=0,$$

и мы можем провести характеристику первого семейства $\overline{OA}$, построив предварительно точку $M'(v_1,\ 0)$ в плоскости $(v_x,\ v_y)$. Далее, начинается обтекание угла, причём поток должен в конечном счёте пойти вдоль стенки $\overline{OB}$ (рис. 24); чтобы найти величину скорости этого нового потока, достаточно найти пересечение N' характеристики второго семейства, проходящей через M', с радиусом-вектором в плоскости $(v_x,\ v_y)$, параллельным направлению $\overline{OB}$. Определив N', проведём характеристику первого семейства $\overline{OC}$. Мы можем сказать, что в угле COB поток будет обладать всюду постоянной скоростью, параллельной линии $\overline{OB}$. Поворот потока совершается, таким образом, внутри угла AOC. Пучок прямых, выходящих из O (в том числе OA и OC), представит там характеристики первого семейства, причём во всех точках каждой такой прямой, выходящей из O, скорость будет иметь одно и то же значение, легко определяемое из рассмотрения эпициклоиды второго семейства, проходящей через M'.

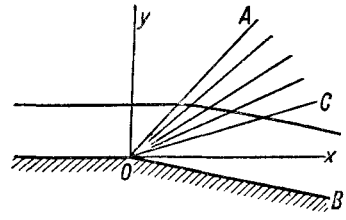

Рис. 24.

Движение внутри угла AOC легко построить при помощи (11.4); именно, для обтекания точки будем иметь просто

$$y-x\operatorname{tg}(\beta+\alpha)=0. \tag{12.1}$$

С другой стороны, по (10.6), в нашем примере будет

$$\beta+\alpha=-\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\operatorname{ctg}\alpha+ \\ +\alpha_1+\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\operatorname{ctg}\alpha_1, \tag{12.2}$$

где α_1 — угол Маха, отвечающий скорости v_1 (когда β равно нулю), т. е. угол между прямой $\overline{OA}$ и осью Ox, причём на основании (9.22):

$$\sin^2\alpha_1=\frac{\varkappa+1}{2}\left(\frac{a_*}{v_1}\right)^2-\frac{\varkappa-1}{2}.$$

Но (12.1) можно записать так:

$$\operatorname{tg}(\beta+\alpha)=\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\theta \quad \text{или} \quad \beta+\alpha=\theta, \tag{12.3}$$

где θ — полярный угол в плоскости (x, y), отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки. Введём ещё угол θ_1, отсчитываемый по часовой стрелке от некоторой новой полярной оси из условия:

$$\theta_1=\alpha_1+\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\operatorname{ctg}\alpha_1-\theta.$$

Тогда (12.2) и (12.3) дадут:

$$\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\operatorname{ctg}\alpha=\theta_1 \tag{12.4}$$

или

$$\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\theta_1\right). \tag{12.5}$$

По этой формуле, вспоминая выражение для ctg α (10.4), можем найти величину скорости на каждом радиусе-векторе, проходящем через начало.

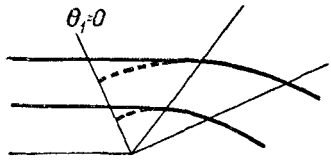

Рис. 25.

Уравнения линий тока в полярных координатах будут:

$$\frac{dr}{v_r}=\frac{r\,d\theta_1}{v_{\theta_1}}$$

(r — радиус-вектор, v_r — проекция скорости на радиус-вектор; v_{θ_1} — проекция скорости на перпендикуляр к радиусу-вектору); при этом, так как радиус-вектор есть в то же время характеристика, а угол между скоростью и характеристикой есть α, то

$$\frac{v_r}{v_{\theta_1}}=\operatorname{ctg}\alpha,$$

и мы можем написать.

$$\frac{dr}{r}=\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\theta_1\right)d\theta_1,$$

откуда для линий тока окончательно получим:

$$r=r_0\left(\cos\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\theta_1\right)^{-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}},$$

где r_0 — радиус-вектор точки, в которой $\theta_1=0$.

На рис. 25 сплошными линиями изображены две такие линии тока. Полярная ось расположена в области, в которой происходит

ещё прямолинейное движение. (Все продолжения линий тока образуют угол $\pi/2$ с осью $\theta_1 = 0$, ибо при $\theta_1 = 0$ будет по (12.5) $\alpha = \pi/2$.)

Найдём ещё крайнюю характеристику, после которой начинается обтекание стенки $y = -\operatorname{tg}\beta_0 x$. Её угол Маха α_2 будет удовлетворять уравнению

$$\alpha_2 - \beta_0 = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{tg}\alpha_2\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{tg}\alpha_1\right)\right] + \alpha_1,$$

а соответствующее ϑ найдётся по формуле

$$\vartheta = \alpha_2 - \beta_0.$$

В том случае, если стенка $y = -\operatorname{tg}\beta_0 x$ отсутствует и газ вырывается под давлением p_1, связанным с v_1 уравнением Бернулли, в среду с давлением p_2, причём $p_2 < p_1$, поток газа будет поворачиваться и скорость его будет расти до тех пор, пока не станет равной величине v_2, получающейся из уравнения Бернулли при данных ϑ и i_0. Тогда для последней характеристики получим значение $\alpha = \alpha_2$ из соотношения (9.21) (a_2 — скорость звука при $v = v_2$):

$$\sin\alpha_2 = \frac{a_2}{v_2}.$$

При этом угол θ_1 наклона струи газа после поворота вокруг обтекаемого угла найдётся по формуле (12.4) в виде:

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{tg}\alpha_2.$$

Наибольшее значение получим, когда газ вырывается в пустоту; здесь $\alpha_2 = p_2 = a_2 = 0$:

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\frac{\pi}{2} \approx 219°19'.$$

Если $p_2 > p_1$ или если после угла O (рис. 24) газ должен двигаться вдоль стенки $y = \operatorname{tg}\beta_0 x$, где $\pi/2 > \beta_0 > 0$, наступает явление сильного разрыва (см. § 13).

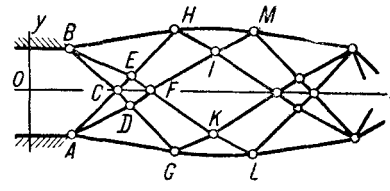

Рис. 26.

Рассмотрим задачу об истечении газа из отверстия.

Пусть газ вырывается из отверстия (две параллельные прямые), причём скорость движения у места выхода AB (рис. 26) имеет компоненты

$$v_x = v_1; \quad v_y = 0;$$

$v_1 > a_1 > 0$ (a_1 — местная скорость звука). Построив точку $M'(v_1, 0)$ в плоскости (v_x, v_y) (рис. 27), проведём через A характеристику

первого семейства в плоскости (x, y), а через точку B — характеристику второго семейства (рис. 26). В угле BCA имеем по-прежнему поток с $v_x = v_1$, $v_y = 0$. Пусть давление в пространстве, в которое выходит газ, будет p_2. Построим в плоскости (v_x, v_y) круг радиуса v_2, определяемого из уравнения Бернулли при $p = p_2$. Двигаясь по эпициклоиде второго семейства, проведённой через M', дойдём до этого круга в точке N' и таким образом узнаем направление скорости после обтекания точки A. Аналогичным образом, привлекая эпициклоиду первого семейства, проходящую через M', найдём скорость P' около точки B (вообще мы, очевидно, будем иметь симметрию по отношению к оси отверстия). Зная N' и P', проведём характеристики $\overline{AD}$ и $\overline{BE}$ и заполним углы CAD и CBE пучками характеристик (см. предыдущую задачу).

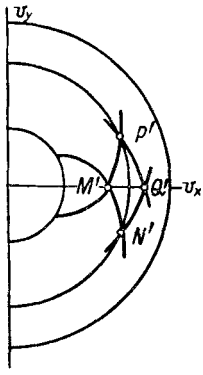

Рис. 27.

Пусть $\overset{\smile}{CD}$ и $\overset{\smile}{CE}$ будут криволинейные отрезки характеристик второго и первого семейства соответственно, выходящие из C. Из рассмотрения движения в углах мы будем знать эти линии, а также будем знать скорости вдоль них. Пользуясь способом, изложенным в задаче 2 предыдущего пункта, мы найдём теперь движение в криволинейном четырёхугольнике $ECDF$ [точке F отвечает точка Q' плоскости (v_x, v_y)] (см. рис. 27). Уменье решать задачу 4 нам даст затем возможность найти движение в области ADG (и BEH), где DG (и EH) — характеристика второго (первого) семейства, проведённая через D (E), причём попутно мы сможем найти форму свободной поверхности $\overset{\smile}{AG}$ ($\overset{\smile}{BH}$)[1]. Определив скорости на DG и DF (EH и EF), можем, решая задачу 2, найти движение в четырёхугольнике $DGKF$ ($FEHI$), где FK (FI) — характеристика второго (первого) семейства, выходящая из F, а GK (HI) — характеристика первого (второго) семейства, идущая из G (H). Затем решаем задачу 4 для области GKL (HIM), причём попутно определяем и свободную поверхность (на этот раз криволинейную) и т. д. Мы предоставляем читателю разбор деталей этой задачи. Мы получим здесь, по-видимому, картину периодического сужения и расширения струи, причём максимальная скорость достигается внутри струи. Картина эта в общем хорошо согласуется с данными эксперимента.

Рассмотрим теперь задачу о движении внутри трубы. Предположим, что в некотором, может быть, криволинейном, сечении трубы $\overset{\smile}{AB}$ поле

[1]) Легко убедиться, что это будут отрезки прямых, а всё движение — плоскопараллельным потоком со скоростями, равными по величине v_2.

скоростей нам известно (рис. 28). Решаем сначала задачу 1, строя последовательно и поле скоростей и все характеристики (в том числе и крайние характеристики $\overset{\smile}{AC}$ и $\overset{\smile}{BC}$), выходящие из точек отрезка $\overset{\smile}{AB}$. Между характеристикой $\overset{\smile}{AC}$ (BC) и стенкой решаем задачу 3, в результате чего находим поле скоростей и характеристики (в том числе крайнюю — CE (CD)) области ACE (BCD). Решаем далее задачу 2 для области $ECDF$ (DF — характеристика первого семейства, идущая через D, EF — характеристика второго семейства, проходящая через E) и т. д.

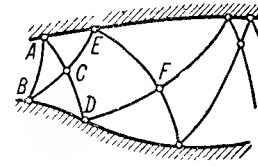

Рис. 28.

Большой практический интерес представляет построение так называемого сопла Лаваля. Здесь речь идёт о получении в трубе, в лабораторной обстановке, сверхзвукового потока, который был бы в некоторой области трубы постоянным по величине (заданной заранее) и направлению. Задача эта распадается на две части: во-первых, требуется получить сверхзвуковой поток, во-вторых, надо сделать этот поток равномерным. Получение сверхзвукового потока основывается на том факте, что если мы находимся за пределами критической скорости, то при увеличении скорости трубки тока будут расширяться (в то время как при дозвуковых скоростях трубка тока тем уже, чем больше скорость) (см. § 8 этой главы). Если поэтому нам удастся, всё увеличивая скорость вдоль трубы (путём сужения трубы), достигнуть в некотором сечении трубы критической скорости и если затем мы заставим нашу трубу в направлении потока расширяться, то мы и окажемся в области сверхзвуковых скоростей. Как практически это достигается, мы разберём позже (§ 21), тогда же мы увидим, какого рода трудности здесь встречаются. Сейчас же предполагаем, что, например, $\overset{\smile}{A_0B_0}$ (рис. 29) есть сечение трубы (ось трубы совпадает с осью Ox), в котором скорости равны критической. Плавным расширением добьёмся того, что на оси трубы (последнюю мы считаем симметричной относительно оси Ox) получится нужная нам величина скорости. Предположим при этом, что в нашей трубе не возникло никаких поверхностей сильного разрыва (см. § 21). Пусть нужная нам величина v_1 скорости получилась в точке A на оси Ox. Теперь попробуем сделать так, чтобы, начиная от некоторого сечения трубы, скорости всех точек были далее направлены вдоль оси трубы и равны в точности v_1. Нам придётся для этого подобрать форму контура трубы, начиная от некоторой точки. Именно

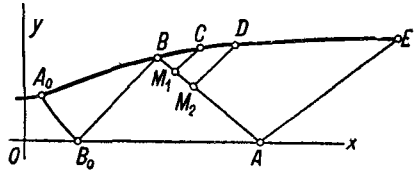

Рис. 29.

обратим внимание на точку B контура трубы, находящуюся на характеристике второго семейства, проходящей через ту точку A оси трубы, в которой мы уже получили нужную нам скорость v_1. Пусть M_1, M_2, ... суть точки пересечения этой характеристики с густой сеткой характеристик первого семейства. В плоскости (v_x, v_y) точкам B, M_1, M_2, ..., A пусть отвечают лежащие на одной и той же эпициклоиде второго семейства точки B', M_1', M_2', ..., A' (рис. 30).

Мы желаем получить «справа» от A поток, параллельный оси Ox и имеющий повсюду скорость v_1. Но тогда характеристика первого семейства, проходящая через A, должна оказаться строго прямолинейной, и направление её известно. Тогда в соответствии с тем, что мы уже говорили при решении задачи 3, и все характеристики первого семейства, выходящие из M_1, M_2, ..., также будут строго прямолинейны. Это означает, что скорости всех точек, лежащих на характеристике, идущей из M_1, например, будут равны по величине и направлению скорости точки M_1. Достаточно поэтому проделать следующее построение: в точке B продолжаем стенку по касательной до пересечения в точке C с характеристикой $\overline{M_1C}$ (прямой). От точки C мы должны затем направить стенку параллельно скорости в M_1 (т. е. параллельно лучу OM_1', рис. 30) и идти так до пересечения в D с характеристикой $\overline{M_2D}$; начиная от D, направляем стенку параллельно лучу OM_2' и т. д. Так мы дойдём, наконец, до точки E (рис. 29), после чего контур следует взять параллельным оси Ox.

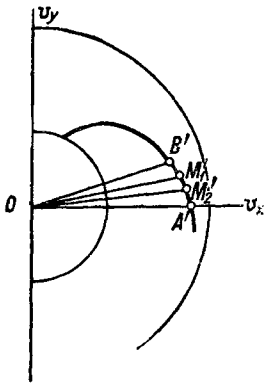

Рис. 30.

Заметим, что отношение ширины рабочего сечения трубы к ширине критического сечения мы могли бы получить заранее из условия равенства количества движения в этих обоих сечениях:

$$F_*\rho_* a_* = F\rho_1 v_1$$

(F_* — ширина критического сечения; ρ_* — критическая плотность; F — ширина сечения с потоком v_1; ρ_1 — плотность при скорости v_1). В таблице на стр. 54 нами были даны значения $\rho_1 v_1/\rho_* a_*$ в функциях от числа давления, или, если угодно, от v_1/a_*.

§ 13. Движение газа около вогнутой поверхности. Образование сильного разрыва. Движение внутри угла, меньшего чем π. Обтекание профиля с острой передней частью. Пусть газ движется вдоль контура, который при $x < 0$ совпадает с осью Ox, а при $x > 0$

представляется в виде кривой, угол наклона касательной к которой есть, по крайней мере, в некоторой области около O непрерывная, монотонно возрастающая функция x. Касательная к контуру в точке O совпадает с осью Ox. Поток, бегущий над прямолинейной частью контура, имеет постоянную по величине и направлению сверхзвуковую скорость: $v_x = v_1 > a_*$, $v_y = 0$. Скорость эту отметим в плоскости (v_x, v_y) в виде точки M' оси v_x и проведём затем характеристику первого семейства через точку O (рис. 31). Эта характеристика будет прямой линией. Прямыми будут также и все остальные характеристики первого семейства, выходящие из различных точек M_1, M_2, ... контура. Различие по сравнению с задачей обтекания выпуклого контура заключается, однако, в том, что чем дальше мы будем подвигаться по контуру от точки O, тем круче по отношению к оси Ox будут становиться характеристики. В самом деле, перемещаясь по контуру, мы в плоскости (v_x, v_y) будем двигаться по эпициклоиде второго семейства, проходящей через M' (см. первый из разобранных в предыдущем параграфе случаев), причём точки M_1', M_2', ..., изображающие на эпициклоиде скорости точек O, M_1, M_2, ..., получаются путём пересечения эпициклоиды с радиусами-векторами, параллельными касательным в O, M_1, M_2, ... к рассматриваемому контуру; но тогда, по мере того как мы будем перемещаться от M_1' к M_2' и т. д., эти радиусы-векторы будут поворачиваться против часовой стрелки (вследствие вогнутости контура), следовательно, характеристика первого семейства, проведённая через M_1, будет наклонена к оси Ox под углом бо́льшим, чем характеристика, идущая через O, и т. д. Но если это так, то обязательно найдутся точки, в которых две характеристики одного и того же (первого) семейства будут между собой пересекаться. Так как вдоль характеристики скорость имеет своё постоянное значение, то в месте встречи двух таких характеристик мы получим, грубо говоря, два разных значения скорости. Здесь наступает явление сильного разрыва.

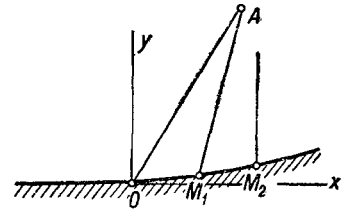

Рис. 31.

Чтобы найти точку A разрыва, нужно определить предел, к которому стремится точка пересечения характеристики, проходящей через O, и характеристики, идущей через M_1, когда M_1 приближается к O. Уравнение характеристики $\overline{OA}$ будет

$$y = y_1'(0,\ 0)\,x, \tag{13.1}$$

где $y_1'(0, 0)$ обозначает y_1' в точке $x = y = 0\,(O)$; уравнение характеристики M_1A будет

$$y - \Delta y_0 = y_1'(\Delta x_0, \Delta y_0)(x - \Delta x_0), \tag{13.2}$$

где Δx_0, Δy_0 — координаты точки M_1 контура. Выразим координаты вдоль контура — x_0, y_0 — параметрически через угол β наклона кривой к оси Ox; тогда y_1 вдоль контура будет функцией одного β; определим x_A (абсциссу A) из системы уравнений (13.1), (13.2) (ищется точка пересечения):

$$x_A = \frac{\Delta y_0 - y_1'(\Delta x_0, \Delta y_0)\,\Delta x_0}{y_1'(0, 0) - y_1'(\Delta x_0, \Delta y_0)}.$$

Деля справа числитель и знаменатель на $\Delta\beta$ (угол наклона контура в точке M_1) и переходя к пределу, полагая $\Delta\beta \to 0$, а с ним и $\Delta x_0 \to 0$ и $\Delta y_0 \to 0$, получим $\left[\left(\frac{dy_0}{d\beta}\right)_{\beta=0} = 0\right]$:

$$x_{A\,\text{пред}} = \frac{y_1'(0, 0)\left(\frac{dx_0}{d\beta}\right)_{\beta=0}}{\left(\frac{dy_1'}{d\beta}\right)_{\beta=0}} \text{ *)}.$$

Чтобы найти y_1' в функции β, вспомним, что

$$y_1' = \operatorname{tg}(\beta + \alpha),$$

где α — угол между характеристикой $\overline{M_1A}$ и линией тока; но наш контур является в то же время и линией тока, поэтому, вспоминая определение α (9.22), а также принимая в расчёт, что «справа» от прямолинейной характеристики первого семейства OA будет выполняться (10.3) с нижним знаком, получим без труда:

$$x_{A\,\text{пред}} = \left(\frac{dx_0}{d\beta}\right)_{\beta=0} \frac{2\sin\alpha_0\cos^3\alpha_0}{\varkappa + 1}; \qquad y_{A\,\text{пред}} = \left(\frac{dx_0}{d\beta}\right)_{\beta=0} \frac{2\sin^2\alpha_0\cos^2\alpha_0}{\varkappa + 1},$$

где

$$\sin\alpha_0 = \frac{a_1}{v_1}.$$

Прежде чем решать нашу задачу дальше, посмотрим, что будет, когда на контуре имеется угловая точка. Сперва рассмотрим случай,

---

*) Формула эта справедлива только в том случае, когда кривизна обтекаемого контура будет отлична от нуля в точке O. С. Валландер показал, что если $\left(\frac{d\beta}{dx_0}\right)_{\beta=0} = 0$, то разрыв образуется впервые не на характеристике (13.1), а на одной из следующих характеристик. В некоторых случаях разрыв также может образоваться и не на первой характеристике даже при $\left(\frac{d\beta}{dx_0}\right)_{\beta=0} \neq 0$.

когда вдоль контура (рис. 32):

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x < 0; \quad y = \operatorname{tg}\beta_0 x \quad \text{при} \quad x > 0 \quad (0 < \beta_0 < m),$$

где m — некоторая положительная величина, связанная с v_1, о которой будет сказано ниже. Поверхность разрыва начнётся здесь непосредственно у точки O.

Пусть слева набегает поток

$$v_x = v_1 > a_*; \quad v_y = 0.$$

По прохождении поверхности разрыва поток получит новую скорость и станет параллельным наклонной стенке. Найдём величину этой скорости, а также направление линии разрыва (последняя будет прямой, ибо после её прохождения скорость опять будет всюду постоянной). Обратимся к плоскости (v_x, v_y) и в ней проведём гипоциссоиду (7.14), отвечающую

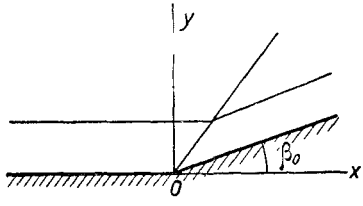

Рис. 32.

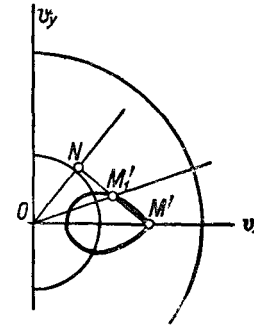

Рис. 33.

скорости v_1. Построим радиус-вектор MO_1' под углом β_0 к оси v_x: точка M_1' его встречи с гипоциссоидой даст величину скорости потока наклонной стенки (рис. 33), а описанный в § 7 приём позволит найти направление ON, параллельное направлению разрыва в O [1]). Существенно при этом отметить, что наша задача допускает решение, о котором мы здесь говорим лишь в том случае, если угол β_0 не будет слишком велик. Именно должно быть $\beta_0 < \beta_*$, где β_* — полярный угол в точке пересечения круга $v = a_*$ с гипоциссоидой, отвечающей нашему v_1 [2]).

[1]) Из двух точек пересечения прямой OM_1' с гипоциссоидой одна всегда находится в дозвуковой области (внутри круга радиуса a_*), другая — в сверхзвуковой. Мы выбрали сверхзвуковой режим (точка M_1'). Эксперимент показывает, что из двух возможных режимов осуществляется именно выбранный нами. Строгого математического доказательства необходимости выбора сверхзвукового режима ещё не имеется.

[2]) Если угол β_0 будет больше, чем β_*, но меньше, чем угол β_{max}, образуемый осью v_x с тем радиусом-вектором плоскости (v_x, v_y), который касается гипоциссоиды, то можно говорить по-прежнему о движении рас-

Чтобы иметь возможность решать задачи обтекания угла при различных значениях v_1, следует изобразить заранее [в плоскости (v_x, v_y)] семейство гипоциссоид, зависящих от параметра v_1. Вводя

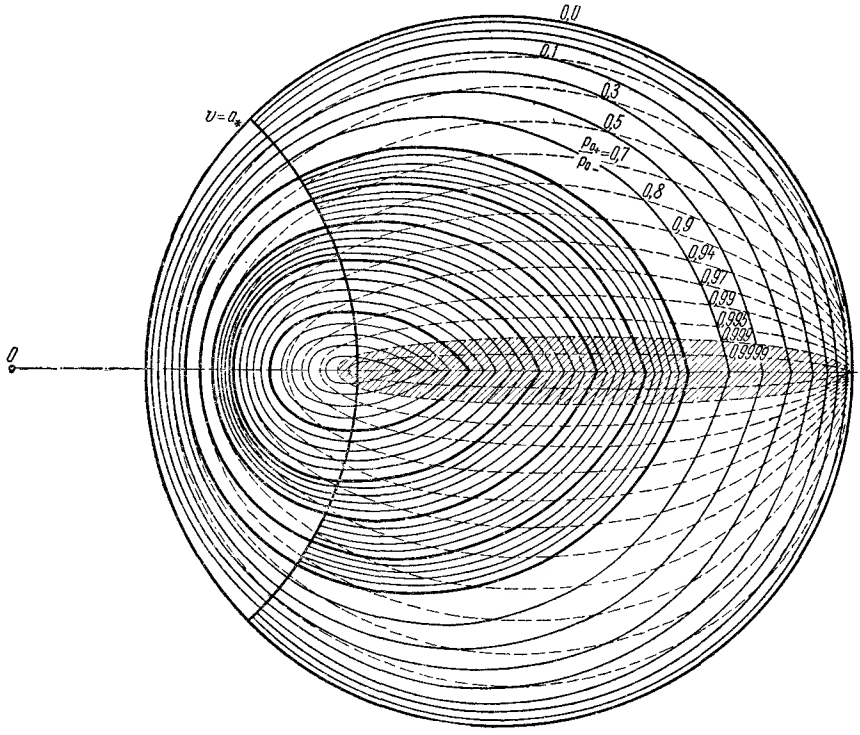

Рис. 34.

величины v_1/a_*, v_x/a_*, v_y/a_* и заменяя в (7.14) a_1^2 через v_1^2 посредством уравнения Бернулли, получим для этого семейства линий уравнения

$$\left(\frac{v_y}{a_*}\right)^2 = \left(\frac{v_1}{a_*} - \frac{v_x}{a_*}\right)^2 \frac{\dfrac{v_x}{a_*} - \dfrac{a_*}{v_1}}{\dfrac{a_*}{v_1} + \dfrac{2}{\varkappa+1}\dfrac{v_1}{a_*} - \dfrac{v_x}{a_*}}. \qquad (13.3)$$

На рис. 34 изображено это семейство линий для различных v_1/a_* (сплошные кривые)[1]).

сматриваемого типа, только теперь скорость после прохождения разрыва станет дозвуковой.

Если $\beta > \beta_{max}$, то решения рассматриваемого типа не будет — поверхность разрыва отскакивает от точки O (см. ниже).

[1]) Здесь же нанесены пунктиром кривые постоянных значений p_{0+}/p_{0-} (стр. 43).

В рассмотренном нами случае угла простота заключается в том, что после прохождения разрыва поток становится снова прямолинейным, что линия разрыва есть прямая и что скачок энтропии всюду постоянен [формула (7.10) и т. п.], а потому движение остаётся безвихревым. Обратимся теперь к тому случаю, когда стенка совпадает с отрицательной осью Ox при $x < 0$, а начиная от точки O переходит в криволинейный контур, составляющий в точке O с осью Ox угол β_0, малый, но отличный от нуля [1]). Мы предположим для большей иллюстративности, что стенка от передней кромки до некоторой точки M является прямолинейной (её уравнение: $y = \operatorname{tg}\beta_0 x$) и только потом начинает плавно переходить в кривую (рис. 35). Строим гипоциссоиду, отвечающую скорости v_1 набегающего параллельно оси Ox потока, и находим направление разрыва OA около точки O, так же как и в разобранном уже случае угла. Из точки M проводим характеристику первого семейства до пересечения A с построенным элементом кривой разрыва. Вследствие прямолинейности

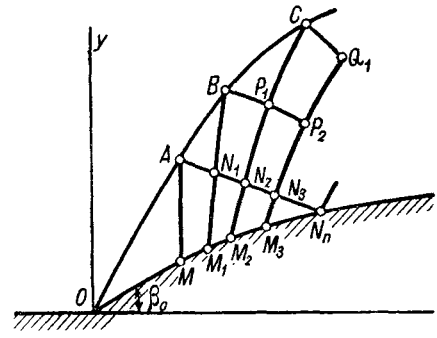

Рис. 35.

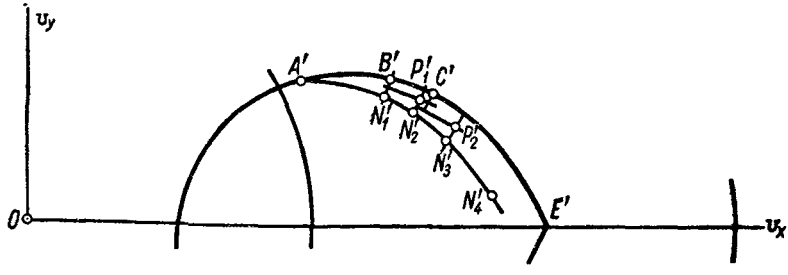

Рис. 36

отрезка $\overline{OM}$, отрезок $\overline{OA}$ линии разрыва будет строго прямолинейным, скорости во всех точках области OAM будут постоянны по величине и направлению и изобразятся одной точкой A' плоскости (v_x, v_y) (рис. 36); движение будет здесь безвихревым, и характеристика $\overline{MA}$ будет строго прямой линией. Решим задачу 3 для области,

[1]) Достаточно взять $\beta_0 < \beta_*$, где β_* есть угол, о котором речь шла выше.

ограниченной характеристикой $\overline{MA}$, контуром $\overset{\frown}{MN_n}$ и характеристикой второго семейства (криволинейной) $\overset{\frown}{AN_n}$, проходящей через A. В этой области задача может быть решена точно, ибо вдоль $\overline{MA}$ скорости всюду одинаковы, так что здесь будет выполняться соотношение

$$\zeta\left(\frac{v}{a_*}\right)+\beta=\text{const}.$$

(см. § 11, а также § 15). Далее начинаем приближённое графическое решение.

Нанесём на характеристике $\overset{\frown}{AN_n}$ густой ряд точек N_1, N_2, ...; им отвечают известные нам точки N_1', N_2', ... эпициклоиды второго семейства, проходящей через A'. Проведём через точку N_1 элемент характеристики первого семейства $\overline{N_1B}$ до пересечения в точке B с продолжением прямой разрыва $\overline{OA}$. Скорость B' в точке B найдётся на пересечении с нашей гипоциссоидой эпициклоиды первого семейства, проходящей через N_1'. Зная B' и N_2', построим с помощью их элементы характеристик $\overline{N_2P_1}$ первого семейства и $\overline{BP_1}$ второго семейства. Было бы ошибочно думать, что скорость в точке P_1 может быть найдена простым пересечением эпициклоиды второго семейства, проходящей через B', и эпициклоиды первого семейства, проведённой через N_2'. Такое построение справедливо лишь для безвихревого движения, а движение, происходящее справа от поверхности разрыва и характеристики $\overset{\frown}{AN_n}$, обязательно будет вихревым.

В самом деле, наклон линии разрыва в точке B найдётся как направление перпендикуляра, опущенного из точки O в плоскости (v_x, v_y) на продолжение прямой $\overline{E'B'}$, и так как B' не совпадает с A', то наклон в точке B будет отличен от наклона в O или в A, строго говоря, уже начиная от точки A, наша линия разрыва становится кривой, и только неточность графического метода заставила нас заменить прямой линией $\overline{OAB}$ кривую линию разрыва, в то время как на самом деле лишь касательная в точке A к линии разрыва совпадает с прямой $\overline{AB}$. В соответствии с формулами (7.2) и (7.10), ϑ_+ будет вдоль линии разрыва теперь меняться от одной линии тока к другой, начиная от точки A, а тогда в формулах (9.18), (9.19) нельзя положить $\Omega=0$. Чтобы найти скорость в P_1, обратимся к уравнениям (9.18) и (9.19). Перемещению от B до P_1 вдоль характеристики второго семейства, выходящей из B, отвечают изменения скоростей, связанные соотношением (9.19). Заменяя, как всегда, дифференциалы конечными разностями, пишем:

$$\Delta v_y=(v_y)_{P_1}-(v_y)_B;\quad \Delta v_x=(v_x)_{P_1}-(v_x)_B;\quad \Delta x=x_{P_1}-x_B.$$

Вследствие (9.19), точка P_1' плоскости (v_x, v_y) с координатами $(v_x)_{P_1}$, $(v_y)_{P_1}$ найдётся поэтому где-то на элементе прямой

$$v_y - v_{yB} + \frac{1}{(y_1')_B}(v_x - v_{xB}) = \left(\frac{a\Omega\sqrt{v^2-a^2}}{v_y^2-a^2}\, y_2'\right)_B (x_{P_1} - x_B). \quad (13.4)$$

При $\Omega = 0$ мы должны были бы искать v_x и v_y на элементе прямой, проходящей через B' и параллельной элементу эпициклоиды второго семейства; если $\Omega \neq 0$, мы должны по (13.4) искать $(v_x)_{P_1}$ и $(v_y)_{P_1}$ на прямой, параллельной той же эпициклоиде второго семейства, не проходящей через точку B'. Чтобы построить эту прямую, мы должны знать правую часть (13.4). Туда входят известные в точке B величины v, a, y_2', v_y и $x_{P_1} - x_B$. Таким образом, нам надо только узнать

$$\Omega = \frac{a^2}{\varkappa - 1}\frac{\rho}{\vartheta}\frac{d\vartheta}{d\psi}.$$

Заменим снова $d\vartheta$ на $\Delta\vartheta$ и $d\psi$ на $\Delta\psi$, причём для определения Ω в точке B напишем:

$$\Delta\vartheta = \vartheta_B - \vartheta_A; \quad \Delta\psi = \psi_B - \psi_A.$$

Так как «слева» от поверхности разрыва $v_x = v_1 = \text{const.}$, $v_y = 0$, то, очевидно, там будет

$$\psi = \rho_1 v_1 y \quad \left(\rho_1 = \frac{1}{\vartheta_1}\, p_1^{1/\varkappa}\right);$$

но линии тока не претерпевают разрыва, а только изламываются при переходе через поверхность разрыва, поэтому можно положить

$$\psi_A = \rho_1 v_1 y_A; \quad \psi_B = \rho_1 v_1 y_B.$$

Переходя к определению ϑ_A и ϑ_B, заметим, что здесь, очевидно, идёт речь о ϑ_+, так что надо применить формулы (7.2) и (7.10):

$$\frac{\vartheta_{A,B}}{\vartheta_1} = \frac{\rho_1}{\rho}\left[\frac{(\varkappa+1) - \frac{\rho_1}{\rho}(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)\frac{\rho_1}{\rho} - (\varkappa-1)}\right]^{1/\varkappa};$$

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\varkappa - 1 + \frac{2a_1^2}{v_1^2}(1 + \operatorname{tg}^2\varphi_{A,B})}{\varkappa+1}, \quad (13.5)$$

где φ_A и φ_B — углы наклона нормали к линии разрыва в точках A и B соответственно.

Точка P_1 (x_{P_1}, y_{P_1}) лежит на пересечении характеристики $\overline{BP_1}$ и характеристики первого семейства $\overline{N_2P_1}$. Перемещаясь по $\overline{BP_1}$, мы

будем двигаться в плоскости (v_x, v_y) по прямой (13.4); перемещаясь по $\overline{N_2P_1}$, мы будем, очевидно, двигаться в плоскости (v_x, v_y) по прямой

$$v_y - v_{yN_2} + \frac{1}{(y_2')_{N_2}}(v_x - v_{xN_2}) = -\left(\frac{a\Omega\sqrt{v^2-a^2}}{v_y^2-a^2}\,y_1'\right)_{N_2}(x_{P_1} - x_{N_2}). \tag{13.6}$$

Но $(\Omega)_{N_2} = 0$, ибо N_2 лежит ещё в безвихревой области. Таким образом, перемещение по (13.6) есть перемещение по элементу эпициклоиды первого семейства, проходящей через N_2', и мы найдём точку P_1' на пересечении этой последней эпициклоиды с элементом прямой (13.4). Зная P_1', проведём обе характеристики $\overline{P_1P_2}$ и $\overline{P_1C}$, где P_2 — точка, лежащая на характеристике первого семейства, выходящей из N_3, а C — точка линии разрыва. Скорость в C найдётся как точка C' пересечения прямой (9.18) [типа (13.6)] с гипоциссоидой, скорость же в P_2 — как точка P_2' пересечения прямой (9.19) [типа (13.4)] с эпициклоидой первого семейства, идущей из N_3'. Нам придётся в обоих случаях знать Ω в точке P_1; чтобы определить $(d\vartheta/d\psi)_{P_1}$, заметим, что изменение $d\psi$, происшедшее благодаря перемещению от B к P_1, будет

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy = -\rho\left(v_y - y_2' v_x\right)dx$$

или

$$\Delta\psi = -\rho_B\left(v_{y_B} - y_{2_B}' v_{x_B}\right)\left(x_{P_1} - x_B\right),$$

причём

$$\frac{\rho_1}{\rho_B} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} + \frac{2a_1^2}{(\varkappa+1)\,v_1^2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\varphi_B\right);$$

что же касается $\Delta\vartheta$, то оно может быть получено интерполированием, ибо, например, изменение $\vartheta_B - \vartheta_A$ известно. Нужно помнить только, что если окажется $\psi_{P_1} < \psi_A$, то надо просто положить $\Omega_{P_1} = 0$. Определив скорости в C и P_2, мы можем по указанным выше рецептам найти в этих точках Ω, а также построить характеристики $\overline{CQ_1}$ и $\overline{P_2Q_1}$. Скорость в Q_1 (не обозначена на рисунке) найдётся затем как пересечение в плоскости (v_x, v_y) элементов линий (9.18) и (9.19), отвечающих точкам C и P_2 и т. д. Наша задача, таким образом, будет решена.

Формулы (9.18) и (9.19) представляют то неудобство, что в правые части их входит dx; таким образом, мы как бы отдаём предпочтение координате x перед координатой y, в то время как они равноправны. Вспомним, однако, что направление прямой (9.18) или (9.19)

[где вместо dv_x и dv_y стоит $v_x - (v_x)_{M'}$ и $v_y - (v_y)_{M'}$] легко определяется; чтобы провести эту прямую, нам, таким образом, достаточно узнать, на каком расстоянии δ от точки M' плоскости (v_x, v_y) она проходит. Согласно известному правилу аналитической геометрии, чтобы найти δ, приведём (9.18) и (9.19) к нормальному виду, умножая их на $\frac{y_2'}{\sqrt{1+y_2'^2}}$ и $\frac{y_1'}{\sqrt{1+y_1'^2}}$ соответственно. Замечая, что элемент дуги ds вдоль характеристики первого семейства будет

$$ds_1 = \sqrt{dx^2+dy^2} = |dx|\sqrt{1+y_1'^2},$$

а вдоль второго

$$ds_2 = |dx|\sqrt{1+y_2'^2},$$

мы получим величину δ в виде:

$$\delta = \left| \frac{a\sqrt{v^2-a^2}}{v_y^2-a^2}\,\Omega\,\frac{y_1'y_2'}{\sqrt{1+y_1'^2}\sqrt{1+y_2'^2}}\,ds_{1,2} \right|.$$

Но

$$\frac{y_1'}{\sqrt{1+y_1'^2}}\,\frac{y_2'}{\sqrt{1+y_2'^2}} = \frac{y_1'y_2'}{\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2+y_1'^2y_2'^2}} = \frac{y_1'y_2'}{\sqrt{(y_1'+y_2')^2+(1-y_1'y_2')^2}}$$

и вследствие свойств корней квадратного уравнения (9.11):

$$\frac{y_1'y_2'}{\sqrt{1+y_1'^2}\sqrt{1+y_2'^2}} = \frac{v_y^2-a^2}{(v_x^2-a^2)\sqrt{4\frac{v_x^2v_y^2}{(v_x^2-a^2)^2}+\left(1-\frac{v_y^2-a^2}{v_x^2-a^2}\right)^2}} = \frac{v_y^2-a^2}{v^2}.$$

Таким образом,

$$\delta = \left| \frac{a\sqrt{v^2-a^2}}{v^2}\,\Omega\,ds_{1,2} \right|; \quad \Omega = \frac{a^2}{\varkappa+1}\,\rho\,\frac{d\ln\vartheta}{d\psi}. \tag{13.7}$$

Остаётся только определить, в какую сторону следует отложить δ, для чего достаточно найти, например, знак проекции δ на ось Ox.

Рассматривая (9.13) и (9.14), легко убеждаемся, что, так как

$$\operatorname{sign}(y_1' - y_2') = \operatorname{sign}\frac{\sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2},$$

$$\operatorname{sign}\operatorname{пр}_x \delta = \operatorname{sign}\left\{(y_1' - y_2')\frac{d\vartheta}{d\psi}\,dx\right\}^{1}).$$

Для практических вычислений удобно, как всегда, ввести безразмерные величины: $\bar{v}$, $\bar{a}$, $\bar{\vartheta}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\delta}$, $\bar{s}$, связанные с v, a, ... соотношениями

$$v = a_* \bar{v}; \quad a = a_* \bar{a}; \quad \vartheta = \vartheta_1 \bar{\vartheta}, \quad \psi = \rho_1 a_* l \bar{\psi}, \quad \delta = a_* \bar{\delta}, \quad s = l\bar{s},$$

где l — произвольная величина. Замечая, что $a_1^2 = \varkappa \vartheta_1^{\varkappa} \rho_1^{\varkappa - 1}$, и заменяя в (13.7) a^2 по уравнению Бернулли, мы придем к следующему выражению для $\bar{\delta}$:

$$\bar{\delta} = \left| \frac{(\varkappa+1)^2}{4\varkappa} \frac{\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} v^2\right)^{\frac{3\varkappa - 1}{2(\varkappa - 1)}}}{\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} v_1^2\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}} \frac{(\bar{v}^2 - 1)^{1/2}}{\bar{v}^2} \frac{d\bar{\vartheta}^{-\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}}{d\bar{\psi}} d\bar{s}_{1,2} \right|,$$

где $\bar{v}_1 = \frac{v_1}{a_*}$, а

$$\bar{\vartheta} = \left\{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} + \frac{2}{\varkappa + 1}\frac{\bar{a}_1^2}{\bar{v}_1^2}(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)\right\}\left\{\frac{2\varkappa}{\varkappa + 1}\left(\frac{\bar{v}_1}{\bar{a}_1}\right)^2 \cos\varphi - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\right\}^{1/\varkappa}.$$

Изложенная здесь вихревая задача была впервые решена Ф. Франклем.

Несколько слов о решении задачи, о которой мы говорили в начале этого пункта. Пусть точка A есть первая точка характеристики первого семейства, выходящей из O, в которой образовался сильный разрыв (рис. 37). В области между прямой $\overline{OA}$, контуром и характеристикой $\overset{\smile}{AB}$ второго семейства, проходящей через A, мы имеем, вообще говоря, течение с прямолинейными характеристиками первого семейства. Но дальнейшее решение задачи ничем не будет отличаться от решения уже разобранной задачи об обтекании углового контура, причём линия $\overset{\smile}{AB}$ будет играть роль линии $\overset{\smile}{AN_n}$ (рис. 35).

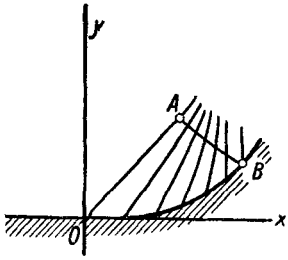

Рис. 37.

Рассмотрим теперь пример. Пусть на неподвижную пластинку AB, наклонённую под углом $\beta_0 (< \beta_*)$ к оси Ox, набегает поток, обла-

[1]) Для характеристик 2-го семейства. Для 1-го семейства знак будет обратным.

дающий сверхзвуковой скоростью $v_1 > a_*$, параллельной оси Ox. Посмотрим сначала, что происходит вблизи пластинки. Над пластинкой, начиная от точки A (рис. 38), поток будет непрерывно поворачиваться до тех пор, пока не станет параллельным направлению пластинки (см. предыдущий пункт: обтекание угла, бóльшего чем π); далее, от точки B пойдёт линия сильного разрыва; пройдя сквозь неё, поток снова станет параллельным оси Ox (см. начало этого пункта: движение внутри угла, меньшего чем π). Под пластинкой в точке A начнётся разрыв, и поток станет параллельным к направлению пластинки; около же точки B вдоль характеристики поток начнёт плавно поворачиваться (обтекание угла, бóльшего чем π) до тех пор, пока, пройдя последнюю выходящую из B характеристику, не станет вновь параллельным оси Ox. Отметим теперь точки E и D, в которых линии прямолинейных разрывов пересекаются с крайними характеристиками BE и AD, проходящими через B и A соответственно. Характеристика EF, идущая через E, будет, очевидно, играть роль характеристики $\overset{\smile}{AN_n}$ на рис. 35. Таким образом, от точки E начнётся искривление линии разрыва, образование вихрей и искривление характеристик; аналогичную роль играет характеристика $\overset{\smile}{CD}$. Таким образом, на больших расстояниях от пластинки движение будет носить весьма сложный характер. Так, по Ландау, там должны возникнуть дополнительные поверхности разрыва. Мы можем ожидать, что только в области

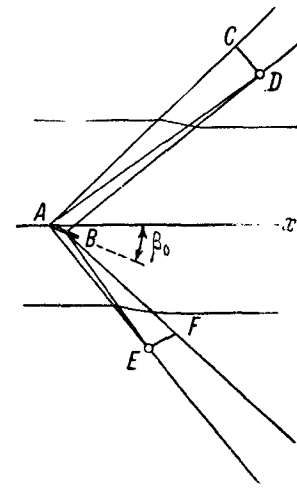

Рис. 38.

$$y_F \leqslant y \leqslant y_D$$

мы будем иметь сзади пластинки скорости, постоянные по величине и направлению. Заметим при этом, что скорости будут различны сверху и снизу от линии, проходящей через B параллельно оси Ox; в этом легко можно убедиться из рассмотрения эпициклоид плоскости (v_x, v_y) и гипоциссоид.

§ 14. Крыло в плоскопараллельном сверхзвуковом потоке. Приближённые формулы Аккерета, Буземана, Донова. Гиперзвуковые движения. Парадокс Эйлера-Даламбера справедлив не только для несжимаемой, но и для сжимаемой жидкости, но лишь для случая дозвуковых скоростей. Крыло, двигающееся со сверхзвуковой скоростью, обязательно подвергается действию сопротивления (так называемого, волнового) и подъёмной силы, причём эти силы, вообще

говоря, значительно превышают обычные силы, происходящие за счёт образования вихрей в пограничном слое крыла.

Пусть крыло помещено в поток сжимаемой жидкости, бегущей параллельно оси Ox со скоростью $v_1 > a_*$. Предположим, что крыло имеет острую переднюю кромку (поместим на ней начало координат O) (рис. 39) и острую заднюю кромку (точка P). Проекции на оси Ox и Oy сил, действующих на крыло, делённые на величину qT, где $q = \rho_1 v_1^2/2$, а T — «хорда» крыла, т. е. длина $\overline{OP}$, обозначим через C_x и C_y.

Тогда, очевидно, будет:

$$C_x = \frac{1}{qT}\left(\int_0^{s_в} p_в \sin\beta_в\, ds_в - \int_0^{s_н} p_н \sin\beta_н\, ds_н\right), \tag{14.1}$$

$$C_y = \frac{1}{qT}\left(-\int_0^{s_в} p_в \cos\beta_в\, ds_в + \int_0^{s_н} p_н \cos\beta_н\, ds_н\right), \tag{14.2}$$

где s — длина дуги вдоль контура крыла, β — угол касательной к контуру с осью Ox, знак «в» означает, что величина вычисляется в точках верхней части контура, а «н» — в точках нижней части контура. Угол β положителен, если он откладывается против часовой стрелки от оси Ox и отрицателен, если он откладывается по часовой стрелке. Касательная к контуру направлена в сторону возрастания дуги s. Дуга s отсчитывается как для нижней, так и для верхней ветви контура от точки O.

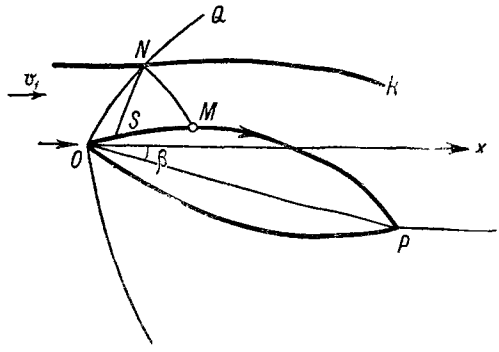

Рис. 39.

Чтобы найти $p_в$, мы должны отдельно решить задачу обтекания контура, состоящего из отрицательной части оси Ox, верхней части крыла и прямой, параллельной оси Ox и выходящей из P (жидкость расположить «над» этим контуром). Аналогичным образом $p_н$ получится, как давление на крыле, образующееся в результате обтекания контура, составленного из отрицательной оси Ox, нижней части крыла и прямой (параллельной оси Ox), выходящей из P.

Заметим, что если бы оказалось, например, что для всех точек верхней части контура

$$\beta_в \leqslant 0$$

(крыло лежит «под» осью Ox), то характеристика первого семейства, выходящая из O, была бы прямолинейна (так же как и все характеристики первого семейства, начинающиеся в разных точках верха крыла), и мы могли бы найти $p_в$ в функции от $\beta_в$, т. е. в функции от места на крыле, совершенно точно. Для этого достаточно было бы написать

$$\zeta\left(\frac{v_в}{a_*}\right)=\zeta\left(\frac{v_1}{a_*}\right)-\beta_в$$

(считаем, что $\beta_в(0)=0$), а затем, решив это равенство относительно $v_в$, вставить полученное значение $v_в$ в уравнение Бернулли [например, в (8.10)], и разрешить последнее относительно $p_в$. Аналогично можно было бы найти $p_н$, если бы оказалось

$$\beta_н \geqslant 0.$$

В случае, если $(\beta_в)_0 > 0$ и $(\beta_н)_0 < 0$, перед крылом образуется поверхность разрыва (рис. 35); предположим, что $|(\beta_в)_0| < \beta_*$ и $|(\beta_н)_0| < \beta_*$, тогда после прохождения разрыва скорости останутся сверхзвуковыми. Наличие кривых линий разрыва, исходящих в обе стороны от O, усложняет задачу, порождая, с одной стороны, искривление характеристик обоих семейств, с другой стороны, — вихри.

Графический метод, изложенный в предыдущем пункте, позволяет и здесь решить задачу до конца. Однако, он не даёт готовых окончательных формул расчёта (для C_x и C_y, например), а заставляет решать задачу для каждого случая отдельно, так сказать, арифметически; кроме того, графический метод может здесь привести к большим неточностям, так как характеристики $\overset{\frown}{MA}$, $\overset{\frown}{M_1B}$ и др. (рис. 35) будут практически почти параллельны линии разрыва $\overset{\frown}{AO}$.

Однако для случая тонких и мало наклонённых к оси крыльев (малые абсолютные значения углов $\beta_в$ и $\beta_н$) можно провести промежуточные операции в общем виде и дать готовые формулы, по которым, зная форму контура крыла, можно найти непосредственно давление в каждой точке крыла, а также C_x и C_y. Это было сделано впервые Аккеретом (1925 г.) для случая, когда углы $|\beta|$ настолько малы, что членами, содержащими их квадраты, можно пренебречь по сравнению с единицей (линеаризация уравнений); Буземан и Вальхнер (1933 г.) дали формулы, учитывающие квадраты углов $|\beta|$, наконец, Донов (1937 г.) учёл третьи и четвёртые степени углов $|\beta|$. Мы изложим ход рассуждений и окончательные результаты Донова; попутно мы получим, как частный случай, результаты предыдущих авторов.

Рассмотрим произвольную точку N на нашей кривой линии разрыва OQ (рис. 39). В этой точке гидродинамические элементы меняются скачком от значений $V_-(v_1, 0)$, p_1, ρ_1, ϑ_1 до значений $V_+(v_x, v_y)$, p, ρ, ϑ. Любая пара значений элементов «справа» от

разрыва может быть связана одним соотношением. Уравнение гипоциссоиды (7.14), в частности, связывает между собою v_x и v_y, и значит, v и β. Замечая, что скорость после прохождения разрыва в точке N образует с осью Ox угол β_N, который будет иметь тот же порядок малости, что и углы $\beta_в$ контура крыла, решим уравнение гипоциссоиды (написанное в координатах v и β) относительно v, представляя v в виде ряда по восходящим степеням β. Простые вычисления дадут нам (так как мы ищем четвёртое приближение, то мы ограничиваемся здесь и далее членами с β^4):

$$v_N = v_1\left(1 + b_1\beta_N + b_2\beta_N^2 + b_3\beta_N^3 + b_4\beta_N^4 + \ldots\right), \qquad (14.3)$$

где

$$b_1 = -(\mathsf{M}^2-1)^{-1/2},$$

$$b_2 = -(\mathsf{M}^2-1)^{-2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\varkappa-1}{4}\mathsf{M}^4\right),$$

$$b_3 = -(\mathsf{M}^2-1)^{-7/2}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\mathsf{M}^2 + \frac{3}{4}(\varkappa-1)\mathsf{M}^4 + \right.$$
$$\left. + \frac{3\varkappa^2-12\varkappa+5}{24}\mathsf{M}^6 + \frac{(\varkappa+1)^2}{32}\mathsf{M}^8\right],$$

$$b_4 = -(\mathsf{M}^2-1)^{-5}\left[\frac{1}{24} + \frac{5}{8}\mathsf{M}^2 - \frac{17-29\varkappa}{24}\mathsf{M}^4 - \frac{1+27\varkappa-12\varkappa^2}{24}\mathsf{M}^6 + \right.$$
$$\left. + \frac{5+5\varkappa-\varkappa^2+\varkappa^3}{16}\mathsf{M}^8 - \frac{5+\varkappa+3\varkappa^2-3\varkappa^3}{48}\mathsf{M}^{10}\right];$$

$$\mathsf{M} = \frac{v_1}{a_1} = \frac{1}{\sin\alpha_1}.$$

С другой стороны, формула (7.2) позволит вместе с (7.10) найти отношение ϑ/ϑ_1 в функции от $\operatorname{tg}\varphi$, а $\operatorname{tg}\varphi$ по (7.11) выразится через v_x и v_y и, следовательно, по (14.3) в виде ряда по β_N. Производя выкладки, получим [1]):

$$\frac{\vartheta_N}{\vartheta_1} = 1 + l_3\beta_N^3 + l_4\beta_N^4 + \ldots, \qquad (14.4)$$

где

$$l_3 = \frac{\varkappa^2-1}{12}\mathsf{M}^6(\mathsf{M}^2-1)^{-5/2};$$

$$l_4 = \frac{\varkappa^2-1}{16}\mathsf{M}^6(\mathsf{M}^2-1)^{-3}\left[4 + 2(\varkappa-2)\mathsf{M}^2 - (\varkappa-1)\mathsf{M}^4\right].$$

То замечательное обстоятельство, что ряд (14.4) не содержит первых и вторых степеней β_N, позволяет заключить, что если мы пожелаем

[1]) При разложении в ряд здесь удобно ввести сначала $\Delta\rho = \rho/\rho_1 - 1$ и разложить отношение ϑ/ϑ_1 по степеням $\Delta\rho$ (величина того же порядка малости, что и β), используя лишь (7.2) и (7.10); уже в этом разложении будут отсутствовать члены с Δ в первой и второй степени.

учесть лишь первые и вторые степени β, отбрасывая члены с β^3 и далее, как малые (приближения Аккерета и Буземана), то мы в праве будем считать $\vartheta_N/\vartheta_1 = 1$; это значит, что в первом и во втором приближениях вихреобразование можно не учитывать и считать всюду $\vartheta = \vartheta_1 = \text{const}$.

Остановимся несколько подробнее на первом и втором приближениях. Так как с точностью до малых второго порядка включительно вихрей не будет, характеристики будут здесь снова эпициклоидами

$$\beta + \zeta\left(\frac{v}{a_*}\right) = \text{const}.$$

Рассмотрим на нашей линии разрыва $\overset{\smile}{OQ}$ какие-нибудь точки N_1, N_2, ... (не изображены на рисунке) и через каждую из них проведём по характеристике второго семейства до пересечения с контуром в точках M_1, M_2, ... соответственно. Точкам N_1, N_2, ... отвечают в плоскости (v_x, v_y) точки гипоциссоиды N_1', N_2', ... Так как углы β_N малы, то все точки N_1', N_2', ... будут располагаться поблизости от двойной точки гипоциссоиды ($\beta = 0$, $v = v_1$). Обратим теперь внимание на то новое обстоятельство, что с точностью до малых второго порядка включительно уравнения гипоциссоиды и эпициклоид, выходящих из точки ($v_x = v_1$, $v_y = 0$), совпадают. В самом деле, для эпициклоиды будет по (10.3) и (9.22):

$$\left(\frac{dv}{d\beta}\right)_{\substack{v=v_1\\ \beta=0}} = -\operatorname{tg}\alpha_1 v_1 = -v_1(\mathbf{M}^2-1)^{-1/2},$$

$$\left(\frac{d^2v}{d\beta^2}\right)_{\substack{v=v_1\\ \beta=0}} = -\operatorname{tg}\alpha_1\left(\frac{dv}{d\beta}\right)_{\beta=0} - \frac{v_1}{\cos^2\alpha_1}\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)_{\beta=0} =$$

$$= -\frac{v_1}{\cos^4\alpha_1}\left(\sin^4\alpha_1 + \frac{\varkappa-1}{2}\right) = -\frac{v_1}{(\mathbf{M}^2-1)^2}\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}\mathbf{M}^4\right),$$

так что

$$\left(\frac{dv}{d\beta}\right)_{\substack{v=v_1\\ \beta=0}} = v_1 b_1; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{d^2v}{d\beta^2}\right)_{\substack{v=v_1\\ \beta=0}} = v_1 b_2,$$

что и доказывает наше утверждение. Но тогда все точки N_1', N_2', ... можно считать, с точностью до малых второго порядка, расположенными на эпициклоиде

$$\beta + \zeta\left(\frac{v}{a_*}\right) = \zeta\left(\frac{v_1}{a_*}\right), \tag{14.5}$$

а если это так, то, выходя из точек N_1, N_2, ... и двигаясь по характеристикам второго семейства $\overset{\smile}{N_1M_1}$, $\overset{\smile}{N_2M_2}$, ..., мы будем в плоскости скоростей выходить из N_1', N_2', ... и перемещаться приближённо всегда по одной эпициклоиде (14.5), проходящей через ($v = v_1$, $\beta = 0$) (ибо все точки N_1', N_2', ... на этой одной эпициклоиде при-

ближённо лежат). Это значит, что с нашей точностью для всей «верхней» области скорости связаны уравнением одной эпициклоиды (14.5), совершенно аналогично тому, как это было в случае отсутствия поверхности разрыва. В частности, имеем для точек контура крыла:

$$\beta_в + \zeta\left(\frac{v_в}{a_*}\right) = \zeta\left(\frac{v_1}{a_*}\right). \tag{14.6}$$

Решая это уравнение относительно $v_в$ (в виде ряда, расположенного по степеням $\beta_в$), получим:

$$v_в = v_1\left(1 + b_1\beta_в + b_2\beta_в^2 + \ldots\right).$$

Нам остаётся вставить это $v_в$ в уравнение Бернулли, чтобы найти давление $p_в$ в функции от $\beta_в$, т. е. в функции места на контуре. Уравнение Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\varkappa\vartheta p}{\varkappa - 1}^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{\varkappa\vartheta_1 p_1}{\varkappa - 1}^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$$

удобно заранее решить относительно p, взяв его в виде:

$$p = p_1\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_1}\right)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left[1 - \frac{\varkappa-1}{2}\,\mathrm{M}^2\left(\frac{v^2}{v_1^2} - 1\right)\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \tag{14.7}$$

(для второго приближения надо затем положить $\vartheta/\vartheta_1 \approx 1$).

Вернёмся к третьему и четвёртому приближениям. Здесь нам придётся считать ϑ переменным по (14.4), а тогда, вместо уравнения эпициклоид, на основании (9.24) мы должны написать вдоль характеристики $\overset{\frown}{NM}$, например:

$$d\left[\beta + \zeta\left(\frac{v}{a_*}\right)\right] = -\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\varkappa - 1}\,d\ln\vartheta. \tag{14.8}$$

Прибавим и отнимем в правой части (14.8) член $-\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{\varkappa-1}\,d\ln\vartheta$. Получим:

$$d\left[\beta + \zeta\left(\frac{v}{a_*}\right)\right] = -\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{\varkappa-1}\,d\ln\vartheta - \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha_1\cos\alpha_1}{\varkappa-1}\,d\ln\vartheta. \tag{14.9}$$

Проинтегрируем теперь (14.9), двигаясь по характеристике от точки N до M. Получим:

$$\beta_M + \zeta\left(\frac{v_M}{a_*}\right) - \left[\beta_N + \zeta\left(\frac{v_N}{a}\right)\right] =$$

$$= -\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{\varkappa-1}\left\{\ln\frac{\vartheta_M}{\vartheta_1} - \ln\frac{\vartheta_N}{\vartheta_1}\right\} - \int_N^M \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha_1\cos\alpha_1}{\varkappa-1}\,\frac{d\vartheta}{\vartheta},$$

что мы можем записать ещё, если применить к стоящему справа интегралу теорему о среднем значении в виде:

$$\beta_M+\zeta\left(\frac{v_M}{a_*}\right)=\beta_N+\zeta\left(\frac{v_N}{a_*}\right)-\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{\varkappa-1}\left\{\ln\frac{\vartheta_M}{\vartheta_1}-\ln\frac{\vartheta_N}{\vartheta_1}\right\}-$$

$$-\tilde{H}\left[\ln\frac{\vartheta_M}{\vartheta_1}-\ln\frac{\vartheta_N}{\vartheta_1}\right], \quad (14.10)$$

где $\tilde{H}$ — значение разности $\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{\varkappa-1}$ для некоторой средней точки кривой MN.

При помощи (14.10) найдём теперь v_M в функции от β_M; для этого нам надо выразить входящие в правую часть (14.10) величины через элементы в точке M.

Прежде всего замечаем, что

$$\vartheta_M=\vartheta_O,$$

где ϑ_O — значение ϑ на передней кромке (в верхней области), ибо ϑ сохраняется после прохождения разрыва вдоль линии тока, каковой является линия контура крыла $\overset{\frown}{OM}$. Теперь вследствие (14.4) мы можем написать

$$\ln\frac{\vartheta_M}{\vartheta_1}-\ln\frac{\vartheta_N}{\vartheta_1}=\ln\frac{\vartheta_O}{\vartheta_1}-\ln\frac{\vartheta_N}{\vartheta_1}=l_3\left(\beta_O^3-\beta_N^3\right)+l_4\left(\beta_O^4-\beta_N^4\right)+\ldots \quad (14.11)$$

(как всегда, не выписываем члены, содержащие β в пятой степени и выше); таким образом, наша разность логарифмов выражается через известные величины (l_3, l_4, β_0) и через угол β_N. Выразим теперь $\beta_N+\zeta(v_N/a_*)$ также через угол β_N. Мы уже знаем, что с точностью до малых второго порядка включительно изображение скорости точки N лежит не только на гипоциссоиде в плоскости (v_x, v_y), но и на эпициклоиде, проходящей через точку $v_x=v_1$, $\beta=0$. Значит, мы можем ожидать, что $\beta_N+\zeta(v_N/a_*)=\zeta(v_1/a_*)+$ б. м. третьего и четвёртого порядка. Чтобы найти эти малые третьего и четвёртого порядка, удобно ввести в рассмотрение величину $\tilde{v}$, определяемую равенством

$$\beta_N+\zeta\left(\frac{\tilde{v}}{a_*}\right)=\zeta\left(\frac{v_1}{a_*}\right).$$

Разлагая $\tilde{v}$ в ряд по степеням β_N, получим:

$$\tilde{v}=v_1\left(1+b_1\beta_N+b_2\beta_N^2+b_3'\beta_N^3+b_4'\beta_N^4+\ldots\right),$$

где

$$b_3' = -(M^2-1)^{-7/2}\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}M^2+\frac{3}{4}(\varkappa-1)M^4+\frac{2\varkappa^2-5\varkappa+3}{12}M^6\right],$$

$$b_4' = -(M^2-1)^{-5}\left(\frac{1}{24}+\frac{5}{8}M^2-\frac{17-29\varkappa}{24}M^4+\frac{3-19\varkappa+16\varkappa^2}{24}M^6+\right.$$
$$\left.+\frac{3-2\varkappa-5\varkappa^2+4\varkappa^3}{32}M^8-\frac{3-8\varkappa+7\varkappa^2-2\varkappa^3}{96}M^{10}\right).$$

Мы можем написать теперь:

$$\beta_N+\zeta\left(\frac{v_N}{a_*}\right)=\beta_N+\zeta\left(\frac{\tilde v}{a_*}\right)+\zeta\left(\frac{v_N}{a_*}\right)-\zeta\left(\frac{\tilde v}{a_*}\right)=$$
$$=\zeta\left(\frac{v_1}{a_*}\right)+\left(\frac{d\zeta}{dv}\right)_{v=v_1}[(v_N-v_1)-(\tilde v-v_1)]+$$
$$+\left(\frac{d^2\zeta}{dv^2}\right)_{v=v_1}\frac{(v_N-v_1)^2-(\tilde v-v_1)^2}{2}+\ldots=$$
$$=\zeta\left(\frac{v_1}{a_*}\right)+v_1\zeta'\left(\frac{v_1}{a_*}\right)[(b_3-b_3')\beta_N^3+(b_4-b_4')\beta_N^4]+$$
$$+v_1^2\zeta''\left(\frac{v_1}{a_*}\right)b_1(b_3-b_3')\beta_N^4+\text{ б. м. 5-го порядка,} \qquad (14.12)$$

причём

$$\zeta'\left(\frac{v_1}{a_*}\right)=-\left(\frac{d\beta}{dv}\right)_{v=v_1}=\frac{1}{v_1\operatorname{tg}\alpha_1}=-\frac{1}{v_1b_1};$$
$$\zeta''\left(\frac{v_1}{a_*}\right)=\left(\frac{d\zeta'}{dv}\right)_{v=v_1}=\frac{1}{\left(\frac{dv}{d\beta}\right)^3_{v=v_1}}\left(\frac{d^2v}{d\beta^2}\right)_{v=v_1}=\frac{2b_2}{v_1^2b_1^3}.$$

Итак, мы можем выразить правую часть уравнения (14.10) через β_N, через $\tilde H$ и через известные величины; при этом β_N входит в степенях не ниже, чем в третьей. Тщательный анализ, на котором мы не можем здесь останавливаться, позволил затем Донову выразить β_N через координату x_M точки M и через величины, характеризующие наклон и кривизну контура в точке O (на передней кромке). Именно, привлекая характеристику первого семейства $\overset{\smile}{NS}$, а также исследуя вид линии разрыва и обеих характеристик, Донов показывает, что

$$\beta_N=\beta_0+\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_0}x_M\beta_0\left(\frac{d\beta}{dx}\right)_0+\text{ б. м. третьего порядка,} \qquad (14.13)$$

где

$$\varepsilon_0=(M^2-1)^{-1/2},\quad \varepsilon_1=\frac{\varkappa+1}{4}M^4(M^2-1)^{-2},$$

а $d\beta/dx$ — производная по x от угла $\beta_в$, вычисленного как функция одного x для верхней части крыла:

$$\beta=\beta(x,\ y_в(x)).$$

Но теперь ясно, что член, содержащий $\tilde{H}$, может быть отброшен, как имеющий пятый порядок малости. В самом деле, $\tilde{H}$ имеет сама, как разность двух функций, вычисленных при бесконечно близких значениях аргумента, первый порядок малости; величина же $\beta_0^3 - \beta_N^3$ имеет по (14.13) четвёртый порядок малости [$(d\beta/dx)_0$ — мало].

Вставляя (14.13) в правые части (14.11) и (14.12), внося эти выражения в свою очередь в правую часть (14.10), получим, собирая члены:

$$\beta_M + \zeta\left(\frac{v_M}{a_*}\right) = \zeta\left(\frac{v_1}{a_*}\right) - \frac{1}{b_1}(b_3 - b_3')\beta_O^3 - \left[\frac{b_4 - b_4'}{b_1} - \frac{2b_2(b_3 - b_3')}{b_1^2}\right]\beta_O^4 - \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{b_3 - b_3'}{b_1} + \frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{\varkappa - 1} l_3\right) x_M \beta_O^3 \left(\frac{d\beta}{dx}\right)_O + \ldots$$

Решая это уравнение относительно v_M и выписывая члены до четвёртого порядка малости включительно, получим:

$$v_M = v_1\left\{1 + b_1\beta_M + b_2\beta_M^2 + b_3'\beta_M^3 + b_4'\beta_M^4 + (b_3 - b_3')\beta_O^3 + \left[b_4 - b_4' - \frac{2b_2}{b_1}(b_3 - b_3')\right]\beta_O^4 + \frac{2b_2}{b_1}(b_3 - b_3')\beta_O^3\beta_M + \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_0}\left[b_3 - b_3' + b_3\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{\varkappa - 1} b_1\right] x_M\beta_O^3\left(\frac{d\beta}{dx}\right)_O + \ldots\right.$$

Нам остаётся сделать последний шаг: вставить это v_M в правую часть выражения (14.7) для давления, и мы получим давление в каждой точке M обтекаемого контура в функции от β_M и от x_M. Выражение ϑ_M/ϑ_1, входящее в (14.7), есть ϑ_0/ϑ_1 и по (14.4) будет

$$\frac{\vartheta_M}{\vartheta_1} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} = 1 + l_3\beta_O^3 + l_4\beta_O^4 + \ldots$$

После элементарных преобразований получим окончательную формулу:

$$p_в = p_1 + q\left[a_1\beta_в + a_2\beta_в^2 + a_3\beta_в^3 + a_4\beta_в^4 + a_{1d}\beta_в^3(0) + a_{2d}\beta_в^4(0) + a_{3d}\beta_в^3(0)\beta_в + a_{4d}\beta_в^3(0)\left(\frac{d\beta_в}{dx}\right)_O x\right] + \text{б. м. 5-го порядка},$$

где $\beta_в$ — значение угла наклона касательной в точке контура верхней части крыла, в которой ищется $p_в$, x — абсцисса этой точки,

$\beta_в(0)$ — угол наклона касательной к контуру (верх крыла) в точке O, коэффициенты имеют следующие значения:

$$q = \frac{\rho_1 v_1^2}{2},$$

$$a_1 = 2(M^2-1)^{-1/2};$$

$$a_2 = (M^2-1)^{-2}\left(2 - 2M^2 + \frac{\varkappa+1}{2}M^4\right);$$

$$a_3 = (M^2-1)^{-7/2}\left[\frac{4}{3} - 2M^2 + \frac{5}{3}(\varkappa+1)M^4 - \right.$$

$$\left. - \frac{5+7\varkappa-2\varkappa^2}{6}M^6 + \frac{\varkappa+1}{6}M^8\right],$$

$$a_4 = (M^2-1)^{-5}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}M^2 + \frac{7+19\varkappa}{6}M^4 - \frac{21+43\varkappa-18\varkappa^2}{12}M^6 + \right.$$

$$+ \frac{15+20\varkappa-8\varkappa^2+3\varkappa^3}{12}M^8 -$$

$$\left. - \frac{21+20\varkappa-3\varkappa^2-2\varkappa^3}{48}M^{10} + \frac{3+2\varkappa-\varkappa^2}{48}M^{12}\right);$$

$$a_{1d} = \frac{\varkappa+1}{2}M^4(M^2-1)^{-7/2}\left(-\frac{1}{3} + \frac{3-\varkappa}{6}M^2 + \frac{3\varkappa-5}{24}M^4\right);$$

$$a_{2d} = M^4(M^2-1)^{-5}\left(-\frac{\varkappa-1}{2} + \frac{5+3\varkappa-2\varkappa^2}{4}M^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{10+3\varkappa-6\varkappa^2+\varkappa^3}{8}M^4 + \frac{9-7\varkappa^2+2\varkappa^3}{16}M^6 + \frac{-3+\varkappa+3\varkappa^2-\varkappa^3}{32}M^8\right);$$

$$a_{3d} = M^6(M^2-1)^{-5}\left(-\frac{\varkappa+1}{6} + \frac{7+2\varkappa-5\varkappa^2}{24}M^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{4-3\varkappa-6\varkappa^2+\varkappa^3}{24}M^4 + \frac{3-7\varkappa-7\varkappa^2+3\varkappa^3}{96}M^6\right);$$

$$a_{4d} = \frac{(\varkappa+1)^2}{16}M^8(M^2-1)^{-5}\left(-1 + \frac{3-\varkappa}{2}M^2 + \frac{3\varkappa-5}{8}M^4\right).$$

Совершенно аналогичным путём для точек нижней части крыла найдём:

$$p_н = p_1 + q\left[-a_1\beta_н + a_2\beta_н^2 - a_3\beta_н^3 + a_4\beta_н^4 - a_{1d}\beta_н^3(0) + a_{2d}\beta_н^4(0) + \right.$$

$$\left. + a_{3d}\beta_н^3(0)\beta_н + a_{4d}\beta_н^3(0)\left(\frac{d\beta_н}{dx}\right)_O x\right] + \text{б. м. 5-го порядка.}$$

Остановимся на характере различных членов, входящих в наши формулы. Если бы мы пожелали ограничиться вторыми степенями β, то нам надо было бы сохранить лишь члены с a_1 и a_2. Мы получили бы приближения Аккерета и Буземана. Далее, члены с a_1, a_2, a_3, a_4 — это как раз те члены, которые получились бы, если бы мы из уравнения эпициклоиды (14.6) нашли v в виде ряда по степеням β и, вставив это выражение v в уравнение Бернулли (14.7) (при $\vartheta = \vartheta_1$), ограничились бы затем четвёртыми степенями β. Так, если $\beta_в \leqslant 0$, то, как мы уже говорили в начале этого пункта, линии разрыва OQ не будет, и тогда членов с a_{1d}, a_{2d}, a_{3d}, a_{4d} не надо брать вовсе при вычислении $p_в$. Наличие разрыва ($\beta_{вO} > 0$, $\beta_{нO} < 0$) порождает члены с a_{1d}, ..., a_{4d} в $p_в$ и $p_н$. Это — члены третьего и четвёртого порядка малости. Интересно отметить, что влияние кривизны контура в точке O (и следовательно, влияние вихреобразования, ибо если контур прямолинеен около O, то по крайней мере на некотором участке, прилегающем к O, вихрей не будет) появляется лишь в четвёртом приближении — это член, стоящий при a_{4d}.

Переходя к вычислению C_x и C_y по формулам (14.1), (14.2), введём вместо углов β углы, отсчитываемые от хорды $\overline{OP}$ крыла; именно, обозначим

$$\beta_в = \bar{\beta} + \beta'_в; \quad \beta_н = \bar{\beta} + \beta'_н,$$

где $\bar{\beta}$ — угол наклона хорды $\overline{OP}$ к оси Ox (на рис. 39 — отрицательный). В качестве переменной интегрирования в интегралах (14.1), (14.2) удобно взять длину t, отсчитываемую по хорде $\overline{OP}$ от точки O. При этом

$$dt = \cos\beta'_в\, dS_в; \quad dt = \cos\beta'_н\, dS_н,$$

что же касается $x_в$ и $x_н$, входящих в давление, то их следует рассчитать по формулам

$$x_в = t\cos\bar{\beta} - \sin\bar{\beta}\int_0^t \operatorname{tg}\beta'_в\, dt,$$

$$x_н = t\cos\bar{\beta} - \sin\bar{\beta}\int_0^t \operatorname{tg}\beta'_н\, dt.$$

Тригонометрические функции углов β, которые входят в формулы (14.1) и (14.2), надо, конечно, разложить в ряды, ограничиваясь членами четвёртого порядка. Производя элементарные выкладки, получим окончательно

$$C_x = C_{x_2} + C_{x_3} + C_{x_4} + \text{б. м. 5-го порядка},$$

где

$$C_{x_2} = 2a_1\overline{\beta}^2 + \frac{a_1}{T}\int_0^T (\beta_в'^2 + \beta_н'^2)\,dt,$$

$$C_{x_3} = \frac{3a_2\overline{\beta}}{T}\int_0^T (\beta_в'^2 - \beta_н'^2)\,dt + \frac{a_2}{T}\int_0^T (\beta_в'^3 - \beta_н'^3)\,dt,$$

$$C_{x_4} = \left(2a_3 - \frac{a_1}{3}\right)\overline{\beta}^4 + a_{1в}\overline{\beta}\,[\overline{\beta} + \beta_в'(0)]^3 + a_{1н}\overline{\beta}\,[\overline{\beta} + \beta_н'(0)]^3 +$$
$$+ \frac{1}{T}\left(6a_3 - \frac{a_1}{2}\right)\overline{\beta}^2\int_0^T (\beta_в'^2 + \beta_н'^2)\,dt +$$
$$+ \frac{1}{T}\left(4a_3 - \frac{a_1}{3}\right)\overline{\beta}\int_0^T (\beta_в'^3 + \beta_н'^3)\,dt + \frac{1}{T}\left(a_3 + \frac{a_1}{3}\right)\int_0^T (\beta_в'^4 + \beta_н'^4)\,dt$$

и

$$C_y = C_{y_1} + C_{y_2} + C_{y_3} + C_{y_4} + \text{б. м. 5-го порядка},$$

где

$$C_{y1} = -2a_1\overline{\beta},$$

$$C_{y_2} = -\frac{a_2}{T}\int_0^T (\beta_в'^2 - \beta_н'^2)\,dt,$$

$$C_{y_3} = (a_1 - 2a_3)\overline{\beta}^3 - a_{1в}[\overline{\beta} + \beta_в'(0)]^3 - a_{1н}[\overline{\beta} + \beta_н'(0)]^3 +$$
$$+ \frac{1}{T}(a_1 - 3a_3)\overline{\beta}\int_0^T (\beta_в'^2 + \beta_н'^2)\,dt + \frac{1}{T}\left(\frac{a_1}{3} - a_3\right)\int_0^T (\beta_в'^3 + \beta_н'^3)\,dt;$$

$$C_{y4} = -a_{2в}[\overline{\beta} + \beta_в'(0)]^4 + a_{2н}[\overline{\beta} + \beta_н'(0)]^4 - a_{3в}\overline{\beta}\,[\overline{\beta} + \overline{\beta}_в'(0)]^3 +$$
$$+ a_{3н}\overline{\beta}\,[\overline{\beta} + \beta_н'(0)]^3 - \frac{T}{2}a_{4в}[\overline{\beta} + \beta_в'(0)]^3\left(\frac{d\beta_в}{dx}\right)_0 +$$
$$+ \frac{T}{2}a_{4н}[\overline{\beta} + \beta_н'(0)]^3\left(\frac{d\beta_н}{dx}\right)_0 + \frac{1}{T}\left(\frac{5}{2}a_2 - 6a_4\right)\overline{\beta}^2\int_0^T (\beta_в'^2 - \beta_н'^2)\,dt +$$
$$+ \frac{1}{T}\left(\frac{5}{3}a_2 - 4a_4\right)\overline{\beta}\int_0^T (\beta_в'^3 - \beta_н'^3)\,dt - \frac{a_4}{T}\int_0^T (\beta_в'^4 - \beta_н'^4)\,dt.$$

В этих формулах надо положить

$$a_{1в} = a_{1d}, \quad a_{2в} = a_{2d}, \quad a_{3в} = a_{3d}, \quad a_{4в} = a_{4d},$$

если $\bar{\beta}+\beta_в'(0)>0$ (если линия разрыва сверху), и

$$a_{1в}=a_{2в}=a_{3в}=a_{4в}=0,$$

если $\bar{\beta}+\beta_в'(0)<0$ (нет линии разрыва вверху); аналогично,

$$a_{nн}=a_{nd}\,(n=1,\ 2,\ 3,\ 4),\quad \text{если}\quad \bar{\beta}+\beta_н'(0)<0$$

и

$$a_{nн}=0\,(n=1,\ 2,\ 3,\ 4),\quad \text{если}\quad \bar{\beta}+\beta_н'(0)>0.$$

Коэффициенты $a_1, \ldots, a_4, a_{1d}, \ldots, a_{4d}$ вычисляются по-прежнему. Что же касается вычисления интегралов, то оно в отдельных конкретных случаях сильно упрощается. Так, например, если контур крыла симметричен по отношению к прямой, перпендикулярной к $\overline{OP}$ и проходящей через середину $\overline{OP}$ (например, если контур есть дуга круга), то будет

$$\int_0^T \beta'\,dt=\int_0^T \beta'^3\,dt=0.$$

Отметим, что если $\bar{\beta}=0$ и $\beta_н'=0$, мы должны ожидать отрицательной подъёмной силы, ибо здесь будет $C_{y1}=0$, $C_{y2}<0$.

Выбрав контур конкретной формы, мы можем заранее подсчитать все коэффициенты, стоящие в C_x и C_y при разных степенях $\bar{\beta}$; мы получим тогда как для C_x, так и для C_y выражения в виде полиномов четвёртой степени относительно $\bar{\beta}$. Исключая $\bar{\beta}$, получим C_x в функциях от C_y.

Остановимся более подробно на расчёте сил, действующих на пластинку (рис. 38).

Здесь мы имеем точные формулы как для верхней, так и для нижней частей профиля. Для верхней части пластинки имеем по (14.5) и (12.2)

$$\beta_0=\alpha_1-\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{tg}\alpha_1\right)-$$

$$-\alpha+\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{tg}\alpha\right),\quad (14.14)$$

где α_1 — угол Маха набегающего потока ($\sin\alpha_1=1/\mathrm{M}$). С другой стороны, для коэффициента давления C_p имеем здесь:

$$C_{p_в}=\frac{p_в-p_1}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2}=\frac{2}{\varkappa}\,\frac{p_в-p_1}{p_1\mathrm{M}^2}.\quad (14.15)$$

В то же время

$$\frac{p_в}{p_1}=\left(\frac{a}{a_1}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}=\left(\frac{a}{v}\,\frac{v}{v_1}\,\frac{v_1}{a_1}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}=\left(\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_1}\,\frac{v^2}{v_1^2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$$

или, используя (9.22):

$$\frac{p_в}{p_1}=\left(\frac{\dfrac{\varkappa-1}{2}\dfrac{1}{\sin^2\alpha_1}+1}{\dfrac{\varkappa-1}{2}\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}. \tag{14.16}$$

Отсюда, сопоставляя последнее равенство с равенством (14.15), получим

$$\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{\left(\mathsf{M}^2+\frac{2}{\varkappa-1}\right)\left(1+\frac{\varkappa}{2}\mathsf{M}^2C_{p_в}\right)^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}. \tag{14.17}$$

Вставляя выражение для α из (14.17) в соотношение (14.14), получим явную зависимость β_0 от $C_{p_в}$.

Над пластинкой имеем течение разрежения: так как $v>v_1$, то $\alpha<\alpha_1$. Если при заданном M увеличивать наклон пластинки ($|\beta_0|$ растёт), то α будет падать (движение по эпициклоиде, рис. 7 «вниз»), пока при некотором предельном значении ($\beta_0=\beta_{пред}$) не обратится в нуль; это будет по (14.14) для

$$\beta_{пред}=\alpha_1-\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{tg}\alpha_1\right).$$

При этом $p_в=0$ образуется вакуум. При дальнейшем увеличении $|\beta_0|$ будет всё время $p_в=0$.

Остановимся подробнее на случае так называемых гиперзвуковых движений. Посмотрим, как ведёт себя число давления над пластинкой при весьма больших значениях числа M, т. е. когда

$$\mathsf{M}\gg 1,\quad \alpha_1\ll 1.$$

В формуле (14.14) разложим правую часть в ряд по степеням α и α_1 (если $\alpha_1\ll 1$, то и подавно будет $\alpha\ll 1$). Имеем

$$\beta_0=\frac{2}{\varkappa-1}\alpha-\frac{2}{3}\frac{\varkappa+1}{(\varkappa-1)^2}\alpha^3+\ldots-\frac{2}{\varkappa-1}\alpha_1+\frac{2}{3}\frac{\varkappa+1}{(\varkappa-1)^2}\alpha_1^3+\ldots,$$

или, если ограничиться первыми степенями α и α_1:

$$\alpha=\alpha_1+\frac{\varkappa-1}{2}\beta_0 \tag{14.18}$$

и по (14.16):

$$\frac{p_в}{p_1}=\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}\mathsf{M}\beta_0\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}. \tag{14.19}$$

Если $\beta \leqslant -\frac{2}{\varkappa-1}\frac{1}{\mathsf{M}}$, то $p_в$ надо считать равным нулю $\left(\beta_{пред} \approx \right.$ $\left. \approx -\frac{2}{\varkappa-1}\frac{1}{\mathsf{M}}\right)$.

Отметим теперь два весьма важных обстоятельства. Во-первых, формула (14.19) получена линеаризацией по отношению к $1/\mathsf{M}$, а не по отношению к β_0. Структура её такова, что линеаризация её по отношению к β_0 даёт неточные результаты. Поэтому формула (14.19) более точна при бо́льших M, чем линейная формула. Во-вторых, формула (14.19) содержит комбинацию

$$K = \mathsf{M}\beta_0.$$

Эта комбинация характерна для гиперзвуковых течений, в чём мы убедимся в дальнейшем при рассмотрении общей теории таких течений (см. § 23).

По (14.15) и (14.19) мы получим

$$C_{p_в} = \frac{2}{\varkappa K^2}\left[\left(1 + \frac{\varkappa-1}{2}K\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}} - 1\right]\beta_0^2. \tag{14.20}$$

Закрепим значение K. Тогда, по (14.19), $p_в/p_1$ будет закреплено, а по (14.20) коэффициент давления окажется пропорциональным квадрату угла наклона пластинки.

Для нижней части пластинки имеем ещё более простые формулы. Именно, аналогично (14.15) пишем:

$$C_{p_н} = \frac{2}{\varkappa \mathsf{M}^2}\left(\frac{p_н}{p_1} - 1\right). \tag{14.21}$$

Но теперь для определения отношения $p_н/p_1$ используем формулу (7.15), по которой

$$\frac{p_н}{p_1} = \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\mathsf{M}^2 \sin^2 \nu - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}, \tag{14.22}$$

где $\nu = \pi/2 - \varphi$ — угол наклона поверхности разрыва к оси x. Теперь мы имеем по (14.22) и (14.21)

$$\sin^2 \nu = \frac{1}{\mathsf{M}^2} + \frac{\varkappa+1}{4}C_{p_н}. \tag{14.23}$$

С другой стороны, деля (7.17) на (7.16), получим

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \frac{2}{\varkappa+1}\operatorname{ctg}\nu\left(\sin^2\nu - \frac{1}{\mathsf{M}^2}\right)\left[1 - \frac{2}{\varkappa+1}\left(\sin^2\nu - \frac{1}{\mathsf{M}^2}\right)\right]^{-1}. \tag{14.24}$$

Внося ν из (14.23) в формулу (14.24), получим явную зависимость $\operatorname{tg}\beta_0$ от $C_{p_н}$.

Остановимся опять на гиперзвуковых движениях. Здесь угол ν будет мало отличаться от β_0 (см., например, построение ν по рис. 4

и 5). Между пластинкой и скачком образуется очень тонкий слой весьма уплотнённого газа. Картина течения напоминает ту, что отвечает теории Ньютона; согласно последней, частицы воздуха ударяют о тело и затем продолжают двигаться уже по поверхности тела. Надо отметить, что для $M \gg 1$ сходство с теорией Ньютона оказывается не только качественным, но и количественным. В самом деле, легко можно убедиться в том, что при очень больших M и небольших β_0 коэффициент давления будет пропорционален β_0^2, как это следует из теории Ньютона. В самом деле, сначала заметим, что по (14.24) при малых $|\nu|$ (а значит, и малых $|\beta_0|$) величина $\sin^2\nu - 1/M^2$ будет малой более высокого порядка, так что приближенно можно записать

$$\operatorname{tg}\beta_0 \approx \frac{2}{\varkappa+1}\frac{\cos\nu}{\sin\nu}\left(\sin^2\nu - \frac{1}{M^2}\right).$$

Заменяя здесь $\sin\nu$ на ν, $\cos\nu$ на 1, $\operatorname{tg}\beta_0$ на β_0, получим

$$\nu \approx \frac{\varkappa+1}{4}\beta_0 + \sqrt{\left(\frac{\varkappa+1}{4}\right)^2\beta_0^2 + \frac{1}{M^2}} \tag{14.25}$$

или для очень больших M:

$$\nu \approx \frac{\varkappa+1}{2}\beta_0. \tag{14.26}$$

С другой стороны, по (14.23) имеем

$$C_{p_н} \approx \frac{4}{\varkappa+1}\left(\nu^2 - \frac{1}{M^2}\right) \tag{14.27}$$

или для $M \gg 1$ $C_{p_н} \approx \frac{4}{\varkappa+1}\nu^2$, т. е. по (14.26) $C_{p_н} \approx (\varkappa+1)\beta_0^2$. По Ньютону мы должны иметь $C_{p_н} = 2\beta_0^2$. Обе величины будут совпадать при $\varkappa = 1$. Любопытно отметить, что выражение для скорости звука $\sqrt{\varkappa RT}$ будет совпадать с выражением ньютоновской скорости $\sqrt{RT}$ также, если $\varkappa = 1$.

Формулы (14.25) и (14.27) для $M \gg 1$ ближе к точным формулам, связывающим $C_{p_н}$ и β_0, нежели аналогичные линейные формулы. Действительно, по линейной теории мы имели бы просто (стр. 98)

$$C_{p_н} = a_1|\beta_0| = \frac{2}{\sqrt{M^2-1}}|\beta_0|.$$

На рис. 40 нанесены значения $C_{p_н}$ для величин $M = 3$, 5 и 10 соответственно по точным формулам (14.23), (14.24), по линейному закону и по формулам (14.25), (14.27). Из рисунка видно, что при $M = 5$ формулы (14.25), (14.27) дают почти точные, а при $M = 10$ — весьма точные результаты.

Так же, как и для верхней части пластинки, характерной величиной будет произведение $K = M\beta_0$. Именно, комбинируя (14.27) и (14.25), можно написать:

$$C_{p_н} = \frac{4}{\varkappa+1}\left\{\left[\frac{\varkappa+1}{4} + \sqrt{\left(\frac{\varkappa+1}{4}\right)^2 + \frac{1}{K^2}}\right]^2 - \frac{1}{K^2}\right\}\beta_0^2. \quad (14.28)$$

При значениях $|\beta(0)|$, близких к β_* (определённому в § 13, стр. 79), но меньших, нежели β_*, можно пользоваться приближённым методом, указанным в предыдущем параграфе. Если $\beta_* < |\beta_0| < \beta_{max}$,

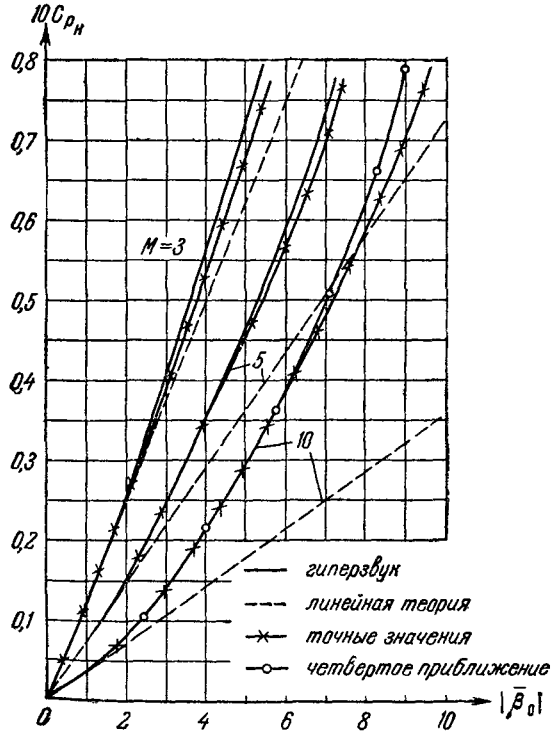

Рис. 40.

причём $(d\beta_в/dx)_0 = (d\beta_н/dx)_0 = 0$ (кривизны равны нулю), можно ожидать ещё, что поверхность разрыва будет «прилипать» к точке O, хотя после прохождения поверхности разрыва около O возникнут дозвуковые скорости. К анализу движения нужно теперь подходить с большой осторожностью; так как движение после прохождения разрыва будет происходить (во всяком случае близ точки O) с дозвуковыми скоростями, уравнения движения будут теперь эллипти-

ческого типа; даже если обтекаемый контур будет обладать конечным прямолинейным участком (как это было на рис. 35, или же, если рассматривается, например, обтекание пластинки, поставленной под углом $|\beta| > \beta_*$), поверхность разрыва, образовавшаяся перед ним, станет криволинейной, возникнут вихри, и задача окажется весьма сложной. Более того, Крокко (Crocco) показал, что наличие кривизны контура ускоряет «отскакивание» поверхности разрыва, так что здесь прилипание может осуществляться лишь, если

$$|\beta| < \beta_{кр}, \quad \text{где} \quad \beta_* < \beta_{кр} < \beta_{max}.$$

Но, пожалуй, самой большой трудностью явится то, что мы вынуждены будем обратиться здесь к исследованию движений, происходящих в одной части плоскости с дозвуковыми, а в другой со сверхзвуковыми скоростями. В самом деле, если обтекаемый контур ограничен в направлении оси Oy [например, если речь идёт об обтекании пластинки (рис. 38)], то можно ожидать, что его возмущающее влияние на больших расстояниях пропадает и после прохождения разрыва скорость на некотором расстоянии от контура останется сверхзвуковой. В §§ 19, 20, 21 мы изложим некоторые работы, относящиеся сюда.

Особняком стоят здесь результаты Релея, который дал точную формулу для подсчёта давления за поверхностью разрыва.

Речь идёт об обтекании газом, имеющим сверхзвуковую скорость, тупого (встречающего под прямым углом ось) профиля, симметричного относительно оси потока. Сосредоточим внимание на частице, движущейся по оси симметрии. На некотором расстоянии от профиля она пройдёт, как показывает опыт, сквозь поверхность сильного разрыва, а затем добежит прямолинейно до профиля в точке M_0 его пересечения с осью симметрии с тем, чтобы после этого начать двигаться по криволинейной траектории, огибая профиль. Найдём давление в точке M_0. Если не учесть появления перед стенкой сильного разрыва, то давление в M_0 следовало бы рассчитать просто по уравнению Бернулли, полагая в нём $v = 0$. Релей первый обратил внимание на появление поверхности разрыва и на связанное с ним изменение давления в M_0. Чтобы дать формулу Релея, предположим, что газ движется с постоянным давлением p_1, постоянной плотностью ρ_1 и постоянной скоростью v_{x_1}. При этом

$$\vartheta = \frac{1}{\rho_1} p_1^{1/\varkappa}; \quad a_*^2 = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} v_{x_1}^2 + 2 \frac{\varkappa}{\varkappa + 1} \vartheta p_1^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}.$$

Пусть

$$v_{x_1} > a_*.$$

Образуется поверхность разрыва, причём

$$p_- = p_1; \quad \rho_- = \rho_1; \quad v_{x_-} = v_{x_1}.$$

Найдём сперва p_+; полагая в (7.15) $\cos\varphi = 1$, получим

$$\frac{p_+}{p_1} = \frac{v_{x_1}^2}{a_1^2}\frac{2\varkappa}{\varkappa+1} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}. \tag{14.29}$$

По уравнению Бернулли (8.10) можно написать:

$$\left(\frac{p_+}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 1 - \frac{v_+^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2},$$

где p_2 — давление в M_0 при наличии сильного разрыва, но по (8.9)

$$1 + \frac{\varkappa-1}{2}\left(\frac{v_+}{a_+}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{v_+^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}},$$

так что

$$\left(\frac{p_2}{p_+}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 1 + \frac{\varkappa-1}{2}\left(\frac{v_+}{a_+}\right)^2. \tag{14.30}$$

Но по (5.10) и (5.14):

$$\frac{v_{x+}^2}{a_+^2} = \frac{\varkappa-1}{2\varkappa} + \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\frac{p_1}{p_+},$$

и мы можем переписать (14.19) следующим образом:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \left(\frac{p_+}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\left\{1 + \frac{\varkappa-1}{4\varkappa}\left[\varkappa - 1 + (\varkappa+1)\frac{p_1}{p_+}\right]\right\}. \tag{14.31}$$

Комбинируя (14.29) и (14.31), мы можем составить отношение p_2/p_1 для различных величин v_{x_1}/a_1.

Здесь приведены для сравнения две таблицы: таблица А даёт p_2/p_1 в предположении, что существует поверхность разрыва, таблица Б даёт p_2/p_1 по уравнению Бернулли, т. е. так, как если бы поверхность разрыва отсутствовала. Рядом с v_{x_1}/a_1 мы помещаем всюду более показательную величину v_{x_1}/a_*.

Таблица А

$\frac{v_{x_1}}{a_1}$	1	2	3	4
$\frac{v_{x_1}}{a_*}$	1	1,63	1,96	2,13
$\frac{p_2}{p_1}$	1,19	5,82	12,4	21,7

Таблица Б

$\frac{v_{x_1}}{a_1}$	1	2	3	4
$\frac{v_{x_1}}{a_*}$	1	1,63	1,96	2,13
$\frac{p_2}{p_1}$	1,89	7,80	36,4	149,1

На рис. 41 изображены две кривые (I по закону Релея, II по уравнению Бернулли) в функциях от числа Маха v_{x_1}/a_1 набегающего потока. Для больших значений v_{x_1}/a_1 мы можем воспользоваться приближённой формулой, полагая вместо (14.19)

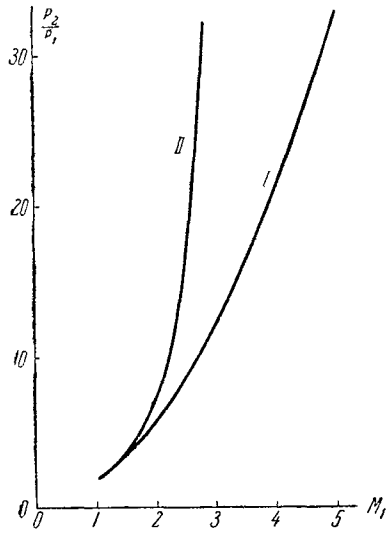

Рис. 41.

$$\frac{p_+}{p_1} \approx \left(\frac{v_{x_1}}{a_1}\right)^2 \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}$$

и принимая вместо (14.20)

$$\frac{p_2}{p_1} \approx \frac{p_+}{p_1}\left\{1 + \frac{(\varkappa-1)^2}{4\varkappa}\right\}^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \approx$$

$$\approx \frac{\varkappa+1}{2}\left(\frac{v_{x_1}}{a_1}\right)^2\left(\frac{(\varkappa+1)^2}{4\varkappa}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}.$$

Формулы (14.30) и (14.31) суть формулы Релея.

Значительно больше изучены движения, происходящие со всюду дозвуковыми скоростями. Прежде всего нужно упомянуть здесь точную теорию струй сжимаемой жидкости, принадлежащую Чаплыгину; доказаны также теоремы существования (Франкль и Келдыш, Христианович); разработаны эффективные методы приближённых расчётов (Христианович, Некрасов и др.) и даны приближённые оценки влияния сжимаемости (например, теорема Прандтля — Глауэрта (см. § 29)). Прежде чем переходить к изучению движения при дозвуковых скоростях, остановимся ещё несколько на исследовании вихревого движения и дадим приём построения различных классов вихревых движений как с до, так и со сверхзвуковыми скоростями.

§ 15. Функция χ. Примеры. Точные решения. Если движение безвихревое, то система двух уравнений в частных производных (9.5), (9.3) первого порядка с двумя функциями v_x и v_y может быть заменена одним уравнением второго порядка с одной функцией. В самом деле, при $\Omega = 0$ существует потенциал скоростей Φ, так что

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Вставляя его в (9.3), мы получим наше уравнение:

$$\left[(\varkappa+1)\left(a_*^2 - \Phi_x^2\right) - (\varkappa-1)\Phi_y^2\right]\Phi_{xx} - 4\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} +$$
$$+ \left[(\varkappa+1)\left(a_*^2 - \Phi_y^2\right) - (\varkappa-1)\Phi_x^2\right]\Phi_{yy} = 0, \quad (15.1)$$

заменяющее, в случае сжимаемого газа, уравнение

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0,$$

имеющее место для несжимаемой жидкости.

Рассмотрим, однако, общий случай, когда движение вихревое, т. е. $\Omega \neq 0$. Функция Φ здесь не существует, однако мы можем ввести некоторую новую функцию и построить для неё единственное уравнение в частных производных 2-го порядка, линейное по отношению ко вторым производным и решающее вихревую задачу. Чтобы построить эту функцию, перейдём сперва от независимых переменных x и y к переменным ξ и ψ, где $\psi(x, y)$ есть введённая выше функция тока [$\psi(x, y) = \text{const.}$ — уравнение линии тока], а $\xi = x$. Мы имеем, кроме уравнения Бернулли:

$$\frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{\varkappa \vartheta(\psi)\, p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{\varkappa - 1} = i_0(\psi) \tag{15.2}$$

и условия адиабатичности

$$p = \vartheta^{\varkappa}(\psi)\, \rho^{\varkappa}, \tag{15.3}$$

одно из уравнений

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{15.4}$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{15.5}$$

и определение ψ:

$$\rho v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{15.6}$$

Замену переменных очень легко сделать, если написать сперва по (15.6):

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\, dy = -\rho v_y\, dx + \rho v_x\, dy \tag{15.7}$$

и затем, заменив x на ξ:

$$dx = d\xi, \tag{15.8}$$

решить (15.7) относительно dy:

$$dy = \frac{v_y}{v_x}\, d\xi + \frac{1}{\rho v_x}\, d\psi. \tag{15.9}$$

Мы можем теперь написать:

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{v_y}{v_x}, \tag{15.10}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{\rho v_x}. \tag{15.11}$$

Удобно затем перейти к переменным ξ и ψ в (15.5). Получим:

$$v_x\left(\frac{\partial v_y}{\partial \xi}+\frac{\partial v_y}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+v_y\frac{\partial v_y}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y}. \qquad (15.12)$$

Заменяя v_x и v_y (не входящие под знаки дифференциалов) по (15.6) и производя сокращения, получим окончательно простую формулу

$$\frac{\partial v_y}{\partial \xi}=-\frac{\partial p}{\partial \psi}. \qquad (15.13)$$

Теперь мы можем легко построить то единственное уравнение, о котором мы говорили. Из (15.13) заключаем о существовании функции $\chi(\xi, \psi)$ такой, что

$$p=\frac{\partial \chi}{\partial \xi};\quad v_y=-\frac{\partial \chi}{\partial \psi}. \qquad (15.14)$$

Уравнение (15.10) может быть теперь написано, если принять в расчет, что $v_x^2+v_y^2=v^2$, в виде:

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}=-\frac{1}{\sqrt{v^2-\left(\frac{\partial \chi}{\partial \psi}\right)^2}}\frac{\partial \chi}{\partial \psi}, \qquad (15.15)$$

где v^2 следует выразить по уравнению Бернулли и на основании (15.14), в виде:

$$v^2=2i_0-\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\vartheta\left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}. \qquad (15.16)$$

Уравнение (15.11) можно представить, используя (15.3) и (15.14), в виде:

$$\frac{\partial y}{\partial \psi}=\frac{1}{\sqrt{v^2-\left(\frac{\partial \chi}{\partial \psi}\right)^2}}\vartheta\left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi}\right)^{-1/\varkappa}. \qquad (15.17)$$

Правая часть уравнений (15.15) и (15.17) не содержит функции y; перекрёстным дифференцированием мы исключим таким образом y и получим одно уравнение для определения функции χ, уравнение, о котором мы упоминали выше:

$$v^2\chi_{\psi\psi}+2\vartheta\chi_\psi\chi_\xi{}^{-1/\varkappa}\chi_{\psi\xi}+\frac{\vartheta}{\varkappa}\chi_\xi{}^{-\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}\left(\chi_\psi^2-v^2+\varkappa\vartheta\chi_\xi{}^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)\chi_{\xi\xi}=$$
$$=\chi_\psi\left(\frac{di_0}{d\psi}-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{d\vartheta}{d\psi}\chi_\xi{}^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right). \qquad (15.18)$$

Мы считаем всегда ϑ и i_0 заданными функциями ψ. Определив из уравнения (15.18) функцию $\chi(\xi, \psi)$, мы можем затем, путём простых квадратур, найти $y(\xi, \psi)$ из уравнений (15.15), (15.17). Линии тока в плоскости (x, y) будут таким образом найдены: достаточно положить

в функции $y = y(\xi, \psi)$, $\psi = \text{const}$. Компоненты скоростей v_x и v_y и давление p найдутся из (15.16) и (15.14) как функции ξ и ψ и, поскольку нам известны линии тока, легко могут быть получены как функции от x и y. Задача о движении будет решена.

В качестве примера на применение функции χ найдём все движения, при которых давление сохраняется вдоль линии тока (см. § 6). Здесь

$$p = p(\psi),$$

т. е. по (15.14)

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = p(\psi)$$

и, значит,

$$\chi(\xi, \psi) = p(\psi)\,\xi + q(\psi),$$

где $q(\psi)$ — неизвестная, так же, впрочем, как $p(\psi)$, функция ψ. Теперь (15.15) и (15.17) примут вид:

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{p'\xi + q'}{\sqrt{v^2 - (p'\xi + q')^2}}; \qquad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\vartheta p^{-1/\varkappa}}{\sqrt{v^2 - (p'\xi + q')^2}}, \tag{15.19}$$

где $p' = dp/d\psi$, $q' = dq/d\psi$, а v^2 на основании (15.16), зависит лишь от ψ.

Предположим сперва, что

$$p' \neq 0,$$

т. е. что давление различно на разных линиях тока. Первое из уравнений (15.19) интегрируется и даёт:

$$y = \sqrt{\frac{v^2}{p'^2} - \left(\xi + \frac{q'}{p'}\right)^2} + s(\psi), \tag{15.20}$$

где $s(\psi)$ — произвольная функция от ψ. Дифференцируя (15.20) по ψ и сравнивая полученное выражение со вторым из (15.19), получим:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{p'^2} - \left(\xi + \frac{q'}{p'}\right)^2}}\left[\frac{d}{d\psi}\frac{v^2}{p'^2} - 2\left(\xi + \frac{q'}{p'}\right)\frac{d}{d\psi}\frac{q'}{p'}\right] + \frac{ds}{d\psi} = \frac{\vartheta p^{-1/\varkappa}}{p'\sqrt{\frac{v^2}{p'^2} - \left(\xi + \frac{q'}{p'}\right)^2}}.$$

Но переменная ξ входит сюда явным образом; очевидно, что написанное равенство будет иметь место лишь, если

$$\frac{ds}{d\psi} = 0; \qquad \frac{d}{d\psi}\frac{q'}{p'} = 0,$$

т. е. $s = \text{const}$., $q'/p' = \text{const}$., при этом четыре функции ψ: $v(\psi)$, $p(\psi)$, $i_0(\psi)$, $\vartheta(\psi)$ будут связаны двумя соотношениями: уравнением Бернулли и формулой

$$\frac{d}{d\psi}\frac{v^2}{p'^2} = 2\vartheta p^{-1/\varkappa}\frac{1}{p'};$$

линии же тока, согласно (15.20), будут иметь вид ($\xi = x$):

$$(y + \text{const.})^2 + (x + \text{const.})^2 = \frac{v^2}{p'^2}.$$

Это — семейство кругов с общим центром.

Если $p' = 0$, то давление одинаково во всём пространстве. Вследствие первого из уравнений (15.19):

$$y = -\frac{q'\xi}{\sqrt{v^2 - q'^2}} + s(\psi) \quad \text{и} \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = -\xi \frac{d}{d\psi} \frac{q'}{\sqrt{v^2 - q'^2}} + \frac{ds}{d\psi}.$$

Но по второму из (15.19):

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\vartheta \cdot p^{-1/\varkappa}}{\sqrt{v^2 - q'^2}},$$

поэтому должно быть

$$\frac{d}{d\psi} \frac{q'}{\sqrt{v^2 - q'^2}} = 0, \text{ т. е. } \frac{q'}{\sqrt{v^2 - q'^2}} = \text{const.},$$

и семейство линий тока будет семейством параллельных прямых:

$$y = \text{const.}\, x + s(\psi).$$

В качестве второго примера рассмотрим безвихревое движение с

$$\vartheta = \text{const.}, \quad i_0 = \text{const.}$$

Здесь величина скорости v выражается по уравнению Бернулли через одно p:

$$v^2 = 2i_0 - 2\frac{\varkappa\vartheta}{\varkappa - 1} p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}. \tag{15.21}$$

Попытаемся найти все те движения, в которых также и направление скорости (угол наклона её β) зависит лишь от давления: $\beta = \beta(p)$, так что $v_x = v\cos\beta = v_x(p)$; $v_y = v_y(p)$. Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} = -\frac{\partial v_y}{\partial \xi} = -\frac{dv_y}{dp}\frac{\partial p}{\partial \xi},$$

и мы получаем, интегрируя это уравнение:

$$\frac{d\psi}{1} = \frac{d\xi}{\frac{dv_y}{dp}}, \text{ т. е. } \xi = \frac{dv_y}{dp}\psi + f_1(p), \tag{15.22}$$

где $f_1(p)$ — неизвестная функция от p. Удобно далее ввести в качестве переменных вместо ξ и ψ величины p и $\bar{\psi} = \psi$. Тогда

$$\xi = x = \frac{dv_y}{dp}\bar{\psi} + f_1(p); \quad \psi = \bar{\psi}, \tag{15.23}$$

и мы можем написать

$$\frac{\partial y}{\partial \bar{\psi}} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dv_y}{dp} + \frac{\partial y}{\partial \psi}; \quad \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{d^2 v_y}{dp^2}\bar{\psi} + f_1'\right).$$

Вставим сюда $\partial y/\partial x = \partial y/\partial\bar{\xi}$ из (15.15), а $\partial y/\partial\bar{\psi}$ из (15.17); так как из (15.14):

$$\frac{\partial\chi}{\partial\bar{\psi}} = -v_y,$$

то получим:

$$\frac{\partial y}{\partial\bar{\psi}} = \frac{v_y}{\sqrt{v^2-v_y^2}}\frac{dv_y}{dp} + \frac{\vartheta p^{-1/\varkappa}}{\sqrt{v^2-v_y^2}} = -\frac{d}{dp}\sqrt{v^2-v_y^2} = -\frac{dv_x}{dp},$$

$$\frac{\partial y}{\partial p} = \frac{v_y}{v_x}\left(\frac{d^2v_y}{dp^2}\bar{\psi} + f_1'\right).$$

Первое из этих уравнений интегрируется и даёт

$$y = -\frac{dv_x}{dp}\bar{\psi} + f_2(p), \tag{15.24}$$

где f_2 — произвольная функция p. Вставляя это y во второе уравнение, видим, что для возможности движения выбранного нами типа должно быть

$$v_x\frac{d^2v_x}{dp^2} + v_y\frac{d^2v_y}{dp^2} = 0, \tag{15.25}$$

$$\frac{df_2}{dp} = \frac{v_y}{v_x}\frac{df_1}{dp} = \operatorname{tg}\beta\,\frac{df_1}{dp}. \tag{15.26}$$

Уравнение (15.25) показывает, что связь между β и p не может быть произвольной; уравнение (15.26) мы используем при установлении краевых условий. Обращаясь к (15.25), замечаем, что

$$v_xv_x'' + v_yv_y'' = \frac{1}{2}\left[\left(v_x^2\right)'' + \left(v_y^2\right)''\right] - v_x'^2 - v_y'^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(v^2)'' - (v'\cos\beta - v\sin\beta\beta')^2 - (v'\sin\beta + v\cos\beta\beta')^2 = vv'' - v^2\beta'^2.$$

Но тогда (15.25) даёт:

$$\frac{v''}{v} = \beta'^2. \tag{15.27}$$

С другой стороны, вследствие (15.21),

$$v' = -\frac{\vartheta p^{-1/\varkappa}}{v};$$

$$v'' = \frac{d^2v}{dp^2} = \frac{\vartheta p^{-1/\varkappa-1}}{\varkappa v} - \frac{\vartheta^2p^{-2/\varkappa}}{v^3} = \frac{\vartheta^2p^{-2/\varkappa}}{v^3}\left(\frac{v^2}{a^2}-1\right),$$

где a — по-прежнему скорость звука. Таким образом, (15.27) примет вид:

$$\left(\frac{d\beta}{dp}\right)^2 = \frac{\vartheta^2p^{-2/\varkappa}}{v^4}\left(\frac{v^2}{a^2}-1\right).$$

Для возможности движений рассматриваемого здесь типа необходимо, чтобы выражение в скобке в правой части было положительно, т. е. чтобы

было $v > a$. Таким образом, отыскиваемое нами движение возможно только при сверхзвуковых скоростях. Далее,

$$\frac{d\beta}{dp} = \frac{d\beta}{dv}\frac{dv}{dp} = -\frac{d\beta}{dv}\frac{\vartheta p^{-1/\varkappa}}{v}. \tag{15.28}$$

Поэтому, извлекая из обеих частей квадратный корень, получим

$$\frac{d\beta}{dv} = \pm\frac{\sqrt{v^2 - a^2}}{av}.$$

Но эта формула в точности совпадает с формулой (10.3), дающей связь между β и v вдоль характеристик. Следовательно, отыскиваемые нами движения будут такими, что одно из соотношений

$$\zeta\left(\frac{v}{a_*}\right) \mp \beta = \text{const}.$$

выполняется не только вдоль характеристики, но и во всей области движений.

Мы уже упоминали [§ 11 (11.4)], что здесь могут быть даны решения в замкнутом виде. Эти решения мы сейчас и получили. Обращаясь к определению f_1 и f_2, привлечём контурные условия. Предположим, что речь идёт об обтекании контура

$$y = F(x), \tag{15.29}$$

где F — заданная фуикция от x. Заметим, что (15.23) и (15.24) при $\overline{\psi} = \text{const}$. представляют параметрические (с параметром p) уравнения линий тока. Пусть на обтекаемом контуре $\overline{\psi} = 0$. Тогда, вследствие (15.29), должно быть

$$f_2(p) = F(f_1(p)). \tag{15.30}$$

Но по (15.26)

$$\frac{df_2}{dp} = \frac{dF}{df_1}\frac{df_1}{dp} = \operatorname{tg}\beta\frac{df_1}{dp},$$

следовательно,

$$\frac{dF}{df_1} = \operatorname{tg}\beta. \tag{15.31}$$

Уравнение (15.31), решённое относительно f_1, и даст f_1 в функции β, т. е. через p; уравнение (15.30) даст затем $f_2(p)$. Задача будет решена. Отметим, что по (15.21) и (15.28):

$$\frac{dv_x}{dp} = \frac{dv\cos\beta}{dp} = \frac{dv}{dp}\cos\beta - v\sin\beta\frac{d\beta}{dp} =$$
$$= -\frac{\vartheta p^{-1/\varkappa}}{v}\cos\beta \pm v\frac{\sin\beta\vartheta p^{-1/\varkappa}}{v^2}\sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1},$$

т. е.

$$\frac{dv_x}{dp} = -\frac{\varkappa\vartheta p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{\varkappa vp\sin\alpha}\sin(\alpha \mp \beta) = -\frac{v\sin\alpha}{\varkappa p}\sin(\alpha \mp \beta) \tag{15.32}$$

и аналогично

$$\frac{dv_y}{dp} = \mp\frac{v\sin\alpha}{\varkappa p}\cos(\alpha \mp \beta),$$

причём по (10.5)

$$\alpha \mp \beta = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\ \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\ \operatorname{tg}\alpha\right) + \text{const}. \tag{15.33}$$

Таким образом можно записать (15.23) и (15.24) в виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mp\frac{v\sin\alpha}{\varkappa p}\cos(\alpha\mp\beta)\,\bar{\psi} + f_1(p),\\ y &= \ \ \frac{v\sin\alpha}{\varkappa p}\sin(\alpha\mp\beta)\,\bar{\psi} + f_2(p). \end{aligned}\right\} \tag{15.34}$$

При практическом использовании формул (15.34) надо вспомнить, что v и $\sin\alpha$ связаны соотношением (9.22) (уравнение Бернулли)

$$\left(\frac{v}{a_*}\right)^2 = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\,\frac{1}{1+\dfrac{2}{\varkappa-1}\sin^2\alpha} \tag{15.35}$$

и что p и $\sin\alpha$ связаны, вследствие (8.10) и (15.35), соотношением

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varkappa-1}{2}\,\frac{1}{\sin^2\alpha}+1\right)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = \left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left(1+\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\operatorname{ctg}^2\alpha\right)^{-\frac{\varkappa}{(\varkappa-1)}}.$$

Тогда (15.34) примут вид:

$$x = \mp\frac{a_*}{\varkappa p_0}\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left(1+\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\operatorname{ctg}^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\cos(\alpha\mp\beta)\,\bar{\psi} + f_1(p),$$

$$y = \ \ \frac{a_*}{\varkappa p_0}\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left(1+\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\operatorname{ctg}^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\sin(\alpha\mp\beta)\,\bar{\psi} + f_2(p).$$

Так, например, при обтекании угла (задача, решённая в § 12) мы должны положить

$$f_1 \equiv f_2 \equiv 0.$$

Тогда будет

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta),$$

т. е.

$$\theta = \alpha + \beta;$$

далее будет

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{a_*^2}{\varkappa^2 p_0^2}\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}\bar{\psi}^2\left(1+\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\operatorname{ctg}^2\alpha\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}$$

и, вследствие (15.33), вводя θ_1 по формуле (12.4), получим сразу

$$r = r_0\left(\cos\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\,\theta_1\right)^{-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}},$$

где

$$r_0 = \frac{a_*}{\varkappa p_0}\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\bar{\psi}.$$

§ 16. Дозвуковые скорости. Теория Чаплыгина. Примеры. Переходя к движениям, происходящим со всюду дозвуковыми скоростями, мы начнём с точных решений, получаемых в явном виде. Эти решения были даны в замечательных работах Чаплыгина, содержащих обобщения теории струй Кирхгофа — Жуковского на случай безвихревого движения сжимаемой жидкости.

Имеем безвихревое движение и берём уравнение Бернулли в виде:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{v^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} a_*^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}, \tag{16.1}$$

где $\rho_0 = \text{const}$. вследствие отсутствия вихрей. В формуле (6.5) пишем $\rho_0\psi$ вместо ψ (иная нумерация линии тока)

$$\rho v_x = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \rho v_y = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{16.2}$$

Введём потенциал скоростей φ:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{16.3}$$

Оставим φ и ψ в качестве искомых функций, но введём в качестве независимых переменных вместо координат x и y величину скорости v и угол наклона β скорости по отношению к оси Ox. В этом и заключается преобразование Чаплыгина.

Прежде всего имеем:

$$v_x = v\cos\beta, \quad v_y = v\sin\beta. \tag{16.4}$$

По (16.4), (16.3), (16.2) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = v(\cos\beta\, dx + \sin\beta\, dy), \\ d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \frac{\rho_0}{\rho} v(-\sin\beta\, dx + \cos\beta\, dy). \end{aligned}\right\} \tag{16.5}$$

Решая эти уравнения относительно dx и dy, получим:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{1}{v}\cos\beta\, d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho v}\sin\beta\, d\psi, \\ dy &= \frac{1}{v}\sin\beta\, d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho v}\cos\beta\, d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{16.6}$$

Это значит, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{1}{v}\cos\beta\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\rho_0}{\rho v}\sin\beta\frac{\partial \psi}{\partial v}, \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} &= \frac{1}{v}\cos\beta\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\rho_0}{\rho v}\sin\beta\frac{\partial \psi}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{1}{v}\sin\beta\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\rho_0}{\rho v}\cos\beta\frac{\partial \psi}{\partial v}, \\ \frac{\partial y}{\partial \beta} &= \frac{1}{v}\sin\beta\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\rho_0}{\rho v}\cos\beta\frac{\partial \psi}{\partial \beta}. \end{aligned}\right\} \tag{16.7}$$

Нам остаётся только исключить x и y путём перекрёстного дифференцирования уравнений, входящих в (16.7) соответственно. Мы получим сперва (ρ_0/ρ по (16.1) зависит лишь от v):

$$\frac{-\sin\beta}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\rho_0}{\rho v}\cos\beta\frac{\partial\psi}{\partial v}=-\frac{\cos\beta}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}-\sin\beta\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\cdot\frac{d}{dv}\left(\frac{\rho_0}{\rho v}\right),$$

$$\frac{\cos\beta}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\rho_0}{\rho v}\sin\beta\frac{\partial\psi}{\partial v}=-\frac{\sin\beta}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\cos\beta\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\cdot\frac{d}{dv}\left(\frac{\rho_0}{\rho v}\right).$$

Умножая первое из этих уравнений на $-\sin\beta$, второе на $\cos\beta$ и складывая, получим:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{d}{dv}\left(\frac{\rho_0}{\rho v}\right)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\beta}. \tag{16.8}$$

Умножая первое из наших уравнений на $\cos\beta$, второе на $\sin\beta$ и складывая, получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}=v\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial v}. \tag{16.9}$$

Представляя ρ_0/ρ по уравнению Бернулли (16.1), будем иметь:

$$\frac{d}{dv}\frac{\rho_0}{\rho v}=\frac{d}{dv}\left[\left(1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{v^2}{a_*^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\frac{1}{v}\right]=\frac{\rho_0}{\rho v^2}\cdot\frac{\frac{v^2}{a_*^2}-1}{1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{v^2}{a_*^2}}$$

или, так как по (8.9)

$$\frac{\frac{v^2}{a_*^2}-1}{1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{v^2}{a_*^2}}=\frac{v^2}{a^2}-1=\mathsf{M}^2-1,$$

где $\mathsf{M}=v/a$, мы можем написать вместо (16.8)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{\mathsf{M}^2-1}{v}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}. \tag{16.10}$$

Наконец, введём вместе с С. А. Чаплыгиным вместо v величину τ:

$$\tau=\frac{v^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}. \tag{16.11}$$

Мы получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}&=2\tau(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau};\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}&=-\frac{1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau}{2\tau(1-\tau)}(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\end{aligned}\right\} \tag{16.12}$$

или одно уравнение для ψ:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[2\tau(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right]+\frac{1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau}{2\tau(1-\tau)}(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}=0. \quad (16.13)$$

Уравнения (16.12) и (16.13) решают вопрос о движении газа, если известна область переменных τ, β, отвечающая этому движению, если дано ψ на границах этой области, если везде внутри области τ, β. функция ψ со своими первыми производными конечна, однозначна и непрерывна, наконец, если всегда будет

$$0<\tau<\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}, \quad \text{т. е.} \quad 0<v<a_*, \quad (16.14)$$

и только в отдельных точках контура области может быть $\tau=0$ или $\tau=\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}$. Остановимся на доказательстве определённости вида функции ψ, удовлетворяющей указанным условиям. Применим доказательство от противного: пусть есть две функции ψ_1 и ψ_2, удовлетворяющие нашим требованиям; покажем, что $\psi_1-\psi_2=0$. Функция $\psi_3=\psi_1-\psi_2$ в данной области (τ, β) конечна, непрерывна, удовлетворяет уравнениям (16.13) и обращается в нуль на контуре. Умножим (16.13) на $\psi_3\,d\tau\,d\beta$ и проинтегрируем по всей нашей области (τ, β). Обозначая результат интегрирования через I, получим без труда

$$I=-\int\int\left\{2\tau(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial\tau}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau}{2\tau(1-\tau)}(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}\right)^2\right\}d\tau\,d\beta+$$
$$+\int\left\{2\tau(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\psi_3\frac{\partial\psi_3}{\partial\tau}\,d\beta+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau}{2\tau(1-\tau)}(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\psi_3\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}\,d\tau\right\}=0,$$

где двойной интеграл распространён на всю площадь (τ, β), однократный — на её контур. Но на контуре будет $\psi_3=0$, значит, равенство $I=0$ может иметь место лишь при условии равенства нулю двойного интеграла, а при высказанных выше условиях подынтегральная функция в этом интеграле не может быть отрицательной. Ясно, что надо принять эту подынтегральную функцию равной нулю, так что внутри области будет везде

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial\tau}=\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}=0, \quad \text{т. е.} \quad \psi_3=\text{const.}=0.$$

В работе С. А. Чаплыгина доказывается, на основании (16.14). что и φ и ψ, рассматриваемые как функции координат x, y, не имеют

в области течения ни максимума, ни минимума; далее доказывается с помощью (16.10) и (16.11), что β как функция от φ и ψ не имеет ни максимума, ни минимума, а τ не имеет максимума (минимум $\tau = 0$). Отсюда следует, что в области φ и ψ не может существовать замкнутых кривых, вдоль которых x, y, τ, β сохраняли бы постоянное значение. Наконец, из (16.12) заключаем о невозможности существования максимума или минимума функций φ и ψ от τ и β.

После того как функция ψ, а за ней φ определены, остается ещё показать, что эти функции действительно представляют функцию тока и потенциал скоростей, т. е. надо показать, что формулы для φ и ψ определяют τ и β в зависимости от x и y однозначно. Для этого достаточно показать, что якобиан $D(x, y)/D(\tau, \beta)$ не обращается в нуль внутри области (τ, β); рассчитаем этот определитель:

$$\frac{D(x, y)}{D(\tau, \beta)} = \frac{D(x, y)}{D(\varphi, \psi)} \cdot \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\tau, \beta)}.$$

Но на основании (16.6), (16.7) и (16.1):

$$\frac{D(x, y)}{D(\varphi, \psi)} = \frac{(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}}{a_*^2 \tau} \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1},$$

и на основании (16.12)

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\tau, \beta)} = -\frac{1 - \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau}{2\tau(1-\tau)} (1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right)^2 - 2\tau (1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)^2.$$

Отсюда видно, что если всюду будет $1 - \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau \geqslant 0$, т. е. $v \leqslant a_*$, то равенство

$$\frac{D(x, y)}{D(\tau, \beta)} = 0$$

возможно лишь при обращении в нуль обеих производных $\partial\psi/\partial\beta$ и $\partial\psi/\partial\tau$ одновременно. Это может быть лишь в исключительных случаях.

Обратимся к задаче о струях. Будем рассматривать течения газа, преграждённые плоскими стенками, с краёв которых газ срывается, обтекая затем области постоянного давления. Будем искать частное решение уравнения (16.13) в виде:

$$\psi = z_n(\tau) \sin(2n\beta + \alpha_n),$$

где $z_n(\tau)$ — функция одного τ, а n и α_n — постоянные.

Для определения z_n получаем уравнение

$$\frac{d}{d\tau} \tau (1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}} \frac{dz_n}{d\tau} - \frac{1 - \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau}{\tau(1-\tau)} (1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}} n^2 z_n = 0 \quad (16.15)$$

или

$$\tau^2(1-\tau)\frac{d^2z_n}{d\tau^2}+\tau\left(1+\frac{2-\varkappa}{\varkappa-1}\tau\right)\frac{dz_n}{d\tau}-n^2\left(1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau\right)z_n=0.$$

Положим теперь:

$$z_n=\tau^n y_n(\tau)\quad n>0;$$

мы получим для определения y_n уравнение:

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2y_n}{d\tau^2}+\left[2n+1+\left(\frac{1}{\varkappa-1}-2n-1\right)\tau\right]\frac{dy_n}{d\tau}+$$
$$+\frac{n(2n+1)}{\varkappa-1}y_n=0. \qquad (16.16)$$

Это есть известное уравнение для гипергеометрического ряда. Составляя характеристическое уравнение для показателя ρ в области точки $\tau=0$, имеем:

$$\rho(\rho-1)+(2n+1)\rho=0,$$

т. е.

$$\rho_1=0;\quad \rho_2=-2n.$$

Сохраняя то решение для ψ, которое остаётся конечным при $\tau=0$ (т. е. беря $\rho_1=0$), мы будем иметь, пользуясь обозначением Гаусса:

$$y_n(\tau)=F(a_n,\ b_n,\ 2n+1;\ \tau), \qquad (16.17)$$

где

$$a_n+b_n=2n-\frac{1}{\varkappa-1};\quad a_nb_n=-\frac{n(2n+1)}{\varkappa-1}.$$

Посмотрим теперь, какие из задач указанного выше типа могут быть решены при помощи функции

$$\psi=A+B\beta+\sum B_nz_n(\tau)\sin(2n\beta+\alpha_n),$$

где n пробегает счётную последовательность возрастающих положительных значений, A, B, B_n, α_n — постоянные.

Так как газовая струя ограничена линиями тока, то вдоль контура области (τ, β) функция ψ должна принимать те или иные постоянные значения. При этом, если рассматриваемая часть контура отвечает плоской стенке, то вдоль неё $\beta=\text{const.}$; если же речь идёт о свободной поверхности, то там будет $p_1=\text{const.}$, и по уравнению Бернулли $v=v_1=\text{const.}$, а значит, и

$$\tau=\frac{v_1^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}=\tau_1=\text{const.}$$

Сравним теперь нашу задачу с задачей о течении несжимаемой жидкости при тех же граничных условиях, т. е. при том же располо-

жении стенок, при тех же скоростях в бесконечности и при тех же скоростях на границе струй. Задача о струйном течении несжимаемой жидкости была решена по методу Жуковского в части 1. Следуя этому методу, найдём связь между переменными

$$\ln\frac{v_1}{v}+i\beta=\ln\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau}}+i\beta$$

и

$$w=\Phi+i\Psi,$$

где Φ и Ψ — потенциал скоростей и функция тока в соответствующей задаче о несжимаемой жидкости. Пусть мы получили

$$w=f\left(\ln\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau}}+i\beta\right); \tag{16.18}$$

предположим, что f может быть разложена в ряд вида:

$$w=K+B\left[\ln\left(\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau}}\right)+i\beta\right]+\sum K_n\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^n e^{-2ni\beta}$$

(где K, B, K_n — постоянные), так что

$$\Psi=A+B\beta+\sum B_n\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^n\sin(2n\beta+\alpha_n), \tag{16.19}$$

где A, B_n — некие постоянные. Наша задача о течении газа разрешится тогда формулой:

$$\lambda\psi=A+B\beta+\sum B_n\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^n\frac{y_n}{y_{n,1}}\sin(2n\beta+\alpha_n), \tag{16.20}$$

где $y_n(\tau)$ есть гипергеометрический ряд (16.17), $y_{n,1}=y_n(\tau_1)$, λ — постоянные, а A, B, B_n имеют как раз те значения, которые входят в (16.19). В самом деле, при $\tau=\tau_1$ правые части (16.19) и (16.20) совпадают, — значит, если было $\Psi=\text{const}$. при $\tau=\tau_1$, то будет $\psi=\text{const}$. при $\tau=\tau_1$. Далее, если при каком-нибудь значении $\beta=\beta_0$ функция, определяемая (16.19), не зависит от τ, то это будет лишь, если $\sin(2n\beta_0+\alpha_n)=0$ при всяком n, участвующем в сумме. Но тогда и правая часть (16.20) будет постоянна при том же β. Таким образом, ψ из (16.20) будет удовлетворять граничным условиям задачи. Формально (16.20) удовлетворяет уравнению (16.13). Таким образом, если ряд (16.20) будет сходиться при всяком $\tau<\tau_1$, а при $\tau=\tau_1$ будет стремиться к тому же пределу, что и ряд (16.19), причём не только ряд (16.20), но и ряды, составленные формально из (16.20) путём его почленного дифференцирования по τ и β, будут сходиться абсолютно и равномерно, то мы вправе считать, что частные производные $\partial\psi/\partial\tau$ и $\partial\psi/\partial\beta$ находятся путём дифференцирования ряда (16.20) и что ψ будет действительно искомой функцией тока; тогда, используя (16.12) и (16.6), мы сможем по известному ψ

найти φ, x и z. Задача будет решена. В частности, по (16.12) имеем для $d\varphi$:

$$\lambda\, d\varphi = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\, d\beta + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\, d\tau =$$

$$= \lambda 2\tau (1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}} \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\, d\beta - \lambda \frac{1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau}{2\tau(1-\tau)} (1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}} \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\, d\tau =$$

$$= \sum \frac{2B_n}{\tau_1^n y_{n,1}} \Big\{ \tau (1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}} z_n' \sin(2n\beta + \alpha_n)\, d\beta -$$

$$- n \frac{1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau}{2\tau(1-\tau)} (1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}} z_n \cos(2n\beta + \alpha_n)\, d\tau \Big\} -$$

$$- B \frac{1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau}{2\tau(1-\tau)} (1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\, d\tau.$$

Заменяя члены, стоящие при $d\tau$ под знаком Σ, при помощи (16.15) и выполняя интегрирование, получим без труда:

$$\lambda\varphi = C + B(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}} - \frac{B}{2} \int \frac{(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}}{\tau}\, d\tau -$$

$$- (1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}} \sum B_n \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^n \frac{y_n}{y_{n,1}} x_n(\tau) \cos(2n\beta + \alpha_n), \quad (16.21)$$

где

$$x_n = 1 + \frac{\tau}{n} \frac{y_n'}{y_n}.$$

Доказательства сходимости даны у Чаплыгина.

В качестве первого примера на применение метода Чаплыгина рассмотрим удар струи газа в пластинку, перпендикулярную начальному направлению струи; предположим, что струя симметрично делится пластинкой на две части, причём дана длина пластинки $2l$ и толщина струи на бесконечности — $2b$, а также задана скорость на границе струи.

В случае соответствующего движения несжимаемой жидкости потенциал Φ и функция тока Ψ связаны с $\ln v_1/v$ и β формулой

$$w = \Phi + i\Psi = -\frac{Q}{2\pi} \ln \left[1 - \frac{\sin^2 m}{\sin^2\left(\beta - i \ln \frac{v_1}{v}\right)} \right], \quad (16.22)$$

где $Q/2$ и $-Q/2$ суть значения Ψ на верхней и нижней внешних границах струи соответственно, а m — угол, под которым каждая из двух частей струи наклонена к оси X на бесконечности [см. часть 1, глава шестая, формула (17.10)].

Чтобы решить задачу о струе газа, разложим (16.22) в ряд и отделим его действительную и мнимую части. Имеем сначала:

$$\frac{2\pi}{Q}w = 2\ln\sin\left(\beta - i\ln\frac{v_1}{v}\right) - \ln\left[\sin^2\left(\beta - i\ln\frac{v_1}{v}\right) - \sin^2 m\right] =$$

$$= 2\ln\sin\left(\beta - i\ln\frac{v_1}{v}\right) - \ln\left[\cos 2m - \cos 2\left(\beta - i\ln\frac{v_1}{v}\right)\right] + \ln 2 =$$

$$= 2\ln\sin\frac{\ln\frac{v_1}{v} + i\beta}{i} - \ln\sin\frac{\ln\frac{v_1}{v} + i\beta - im}{i} - \ln\sin\frac{\ln\frac{v_1}{v} + i\beta + im}{i}.$$

Вводя вместо тригонометрических функций показательные, получим:

$$\frac{2\pi w}{Q} = 2\ln\left(1 - e^{-2\ln\frac{v_1}{v} - 2i\beta}\right) - \ln\left[1 - e^{-2\ln\frac{v_1}{v} - 2i(\beta+m)}\right] -$$

$$- \ln\left[1 - e^{-2\ln\frac{v_1}{v} - 2i(\beta-m)}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\ln\frac{v_1}{v}}}{n}\left[e^{-2n(\beta-m)i} + e^{-2n(\beta+m)i} - 2e^{-2n\beta i}\right] =$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n\ln\frac{v_1}{v}}}{n}(1 - \cos 2nm)(\cos 2n\beta - i\sin 2n\beta).$$

Наконец, для Ψ получаем, вставляя $2\ln v_1/v = \ln \tau_1/\tau$:

$$\frac{\pi}{Q}\Psi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^n \sin 2n\beta\,(1 - \cos 2nm).$$

Таким образом, для газовой струи можно написать

$$\frac{\pi\psi}{Q} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^n \frac{y_n(\tau)}{y_n(\tau_1)}(1 - \cos 2nm)\sin 2n\beta. \qquad (16.23)$$

Вследствие (16.21) мы можем затем написать ($B = 0$):

$$\frac{\pi\varphi}{Q} = -(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^n \frac{y_n x_n}{y_n(\tau_1)}(1 - \cos 2nm)\cos 2n\beta \qquad (16.24)$$

(мы взяли $C = 0$, что означает, что при $\tau = \beta = 0$ мы берём не только $\psi = 0$, но и $\varphi = 0$). Остаётся только определить значение чисел Q и m; воспользуемся для этого известными нам величинами l и b. Для определения Q представим поток жидкости через прямую,

перпендикулярную к оси Ox и находящуюся на бесконечности «слева», двумя способами: во-первых,

$$\left(\int_{-b}^{+b} v\rho\, dy\right)_{x=-\infty} = \int_{-b}^{+b} v_1\rho_1\, dy = 2bv_1\rho_1,$$

где

$$\rho_1 = \rho_0\left(1 - \frac{v_1^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}};$$

во-вторых:

$$\left(\int_{-b}^{+b} v\rho\, dy\right)_{x=-\infty} = \left(\int_{-b}^{+b} \rho_0\frac{\partial\psi}{\partial y}\, dy\right)_{x=-\infty} = \rho_0 Q;$$

таким образом,

$$Q = \frac{2bv_1\rho_1}{\rho_0} = 2bv_1\left(1 - \frac{v_1^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}. \qquad (16.25)$$

Чтобы найти m, запишем, что длина пластинки есть $2l$. Так так при перемещении вдоль пластинки будет $\psi = \text{const.}$, т. е. $d\psi = 0$, то вдоль пластинки

$$dy = \frac{\partial y}{\partial\varphi}\, d\varphi + \frac{\partial y}{\partial\psi}\, d\psi = \frac{\partial y}{\partial\varphi}\, d\varphi;$$

кроме того, на пластинке

$$\beta = \text{const.} \quad \text{и} \quad d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\, d\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\, d\tau = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\, d\tau.$$

Таким образом, вдоль пластинки

$$dy = \frac{\partial y}{\partial\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\, d\tau,$$

но, вследствие (16.6),

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{\sin\beta}{v} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_{*\tau}^2}},$$

так что вдоль верхней части пластинки будет ($\beta = \pi/2$):

$$dy = \frac{1}{\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_{*\tau}^2}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\, d\tau,$$

и, следовательно,

$$l=\int_0^l dy=\frac{1}{a_*\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}}\int_0^{\tau_1}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)_{\beta=\frac{\pi}{2}}d\tau.$$

Воспользовавшись второй из формул (16.12) для выражения $\partial\varphi/\partial\tau$ и вспоминая уравнение (16.15), которому удовлетворяет $z_n=\tau^n y_n$, получим для l, вследствие (16.23):

$$l=\frac{Q}{\pi a_*\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}}\times$$

$$\times\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{\tau_1^n y_n(\tau_1)}\frac{1-\cos 2nm}{n^2}\int_0^{\tau_1}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{d}{d\tau}\left[\tau(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\frac{dz_n}{d\tau}\right]d\tau. \quad (16.26)$$

В этом уравнении l нам задано, а Q определяется по (16.25). Таким образом, мы можем из (16.26) найти m. Остановимся ещё на выражении сопротивления R пластинки. Очевидно, что

$$R=2\int_0^l(p-p_1)\,dy=2\int_0^{\tau_1}\frac{1}{\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)_{\beta=\frac{\pi}{2}}d\tau-2p_1 l,$$

где p_1 — давление, отвечающее скорости v_1, т. е. давление позади пластинки. Но по уравнению Бернулли [формула (8.10)]:

$$p=p_0(1-\tau)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}},\quad p_1=p_0(1-\tau_1)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}},$$

где $p_0=\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}a_*^2\rho_0$. Таким образом, будем иметь для R:

$$R=-\frac{Q}{\pi}\frac{a}{\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}}\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\rho_0\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{\tau_1^n y_{n,1}}\frac{1-\cos 2nm}{n^2}\times$$

$$\times\int_0^{\tau_1}\frac{(1-\tau)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}{\sqrt{\tau}}\frac{d}{d\tau}\left[\tau(1-\tau)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\frac{dz_n}{d\tau}\right]d\tau-2p_1 l. \quad (16.27)$$

Интегралы, входящие в (16.26) и (16.27), легко вычисляются. В самом деле, обозначая неопределённый интеграл (16.26) через

$I_n(\tau)$, имеем:

$$I_n(\tau)=\int \frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{d}{d\tau}\left[\tau(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\frac{dz_n}{d\tau}\right]d\tau=$$

$$=\sqrt{\tau}(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}z_n'+\int\frac{(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}}{2\sqrt{\tau}}\frac{dz_n}{d\tau}d\tau=$$

$$=\sqrt{\tau}(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}z_n'+\frac{(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}}{2\sqrt{\tau}}z_n+$$

$$+\frac{1}{4}\int z_n\frac{\left(1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau\right)}{\tau\sqrt{\tau}}(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}-1}d\tau.$$

Но вследствие (16.15) последний член справа даёт $1/4n^2 I_n(\tau)$. Таким образом:

$$I_n(\tau)=\frac{4n^2}{4n^2-1}(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\left\{\sqrt{\tau}z_n'+\frac{1}{2\sqrt{\tau}}z_n\right\}=$$

$$=\frac{4n^2}{4n^2-1}(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\frac{d\sqrt{\tau}z_n}{d\tau}. \qquad (16.28)$$

Что же касается неопределённого интеграла из (16.27), то его можно представить в виде:

$$\int(1-\tau)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}dI_n=(1-\tau)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}I_n+\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\int(1-\tau)^{\frac{1}{\varkappa-1}}I_n(\tau)d\tau=$$

$$=(1-\tau)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}I_n+\frac{4n^2}{4n^2-1}\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\sqrt{\tau}z_n. \qquad (16.29)$$

Замечая ещё, что вследствие (16.28)

$$I_n(0)=0 \qquad (z_n=\tau^n y_n),$$

напишем (16.26) в виде

$$l=\frac{Q}{\pi\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}}\frac{1}{a_*}\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{\tau_1^n y_{n,1}}\frac{1-\cos 2nm}{n^2}I_n(\tau_1), \qquad (16.30)$$

а (16.27) даст вместе с (16.30):

$$R=\frac{\varkappa+1}{\varkappa}a_*^2\rho_0 l(1-\tau_1)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}+$$

$$+\frac{4Q}{\pi}\frac{a_*}{\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\sqrt{\tau_1}\rho_0\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{1-\cos 2nm}{4n^2-1}-2p_1 l.$$

Первый и третий члены правой части сокращаются (см. выражение для p_1). Что же касается суммы, то она вычисляется в виде

$$\sum_1^\infty (-1)^{n+1}\frac{1-\cos 2nm}{4n^2-1}=\frac{\pi}{4}(1-\cos m). \tag{16.31}$$

Заменяя $\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\,a_*\sqrt{\tau_1}=v_1$ и вставляя Q из (16.25), получаем:

$$R=Q\rho_0(1-\cos m)v_1=2b\rho_0\left\{1-\frac{v_1^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}\right\}^{\frac{1}{\varkappa-1}}(1-\cos m)v_1^2. \tag{16.32}$$

Запишем ещё, используя (16.28) и (16.31), l из (16.30) в виде

$$l=\frac{Q}{\pi\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\,a_*\sqrt{\tau_1}}\left\{\frac{\pi}{2}(1-\cos m)+\right.$$

$$\left.+\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{4nx_n(\tau_1)}{4n^2-1}(1-\cos 2nm)\right\}(1-\tau_1)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}. \tag{16.33}$$

[Легко видеть, что $x_n=1+\frac{\tau}{n}\frac{y_n'}{y_n}=\frac{\tau}{ny_n}\left(\frac{ny_n}{\tau}+y_n'\right)=\frac{\tau z_n'}{nz_n}$.] Деля (16.31) на (16.33), получим окончательно

$$R=2l\rho_1v_1^2\frac{\pi}{\pi+\frac{8}{1-\cos m}\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{nx_n(\tau_1)}{4n^2-1}(1-\cos 2nm)}, \tag{16.34}$$

где ρ_1 — по-прежнему плотность позади пластинки.

Напомним, что m приходится определять из (16.33) после того, как Q известно. В случае, когда $b=\infty$, т. е. на пластинку набегает поток бесконечной ширины, мы получим, очевидно,

$$m=0.$$

В качестве второго примера рассмотрим истечение газа из бесконечно широкого сосуда. Пусть давление во внешнем пространстве есть p_1, давление внутри сосуда, на бесконечности, там, где скорость $v=0$, есть p_0. Пусть $p_0>p_1$. Обозначим ширину отверстия

BB' (рис. 42) через $2b$, а угол, который составляют стенки с осью Ox, — через $q\pi/2$ (при $q=1$ получим истечение из сосуда, у которого стенки служат одна продолжением другой). Для соответствующей задачи в несжимаемой жидкости мы будем иметь (см. ч. 1, стр. 321 и далее; мы применяем рассмотренную там нумерацию линий тока):

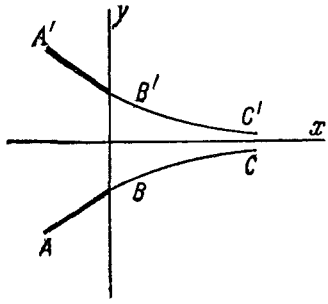

Рис. 42.

$$w=\Phi+i\Psi=$$

$$=-\frac{Q}{\pi}\ln\left[i\sin\left(\frac{\beta-i\ln\frac{v_1}{v}}{q}\right)\right]. \tag{16.35}$$

При этом, когда $\beta=0$, мы имеем справа действительную величину, т. е. $\Psi=0$ (ось Ox — середина струи). Если $\beta=\pi q/2$ (прямая AB), получим $\Psi=-Q/2$; то же значение Ψ будет на нижней границе BC струи ($v_1/v=1$, $\beta>0$). Если же $\beta=-\pi q/2$, то $\Psi=Q/2$ (стенка $A'B'$), и если $\beta<0$, $v=v_1$ (верхняя часть $B'C'$ струи), то тоже будет $\Psi=Q/2$.

Мы можем представить w в виде:

$$w=-\frac{Q}{\pi}\ln\frac{e^{1/q\left(\beta-i\ln\frac{v_1}{v}\right)i}-e^{-1/q\left(\beta-i\ln\frac{v_1}{v}\right)i}}{2}=$$

$$=-\frac{Q}{\pi}\left\{i\frac{\beta}{q}+\frac{1}{q}\ln\frac{v_1}{v}-\ln 2+\ln\left[1-e^{-2(\beta-i\ln v_1/v)\frac{i}{q}}\right]\right\}. \tag{16.36}$$

Разлагая в ряд ln, получим:

$$\frac{\pi}{Q}(\Phi+i\Psi)=$$

$$=\ln 2-\frac{1}{q}\left(\ln\frac{v_1}{v}+i\beta\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{v}{v_1}\right)^{2n/q}\left(\cos\frac{2n}{q}\beta-i\sin\frac{2n}{q}\beta\right),$$

так что, если $v/v_1=(\tau/\tau_1)^{1/2}$, то

$$\frac{\pi}{Q}\Psi=-\frac{\beta}{q}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{n/q}\sin\frac{2n}{q}\beta.$$

Ряд этот — абсолютно сходящийся, и, применяя формулу (16.20), получим для функции тока ψ, определяющей истечение сжимаемой жидкости из того же сосуда и при той же скорости на струе:

$$\frac{\pi}{Q}\psi=-\frac{1}{q}\beta-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{n/q}\frac{y_{n/q}}{y_{n/q}}\sin\frac{2n}{q}\beta. \tag{16.37}$$

Потенциал скоростей по (16.21) запишется в виде ($B = -1/q$):

$$\frac{\pi}{Q}\varphi = C - \frac{(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}}{q} + \frac{1}{2q}\int \frac{(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}}{\tau}\,d\tau + \\ + (1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{n/q} \frac{y_{n/q}}{y_{n\,q,\,1}} \cos\frac{2n\beta}{q}. \quad (16.38)$$

Остаётся только определить Q. Чтобы сделать это, найдём, как меняется y вдоль струи. Определим сперва вообще y как функцию от τ до β. Для этого напишем выражение для $\partial y/\partial\beta$. Имеем:

$$\frac{\partial y}{\partial\beta} = \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}.$$

Но

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = -\frac{1}{D}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{v\sin\beta}{D}, \quad \frac{\partial y}{\partial\psi} = \frac{1}{D}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{v\cos\beta}{D},$$

где

$$D = \frac{\rho}{\rho_0}v^2 = (1-\tau)^{\frac{1}{\varkappa-1}}v^2.$$

Таким образом,

$$v\frac{\partial y}{\partial\beta} = \sin\beta\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \cos\beta\frac{\partial\psi}{\partial\beta}(1-\tau)^{\frac{1}{\varkappa-1}}.$$

Воспользовавшись (16.37) и (16.38), мы получим:

$$\frac{\tau}{Q}\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2\tau}\,\frac{\partial y}{\partial\beta} = \\ = -\frac{2}{q}(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{n/q}\frac{y_{n/q}}{y_{n/q,\,1}}\left[\varkappa\sin^2\frac{n\beta}{q}\sin\beta + \cos\frac{2n\beta}{q}\cos\beta\right] - \\ - \frac{1}{q}\cos\beta\,(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}.$$

Интегрируя по β, получим:

$$\frac{\tau}{Q}\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2\tau}\,y = \\ = C(\tau) - \frac{2}{q}(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{n/q}\frac{y_{n/q}}{y_{n/q,\,1}}\left[x_0\int_0^{\beta}\sin\frac{2n\beta}{q}\sin\beta\,d\beta + \right. \\ \left. + \int_0^{\beta}\cos\frac{2n\beta}{q}\cos\beta\,d\beta\right] - \frac{1}{q}\sin\beta\,(1-\tau)^{-\frac{1}{\varkappa-1}},$$

где $C(\tau)$ — произвольная функция от τ. Так как при $\beta = 0$ мы должны получить $y = 0$, то следует считать

$$C(\tau) \equiv 0.$$

Вдоль линии тока $\tau = \tau_1$ (граница струи) имеем [1]):

$$\frac{\pi}{Q}\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2\tau_1}\,y = \frac{2}{q}(1-\tau_1)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\left\{-\int_0^\beta \sin\beta \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\tau_1)\sin\frac{2n\beta}{q}\,d\beta - \right.$$

$$\left. -\int_0^\beta \cos\beta \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2n\beta}{q}\,d\beta\right\} - \frac{(1-\tau_1)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}}{q}\sin\beta.$$

Второй из интегралов, стоящих справа, легко вычисляется. В самом деле, так как по известной теореме тригонометрии

$$\sum_{n=1}^{m}\cos\frac{2n\beta}{q} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2m+1)\frac{\beta}{q}}{\sin\frac{\beta}{q}} - 1\right],$$

мы можем написать:

$$\int_0^\beta \cos\beta\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2n\beta}{q}\,d\beta = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^\beta \cos\beta\left[\frac{\sin\frac{2m+1}{q}\beta}{\sin\frac{\beta}{q}} - 1\right]d\beta.$$

Но

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^y \frac{\sin\mu x}{\sin x}\,dx = \pm\frac{\pi}{4},$$

причём знак плюс надо брать, когда $y > 0$, и знак минус, — когда $y < 0$.

Итак,

$$\int_0^\beta \cos\beta\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2n\beta}{q}\,d\beta = \frac{1}{2}\left(-\sin\beta \pm q\frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, вдоль границы струи

$$\frac{\pi}{Q}\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2\tau_1}\,(1-\tau_1)^{\frac{1}{\varkappa-1}}\,y = -\frac{2}{q}\int_0^\beta \sin\beta\sum_{n=1}^{\infty}x_{n_1}\sin\frac{2n\beta}{q}\,d\beta \mp \frac{\pi}{2},$$

причём $-\pi/2$ будет для нижней границы ($\beta > 0$) и $\pi/2$ — для верхней ($\beta < 0$).

[1]) Подробности о сходимости рядов см. в работе С. А. Чаплыгина.

В точке B будет

$$\beta = \frac{\pi}{2} q,$$

в точке B':

$$\beta = -\frac{\pi}{2} q.$$

Таким образом, мы получим связь между Q и b в виде:

$$\frac{2\pi}{Q} \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} a_*^2 \tau_1} (1-\tau_1)^{\frac{1}{\varkappa-1}} b = \pi - \frac{4}{q} \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\tau_1) \int_0^{\frac{\pi}{2} q} \sin\beta \sin\frac{2n\beta}{q} d\beta =$$

$$= \pi - \frac{2}{q} \sin\frac{\pi}{2} q \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\tau_1) \frac{\frac{4n}{q}}{\frac{4n^2}{q^2} - 1} (-1)^n.$$

Мы вернёмся к несжимаемой жидкости, полагая $\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} a_*^2 \tau} = v_1$, $x_n \to 1$, $1 - \tau_1 \to 1$. Так как

$$\sum_{n=1}^{m} \sin\frac{2n\beta}{q} = + \frac{\sin(2m+1)\frac{\beta}{q} + \cos\frac{\beta}{q}}{2\sin\frac{\beta}{q}},$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\beta} \sin\beta \sin\frac{2n\beta}{q} d\beta =$$

$$= + \lim_{m\to\infty} \int_0^{\beta} \sin\beta \frac{\sin(2m+1)\frac{\beta}{q}}{2\sin\frac{\beta}{q}} d\beta + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} \sin\beta \operatorname{ctg}\frac{\beta}{q} d\beta =$$

$$= \pm q \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_0^{\beta} \sin\beta \operatorname{ctg}\frac{\beta}{q} d\beta,$$

причём верхний знак надо брать при $\beta > 0$ и нижний при $\beta < 0$. Теперь получим

$$\frac{2\pi v_1}{Q} b = \pi + \frac{2}{q} \int_0^{\pi q/2} \sin\beta \operatorname{ctg}\frac{\beta}{q} d\beta,$$

что совпадает с формулой (17.6) ч. 1, гл. VI; надо лишь, в согласии с принятым там обозначением, заменить v_1 на c, а $\pi q/2$ на α.

Определим ещё «сжатие струи» в сжимаемой жидкости.

Так же как и в жидкости несжимаемой, максимальное сжатие будет иметь место в бесконечно удалённой части струи (иначе скорость получила бы максимальное значение где-нибудь внутри струи). Если ширина бесконечно удалённой части струи будет b', то

$$2b'\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2\tau_1(1-\tau_1)^{\frac{1}{\varkappa-1}}}=Q,$$

и мы будем иметь

$$\frac{b'}{b}=\frac{1}{1-\frac{8}{\pi q^2}\sin\frac{\pi}{2}q\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n(\tau_1)\frac{n}{\frac{4n^2}{q^2}-1}}.$$

Нужно помнить, что движения, о которых мы говорили в этом параграфе, совершаются с дозвуковыми скоростями, в частности, в нашей задаче о струе, максимальные скорости не должны превосходить скорость звука, т. е. должно быть

$$v_1<a_*,$$

что эквивалентно условию

$$\frac{p_1}{p_0}<\frac{p_*}{p_0}=\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}};$$

в одном из следующих параграфов мы рассмотрим обратный случай:

$$1>\frac{p_1}{p_0}>\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}.$$

§ 17. Дозвуковые скорости. Метод Христиановича. В настоящее время существует значительное число работ, посвящённых приближённому решению задачи о движении газа с дозвуковыми скоростями. Работы эти можно разбить на две группы: в первой группе работ решение даётся последовательными приближениями, во второй авторы ограничиваются той или иной линеаризацией задачи.

Мы изложим основные идеи метода последовательных приближений, предложенные Христиановичем, отсылая за деталями непосредственно к его статье [1]).

По-прежнему считаем движение безвихревым и скорости всюду дозвуковыми. Введём прежде всего безразмерную скорость $\bar{v}=v/a_*$

[1]) Христианович С. А., Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях, Труды ЦАГИ, вып. 481, 1940.

и новую искомую функцию $S(\bar{v})$, определяемую из равенства

$$dS = \sqrt{\frac{1-\bar{v}^2}{1-\frac{\bar{v}^2}{h^2}}}\,\frac{d\bar{v}}{\bar{v}}, \tag{17.1}$$

где

$$h^2 = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}.$$

Уравнения (16.12) примут теперь, после простых преобразований, вид

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\beta} = \sqrt{K}\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial S}; \quad \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial S} = -\sqrt{K}\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\beta}, \tag{17.2}$$

где

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{a_*}; \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{a_*}; \quad \sqrt{K} = \sqrt{\frac{1-\bar{v}^2}{\left(1-\frac{\bar{v}^2}{h^2}\right)^{h^2}}}. \tag{17.3}$$

Введём в рассмотрение комплексную величину $S - i\beta$ и обозначим через $\mu + i\nu$ некую совершенно произвольную аналитическую функцию от этого аргумента

$$\mu + i\nu = f(S - i\beta). \tag{17.4}$$

Связь между S, β, μ, ν определится с помощью условий Коши—Римана; в частности, будет:

$$\frac{\partial S}{\partial\mu} = -\frac{\partial\beta}{\partial\nu}; \quad \frac{\partial S}{\partial\nu} = \frac{\partial\beta}{\partial\mu}. \tag{17.5}$$

Так как

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\mu} = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\mu} + \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial\mu},$$

то по (17.5) и (17.2) будет

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\mu} = \sqrt{K}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial\nu} + \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\nu}\right) = \sqrt{K}\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\nu} \quad \text{и т. п.}$$

Таким образом, если перейти в уравнениях (17.2) от S и β к μ и ν, то получим:

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\mu} = \sqrt{K}\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\nu}, \quad \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\nu} = -\sqrt{K}\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\mu}. \tag{17.6}$$

Наконец, x и y можно связать с μ и ν следующим образом. Согласно формулам (16.6) предыдущего параграфа, можем написать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial\bar{\varphi}} &= \frac{\cos\beta}{\bar{v}}; \quad \frac{\partial x}{\partial\bar{\psi}} = -\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\sin\beta}{\bar{v}}, \\ \frac{\partial y}{\partial\bar{\varphi}} &= \frac{\sin\beta}{\bar{v}}; \quad \frac{\partial y}{\partial\bar{\psi}} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\cos\beta}{\bar{v}}. \end{aligned}\right\} \tag{17.7}$$

Зная S (а значит, и $\bar{v}$), β, $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ в функциях от μ и ν, мы сможем, таким образом, найти x и y по формулам (17.7).

Обратим теперь внимание на то замечательное обстоятельство, что если $\bar{v} \approx 0$, то $dS \approx d\bar{v}/\bar{v}$, так что $S \approx \ln \bar{v} + \text{const.}$, а $\sqrt{K} \approx 1$. Но тогда при малых $\bar{v}$ уравнения (17.5) и (17.6) будут в точности совпадать с уравнениями, описывающими в плоскости (μ, ν) движение жидкости, имеющей комплексную скорость $e^{S}e^{-i\beta}$ и комплексный потенциал $\bar{\varphi} + i\bar{\psi}$. При этом, как нетрудно убедиться, будет $x \approx \mu$, $y \approx \nu$.

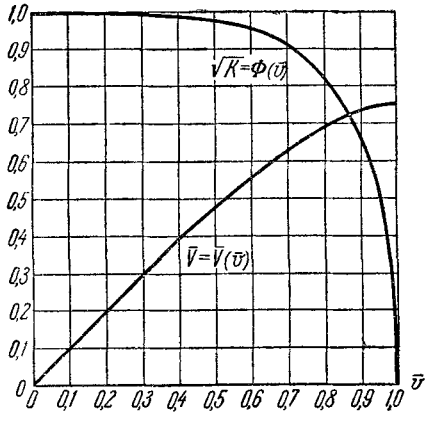

Рис. 43.

Обозначим вообще

$$S = \ln \bar{V}.$$

Квадратурами можно найти из (17.1) выражение для $\bar{V}$ в функциях от $\bar{v}$. Именно, производя подстановку

$$\frac{1-\bar{v}^2}{1-\frac{\bar{v}^2}{h^2}} = u^2, \qquad (17.8)$$

получим

$$\bar{V} = c\sqrt{\frac{(h+u)^h}{(h-u)^h}\,\frac{1-u}{1+u}}, \qquad (17.9)$$

где c — произвольная постоянная. Эту последнюю выберем так, чтобы $\lim\limits_{v\to 0} \bar{V}/\bar{v} = 1$. Так как вследствие (17.8) мы имеем

$$\lim_{v\to 0}\frac{\bar{V}}{\bar{v}} = \lim_{u\to 1}\frac{c}{h}\sqrt{\frac{(h+u)^{h+1}}{(h-u)^{h-1}(1+u)^2}} = \frac{c}{2h}\sqrt{\frac{(h+1)^{h+1}}{(h-1)^{h-1}}},$$

то получим

$$c = 2h\sqrt{\frac{(h-1)^{h-1}}{(h+1)^{h+1}}} \approx 0{,}7579. \qquad (17.10)$$

На рис. 43 изображены значения $\bar{V}$ и $\sqrt{K}$ в функциях от $\bar{v}$. Эти же величины даны в таблице II [1]). Мы видим, что расхождение между $\bar{V}$ и $\bar{v}$ становится заметным лишь в промежутке $0{,}6 \leqslant \bar{v} \leqslant 1$, а $\sqrt{K}$ близко к единице в интервале $0 \leqslant \bar{v} \leqslant 0{,}5$. Отметив это, пойдём дальше.

До сих пор функция f в (17.4), связывающая $S - i\beta$ с $\mu + i\nu$, была произвольной аналитической функцией. Попробуем теперь,

[1]) Рисунок и таблица заимствованы из статьи С. А. Христиановича.

Таблица II

$\bar{v}$	$\bar{V}$	$\bar{V}/\bar{v}$	$\sqrt{\bar{K}}$	$\bar{v}$	$\bar{V}$	$\bar{V}/\bar{v}$	$\sqrt{\bar{K}}$
0	0	1	1	0,675	0,6080	0,9007	0,9350
0,05	0,0500	0,9995	1	0,700	0,6251	0,8930	0,9221
0,10	0,0998	0,9980	1	0,725	0,6413	0,8845	0,9068
0,15	0,1493	0,9954	0,9999	0,750	0,6568	0,8758	0,8925
0,20	0,1983	0,9917	0,9996	0,775	0,6717	0,8667	0,8672
0,25	0,2467	0,9870	0,9991	0,800	0,6857	0,8571	0,8416
0,30	0,2943	0,9811	0,9982	0,825	0,6988	0,8471	0,8156
0,35	0,3410	0,9742	0,9965	0,850	0,7110	0,8365	0,7740
0,40	0,3862	0,9655	0,9940	0,875	0,7223	0,8255	0,7271
0,45	0,4307	0,9571	0,9899	0,900	0,7324	0,8138	0,6788
0,50	0,4734	0,9467	0,9840	0,925	0,7413	0,8015	0,6015
0,55	0,5144	0,9353	0,9754	0,950	0,7483	0,7882	0,5092
0,60	0,5535	0,9224	0,9632	0,975	0,7546	0,7739	0,3728
0,625	0,5722	0,9156	0,9553	1	0,7577	0,7577	0
0,650	0,5904	0,9083	0,9461				

ориентируясь на указанное сходство с уравнениями обтекания в несжимаемой жидкости, поставить краевые условия для дифференциальных уравнений (17.5) и (17.6) следующим образом. Рассмотрим в плоскости (μ, ν) некий замкнутый контур C (например, профиль крыла с задней кромкой — остриём — в точке A) и поставим следующие условия:

1) на контуре C β совпадает с углом наклона касательной к оси μ:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{d\nu}{d\mu} \text{ на } C;$$

2) на бесконечности $\bar{V}_\infty = e^{S_\infty}$ — заданная величина и $\beta_\infty = 0$;

3) если C имеет острую кромку A, то в A $\bar{V}$ имеет конечное значение. Если тело острой кромки не имеет, то дано значение циркуляции $\bar{\Gamma}$ вектора $\bar{V}e^{-i\beta}$ вдоль замкнутого контура, охватывающего C в плоскости (μ, ν).

Эта группа условий позволит полностью найти из (17.5) функции $S(\mu, \nu)$ и $\beta(\mu, \nu)$. Следующие условия позволят определить $\bar{\varphi}(\mu, \nu)$ и $\bar{\psi}(\mu, \nu)$:

4) на C $\bar{\psi} = 0$;

5) на бесконечности

$$\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\mu}\right)_\infty = \sqrt{\bar{K}}_\infty \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\nu}\right)_\infty = \bar{V}_\infty; \quad \left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\nu}\right)_\infty = -\sqrt{\bar{K}}_\infty \left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\mu}\right)_\infty = 0;$$

6) наконец, потребуем, чтобы $x = x(\mu, \nu)$ $y = y(\mu, \nu)$, получаемые при посредстве уравнений (17.5), (17.6), (17.7), давали взаимно однозначные отображения в соответствующих областях (μ, ν) и (x, y).

Прежде чем начать интегрировать систему (17.5), (17.6), (17.7) при краевых условиях 1) — 6), выясним, отвечает ли это какой-либо гидродинамической задаче вообще и если да, то какой.

Вследствие условия 6), контур C будет в плоскости (x, y) переходить также в замкнутый контур c (так как уравнения (17.7) определяют x и y с точностью до произвольных постоянных, то можно добиться того, что точке A будет отвечать какая-то заранее выбранная точка a контура c). Вследствие 4) на c будет $\bar{\psi} = 0$; отсюда на c будет

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \bar{\varphi}}\, d\bar{\varphi}, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \bar{\varphi}}\, d\bar{\varphi}$$

и по (17.7) вдоль контура имеем

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \beta.$$

Далее, бесконечно удалённая точка плоскости (μ,ν) отвечает бесконечно удалённой точке плоскости (x,y); при этом в плоскости (x, y) на ∞ будет вследствие 2):

$$\beta = 0, \quad \bar{v} = \bar{v}_\infty,$$

где $\bar{v}_\infty$ — то значение $\bar{v}$, которому по формуле (17.9) отвечает $\bar{V} = \bar{V}_\infty$. Наконец, используя (17.7), получим без труда вследствие 5) на ∞ в плоскости (x, y):

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \frac{\rho_0}{\rho_\infty} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = \bar{v}_\infty; \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = -\frac{\rho_0}{\rho_\infty} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = 0.$$

Если, например, мы сопоставим эти, полученные для плоскости (x, y), условия с уравнениями (16.1) — (16.3), то придём к важному следствию. Всякий раз, когда мы решаем в плоскости (μ, ν) систему (17.5) — (17.7) при условиях 1) — 6), мы тем самым решаем в плоскости (x, y) задачу обтекания некоторого контура сжимаемой жидкостью, имеющей определённую скорость на ∞. Система (17.5)—(17.7) может быть, однако, исследована гораздо проще, чем система уравнений для сжимаемой жидкости. Более того, для (17.5)—(17.7) могут быть легко получены приближённые решения.

Именно — задача интегрирования (17.5) при краевых условиях 1), 2), 3) [1]) замечательным образом совпадает с задачей определения логарифма и угла наклона скорости в несжимаемой жидкости, обтекающей контур C при циркуляции $\bar{\Gamma}$ и имеющей на бесконечности скорость $\bar{V}_\infty$. Христианович называет это движение фиктивным пото-

[1]) Конечно, должно быть $\bar{V}_\infty < 0{,}7579$, чтобы было $\bar{v}_\infty < 1$; см. уравнения (17.8) — (17.10).

ком. Таким образом, как только мы сможем найти обтекание нашего контура C несжимаемой жидкостью — сразу же мы найдём $\bar{V}$ (а значит, по (17.9) и $\bar{v}$) и β в функциях от μ и ν. Если мы теперь сумеем установить, какая точка плоскости (μ, ν) отвечает той или иной точке плоскости (x, y), то мы узнаем распределение скоростей $(\bar{v}, \beta)$ в точках (x, y), а затем по уравнению Бернулли давление, и тем будет решена задача обтекания с некоторой скоростью на ∞ какого-то контура плоскости (x, y).

Соответствие между точками (μ, ν) и (x, y) устанавливается с помощью уравнений (17.6), (17.7) и условий 4), 5), 6). Именно, будет:

$$\left.\begin{aligned} x &= \int_{M_A}^{M} \left(\frac{\cos\beta}{\bar{v}}\, d\bar{\varphi} - \frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{\sin\beta}{\bar{v}}\, d\bar{\psi}\right) + x_A; \\ y &= \int_{M_A}^{M} \left(\frac{\sin\beta}{\bar{v}}\, d\bar{\varphi} + \frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{\cos\beta}{\bar{v}}\, d\bar{\psi}\right) + y_A \end{aligned}\right\} \qquad (17.11)$$

(x_A, y_A — координаты той точки плоскости (x, y), в которую мы переводим точку A плоскости (μ, ν)).

В частности, вдоль контура c будет ($\bar{\psi} = 0$):

$$x = \int_0^{\bar{\varphi}} \frac{\cos\beta}{\bar{v}}\, d\bar{\varphi} + x_A; \quad y = \int_0^{\bar{\varphi}} \frac{\sin\beta}{\bar{v}}\, d\bar{\varphi} + y_A. \qquad (17.12)$$

Чтобы нагляднее представить степень отличия контуров C и c, построим функцию тока $\bar{\Phi}$ и потенциал скоростей $\bar{\Psi}$ для введённого выше фиктивного потока несжимаемой жидкости, обтекающей контур C в плоскости (μ, ν) с циркуляцией $\bar{\Gamma}$ и со скоростью $\bar{V}_\infty$ на бесконечности. В частности, будет

$$\frac{\partial\mu}{\partial\bar{\Phi}} = \frac{\cos\beta}{\bar{V}}; \quad \frac{\partial\nu}{\partial\bar{\Phi}} = \frac{\sin\beta}{\bar{V}};$$

так что ($\bar{\Psi} = 0$) по (17.12)

$$x = \int_{\mu_A}^{\mu} \frac{\bar{V}}{\bar{v}}\,\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{\Phi}}\, d\mu + x_A; \quad y = \int_{\nu_A}^{\nu} \frac{\bar{V}}{\bar{v}}\,\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{\Phi}}\, d\nu + y_A. \qquad (17.13)$$

Отсюда видим, что для малых скоростей, когда $\bar{V}/\bar{v}$ близко к единице (и $\bar{\varphi}$ близко к $\bar{\Phi}$), контур C будет близок к контуру c. Так как $\bar{V}/\bar{v} < 1$, то контур c будет искажён по сравнению с C.

Для точного определения величин x и y по формулам (17.11) или (17.13) надо выразить $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ через μ и ν из уравнений (17.6) при условиях 4), 5), 6). Чтобы это сделать, Христианович разбивает каждое из $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ на два слагаемых:

$$\bar{\varphi}=\varphi_0+\varphi^*;\quad \bar{\psi}=\psi_0+\psi^*;$$

φ_0 и ψ_0 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\mu}=\sqrt{K_\infty}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu};\quad \frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu}=-\sqrt{K_\infty}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial\mu}, \tag{17.14}$$

где $K_\infty=K(\bar{v}_\infty)$, и краевым условиям:

$$\left.\begin{aligned}&\psi_0=0 \text{ на } C;\quad \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\mu}\right)_\infty=\sqrt{K_\infty}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu}\right)_\infty=\bar{V}_\infty;\\ &\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu}\right)_\infty=-\sqrt{K_\infty}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\mu}\right)_\infty=0.\end{aligned}\right\} \tag{17.15}$$

При этом φ^* и ψ^* должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial\mu}=\sqrt{K}\,\frac{\partial\psi^*}{\partial\nu}+(\sqrt{K}-\sqrt{K_\infty})\,\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu};$$

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial\nu}=-\sqrt{K}\,\frac{\partial\psi^*}{\partial\mu}-(\sqrt{K}-\sqrt{K_\infty})\,\frac{\partial\psi_0}{\partial\mu}$$

при условиях

$$\psi^*=0 \text{ на } C \text{ и } \varphi^* \text{ и } \psi^* \text{ ограничены на } \infty.$$

Интеграция (17.14) при условиях (17.15) совершается элементарно. Так как $\sqrt{K_\infty}$ — постоянная величина, уравнение (17.14) означает, что $\varphi_0+i\sqrt{K_\infty}\psi_0$ есть аналитическая функция от $\mu+i\nu$, и краевые условия (17.15) позволяют эту функцию определить. φ_0 и $\sqrt{K_\infty}\psi_0$ совпадают с потенциалом скоростей и функцией тока в соответствующей задаче для несжимаемой жидкости. Однако при нахождении φ_0 и $\sqrt{K_\infty}\psi_0$ не следует торопиться с определением «циркуляции» из условия регулярности в остриё A контура C (как это надлежало бы сделать в задаче обтекания). Не надо забывать, что гидромеханический смысл имеют не φ_0 и ψ_0, а суммы $\varphi_0+\varphi^*$ и $\psi_0+\psi^*$, поэтому надлежит оставить циркуляцию, входящую при определении φ_0 и ψ_0, назовём её Γ^*, неопределённой с тем, чтобы после нахождения φ^* и ψ^* найти Γ^* из условия 6) для $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ (т. е. требуя, чтобы обратились в нуль интегралы типа (17.11) по замкнутому контуру, обходящему вокруг C).

Для определения φ^* и ψ^* Христианович пишет

$$\varphi^*=\varphi_1+\varphi_2+\Phi,\quad \psi^*=\psi_1+\psi_2+\Psi, \tag{17.16}$$

где φ_n ($n = 1, 2$) удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mu} &= \sqrt{K_\infty}\,\frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} + (\sqrt{K} - \sqrt{K_\infty})\,\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial \nu}, \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} &= -\sqrt{K_\infty}\,\frac{\partial \psi_n}{\partial \mu} - (\sqrt{K} - \sqrt{K_\infty})\,\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial \mu}, \end{aligned}\right\} \tag{17.17}$$

а Φ и Ψ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} &= \sqrt{K}\,\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + (\sqrt{K} - \sqrt{K_\infty})\,\frac{\partial \psi_2}{\partial \nu}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} &= -\sqrt{K}\,\frac{\partial \Psi}{\partial \mu} - (\sqrt{K} - \sqrt{K_\infty})\,\frac{\partial \psi_2}{\partial \mu}, \end{aligned}\right\} \tag{17.18}$$

причём $\psi_1 = \psi_2 = \Psi = 0$ на C и все шесть функций ограничены на бесконечности.

Уравнения (17.17) сводятся к уравнениям Пуассона. Путём остроумного и тщательного анализа, на котором мы здесь не останавливаемся, Христианович не только даёт в эксплицитном виде (квадратуры) решения системы (17.17), но и находит точные выражения главных членов функций φ_n и ψ_n ($n = 0, 1, 2$) на бесконечности. Затем он показывает, что Φ и Ψ на бесконечности регулярны. Но тогда известны главные члены функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$, и мы можем подобрать Γ^* так, чтобы выполнилось для $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ условие 6).

Далее Христианович получает:

$$\Gamma = \frac{\bar{\Gamma}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}},$$

где

$$M_\infty^2 = \left(\frac{v}{a}\right)_\infty^2 = \frac{2}{\varkappa + 1}\,\frac{\frac{\bar{v}_\infty^2}{h^2}}{1 - \frac{\bar{v}_\infty^2}{h^2}},$$

а Γ — полное значение «циркуляции» в задаче о движении сжимаемой жидкости.

Мы уже упомянули о том, что при малых скоростях искажение c по сравнению с C незначительно. При малых скоростях для определения контура c можно ограничиться «первым приближением», полагая $\bar{\varphi} \approx \varphi_0$, $\bar{\psi} \approx \psi_0$. Остановимся на первом приближении подробнее.

Обозначим

$$\varphi_0 + i\sqrt{K_\infty}\,\psi_0 = \Phi^* + i\Psi^*\ ^{1}). \tag{17.19}$$

---

[1]) Разница по сравнению с $\bar{\Phi} + i\bar{\Psi}$ та, что здесь циркуляция будет Γ, а не $\bar{\Gamma}$. В случае отсутствия циркуляции $\Phi^* + i\Psi^* \equiv \bar{\Phi} + \bar{\Psi} i$.

В работе Христиановича и Юрьева [1]) дан анализ первого приближения как для циркуляционного, так и для бесциркуляционного обтекания. В первом приближении есть возможность выполнить квадратуры типа (17.13) в общем виде и оценить сразу же то искажение контура, которое мы получаем в методе Христиановича.

Чтобы сделать это, заметим, что если мы ограничиваемся первым приближением, т. е. принимаем

$$\bar{\varphi} \approx \varphi_0 = \Phi^*, \quad \bar{\psi} \approx \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{K_\infty}} \Psi^*,$$

то пользоваться точными формулами (17.11) и (17.12), дающими x и y через μ и ν, — нет смысла. Более того, если мы в этих точных формулах используем наши приближённые решения, то выражения

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\cos\beta}{\bar{v}}\, d\bar{\varphi} - \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\sin\beta}{\bar{v}}\, d\bar{\psi}, \\ dy &= \frac{\sin\beta}{\bar{v}}\, d\bar{\varphi} + \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\cos\beta}{\bar{v}}\, d\bar{\psi} \end{aligned}\right\} \tag{17.20}$$

не будут полными дифференциалами. Чтобы сохранить в правых частях полные дифференциалы, мы должны дать новые, уже приближённые, представления величин $1/\bar{v}$ и $\rho_0/\rho\bar{v}$ как функций от S. Обозначим

$$\frac{1}{\bar{v}} = P(S), \quad \frac{\rho_0}{\rho\bar{v}} = Q(S) \tag{17.21}$$

и исключим $\bar{\varphi}$ при помощи (17.2). Мы получим

$$dx = \left[P\cos\beta\sqrt{K}\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial S} - Q\sin\beta\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\beta}\right]d\beta - \left[\sqrt{K}\cos\beta P\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\beta} + Q\sin\beta\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial S}\right]dS,$$

$$dy = \left[P\sin\beta\sqrt{K}\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial S} - Q\cos\beta\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\beta}\right]d\beta - \left[\sqrt{K}\sin\beta P\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\beta} + Q\cos\beta\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial S}\right]dS.$$

Напишем условие того, что dx есть полный дифференциал. Это будет:

$$\frac{\partial}{\partial S}\left[P\cos\beta\sqrt{K}\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial S} - Q\sin\beta\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\beta}\right] = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\sqrt{K}\cos\beta P\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\beta} + Q\sin\beta\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial S}\right].$$

[1]) Христианович С. А. и Юрьев И. М., Обтекание профиля при докритической скорости потока, ПММ, т. XI, вып. 1, 1947.

Выполняя дифференцирование и исключая старшие производные от $\bar{\psi}$ при помощи (17.2), мы получим следующие два равенства:

$$\frac{d}{dS}(P\sqrt{K})+Q=0;\quad \frac{dQ}{dS}+\sqrt{K}P=0. \tag{17.22}$$

Эти равенства выполняются совершенно точно, если $P=1/\bar{v}$, $Q=\rho_0/\rho\bar{v}$, а $\sqrt{K}$ имеет точное значение (17.3). Посмотрим теперь, чем нам надо заменить P и Q, если $\sqrt{K}$ мы заменим на $\sqrt{K_\infty}$ (в этом заключается первое приближение). Наши уравнения нам дадут сразу:

$$P=c_1e^{-S}+c_2e^{+S};\quad Q=\sqrt{K_\infty}(c_1e^{-S}-c_2e^{+S}), \tag{17.23}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные интегрирования. Эти постоянные мы подберём так, чтобы P и Q равнялись их точным значениям при $v=\bar{v}_\infty$. Так как $S=\ln\bar{V}$ и так как по (17.3) и (8.9)

$$\sqrt{K}=\frac{\rho_0}{\rho}\sqrt{1-\mathsf{M}^2},\quad \text{где}\quad \mathsf{M}=\frac{v}{a},$$

мы можем написать

$$\frac{1}{\bar{v}_\infty}=\frac{c_1}{\bar{V}_\infty}+c_2\bar{V}_\infty;\quad \frac{1}{\bar{v}_\infty\sqrt{1-\mathsf{M}_\infty^2}}=\frac{c_1}{\bar{V}_\infty}-c_2\bar{V}_\infty,$$

откуда получаем

$$c_1=\frac{\bar{V}_\infty}{2\bar{v}_\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-\mathsf{M}_\infty^2}}\right);\quad c_2=\frac{1}{2\bar{v}_\infty\bar{V}_\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-\mathsf{M}_\infty^2}}\right). \tag{17.24}$$

Итак, в первом приближении мы должны заменить (17.11) на

$$\left.\begin{aligned} x&=\int_{M_A}^{M_B}\left\{\left(\frac{c_1}{\bar{V}}+c_2\bar{V}\right)\cos\beta\,d\Phi^*-\left(\frac{c_1}{\bar{V}}-c_2\bar{V}\right)\sin\beta\,d\Psi^*\right\}+x_A,\\ y&=\int_{M_A}^{M_B}\left\{\left(\frac{c_1}{\bar{V}}+c_2\bar{V}\right)\sin\beta\,d\Phi^*+\left(\frac{c_1}{\bar{V}}-c_2\bar{V}\right)\cos\beta\,d\Psi^*\right\}+y_A, \end{aligned}\right\} \tag{17.25}$$

где c_1 и c_2 определяются по (17.24), а функции Φ^* и Ψ^* как функции от μ и ν находятся из задачи обтекания в несжимаемой жидкости.

Нужно отчётливо помнить, что в то время, как $\bar{V}$ и β суть скорость и угол соответственно в потоке несжимаемой жидкости, обтекающей данный контур со скоростью на бесконечности $\bar{V}_\infty$ и с циркуляцией Γ, функции Φ^* и Ψ^* представляют обтекание того же контура и с той же скоростью на бесконечности, но с другой циркуляцией — Γ^*. Как найти эту циркуляцию? Она получается, как

и для точного решения, из условий однолистности плоскости (x, y), отвечающей нашему решению. Подробный и простой вывод имеется в упомянутой статье Христиановича и Юрьева. Оказывается, что надо взять, как и в точном решении

$$= \Gamma^* \frac{\bar{\Gamma}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \tag{17.26}$$

Если обозначить комплексный потенциал нашего потока с циркуляцией Γ^* через F^*, комплексный потенциал $\bar{\Phi} + i\bar{\Psi}$ через $\tilde{F}$, наконец, $\mu + i\nu = z$, то мы сможем написать, в частности:

$$\bar{V} e^{-i\beta} = \frac{d\tilde{F}}{dz} \tag{17.27}$$

и привести подынтегральное выражение (17.25) к более компактному виду:

$$d(x + iy) = c_1 \frac{1}{\overline{\frac{d\tilde{F}}{dz}}} dF^* + c_2 \overline{\frac{d\tilde{F}}{dz}}\, \overline{dF^*}, \tag{17.28}$$

где $\overline{dF^*}$ — комплексная сопряжённая с dF^* : $\overline{dF^*} = d\Phi^* - i\, d\Psi^*$. Приведём пример. Пусть в несжимаемой жидкости в плоскости (μ, ν) имеет место бесциркуляционное обтекание круга радиуса 1 со скоростью $\bar{V}_\infty$ на ∞. Тогда

$$F^* = \tilde{F} = \bar{V}_\infty \left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{17.29}$$

и (17.28) примет вид:

$$d(x + iy) = c_1\, dz + c_2 \bar{V}_\infty^2 \left(1 - \frac{1}{\bar{z}^2}\right)^2 d\bar{z},$$

так что

$$x + iy = c_1 z + c_2 \bar{V}_\infty^2 \left(\bar{z} + \frac{2}{\bar{z}} - \frac{1}{3\bar{z}^3}\right).$$

Искажение может быть теперь легко подсчитано.

В случае обтекания эллипса, уравнение которого имеет вид

$$\frac{\mu^2}{(1 + r^2)^2} + \frac{\nu^2}{(1 - r^2)^2} = 1, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1,$$

достаточно перейти от плоскости z $(= \mu + i\nu)$ к плоскости ζ по формуле

$$z = \zeta + \frac{r^2}{\zeta}.$$

Область $|\zeta| > 1$ отображается в плоскости (z) на область, внешнюю

по отношению к нашему эллипсу. Равенство (17.28) мы запишем теперь в виде:

$$d(x+iy)=c_1\frac{1}{\overline{\frac{d\widetilde{F}}{d\zeta}}}\frac{dF^*}{d\zeta}dz+c_2\frac{\overline{d\widetilde{F}}}{d\zeta}\frac{\overline{dF^*}}{d\zeta}\left(\frac{\overline{d\zeta}}{dz}\right)^2 d\bar{z}. \qquad (17.30)$$

При отсутствии циркуляции $F^*=\widetilde{F}$. Тогда, производя несложные выкладки, получим:

$$x+iy=c_1\left(\zeta+\frac{r^2}{\zeta}\right)+c_2\overline{V}_\infty^2\left[\frac{1+r^2(r^2-2)}{2r^3}\ln\frac{\overline{\zeta}-r}{\overline{\zeta}+r}+\overline{\zeta}+\frac{1}{r^2\overline{\zeta}}\right].$$

Если эллипс сильно вытянут так, что $r\approx 1$ и $1-r=\varepsilon$, где ε — малая величина, то можно приближённо написать

$$x+iy=c_1\left(\zeta+\frac{1-2\varepsilon}{\zeta}\right)+c_2\overline{V}_\infty^2\left(\overline{\zeta}+\frac{1+2\varepsilon}{\overline{\zeta}}\right).$$

Этот последний профиль будет весьма близок к нашему эллипсу.

В общем случае циркуляционного потока уравнение (17.28) или (17.30) позволит сразу выяснить особенности, которые возникают из-за обращения в нуль функций $dF^*/d\zeta$ и $d\widetilde{F}/d\zeta$. За подробностями мы отсылаем к цитированной работе Христиановича и Юрьева, в которой показано, что если контур в плоскости (μ, ν) гладкий, то на контуре в плоскости (x, y) возникнут в местах, отвечающих упомянутым особенностям, угловые точки. Христианович и Юрьев показывают, как можно избежать появления этих угловых точек в плоскости (x, y) подбором специального профиля в плоскости (μ, ν). На рис. 44 дан пример появления особенностей в контуре на плоскости (x, y); здесь $M_\infty=0{,}333$ и $\Gamma^*/\overline{V}_\infty=1$, причём обтекается в плоскости (μ, ν) круг радиуса 1.

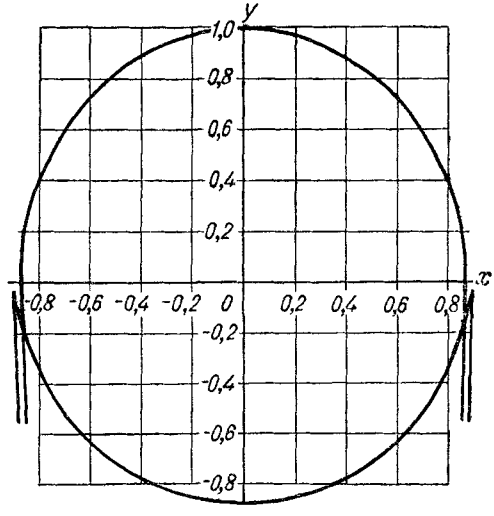

Рис. 44.

На рис. 45 дан в плоскости (x, y) гладкий контур, обтеканию которого отвечает в несжимаемой жидкости (в плоскости (μ, ν))

движение вокруг контура, изображённого на рис. 46. Этот последний контур есть круг радиуса 1, к которому присоединён отрезок дуги круга бо́льшего радиуса (как и в предыдущем примере $M_\infty = 0{,}333$, $\Gamma^*/V_\infty = 1$).

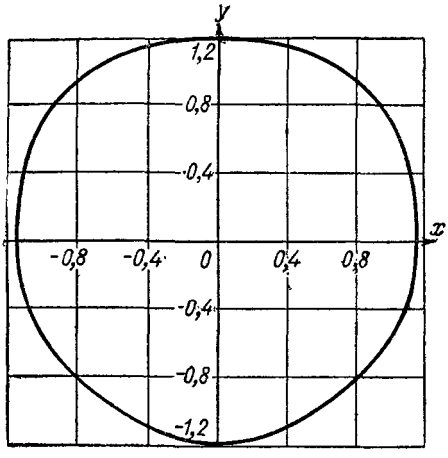

Рис. 45.

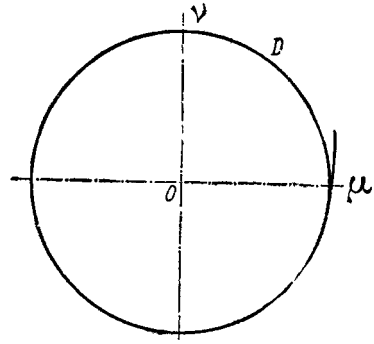

Рис. 46.

При больших скоростях нельзя ограничиваться первым приближением. Вычисление функций φ_1, ψ_1 бывает громоздко, но можно воспользоваться следующим рассуждением. Для $d\bar{\varphi}$ вдоль контура C имеем:

$$d\bar{\varphi} = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\mu}\,d\mu + \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\nu}\,d\nu, \tag{17.31}$$

причём $d\nu$, например, можно найти через $d\mu$ при помощи формулы

$$d\Psi^* = 0 = \frac{\partial\Psi^*}{\partial\mu}\,d\mu + \frac{\partial\Psi^*}{\partial\nu}\,d\nu = \sqrt{K_\infty}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial\mu}\,d\mu + \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu}\,d\nu\right).$$

Таким образом, вдоль C

$$d\bar{\varphi} = \frac{1}{\dfrac{\partial\psi_0}{\partial\nu}}\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\mu}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} - \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\nu}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial\mu}\right)d\mu. \tag{17.32}$$

С другой стороны, мы можем написать приближённо:

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\mu} \approx \frac{\partial\varphi_0}{\partial\mu} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\mu} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\mu},$$

пренебрегая членом $\partial\Phi/\partial\mu$. Пренебрежение функцией Φ (или Ψ) означает, вследствие (17.18), что мы можем пренебречь в формулах (17.17) (для $n = 2$) членами $\partial\psi_2/\partial\nu$ и $\partial\psi_2/\partial\mu$, но тогда

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mu} \approx (\sqrt{K} - \sqrt{K_\infty})\,\frac{\partial\psi_1}{\partial\nu},$$

а если вставить $\partial\psi_1/\partial\nu$ из первого из (17.17) для $n=1$, получим:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\mu}\approx\left(\sqrt{\frac{K}{K_\infty}}-1\right)\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mu}-(\sqrt{K}-\sqrt{K_\infty})\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu}\right].$$

Вспомним ещё, что $\sqrt{K_\infty}\,\partial\psi_0/\partial\nu=\partial\varphi_0/\partial\mu$, мы получим теперь

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\mu}\approx\left[1-\left(\sqrt{\frac{K}{K_\infty}}-1\right)^2\right]\frac{\partial\varphi_0}{\partial\mu}+\sqrt{\frac{K}{K_\infty}}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mu}.$$

Аналогичным образом найдём, что

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\nu}=\left[1-\left(\sqrt{\frac{K}{K_\infty}}-1\right)^2\right]\frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu}+\sqrt{\frac{K}{K_\infty}}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu}.$$

Вставляя это выражение в (17.32), используя ещё раз (17.14) и пренебрегая членами, содержащими φ_1, по сравнению с членами, содержащими φ_0, получим окончательно

$$d\bar{\varphi}\approx\frac{\tilde{V}}{\cos\beta}\sqrt{\frac{K}{K_\infty}}\left(2-\sqrt{\frac{K}{K_\infty}}\right)d\mu, \tag{17.33}$$

где $\tilde{V}$ — скорость в несжимаемой жидкости (отличная от $\bar{V}$, ибо за циркуляцию мы берём Γ^*, а не $\bar{\Gamma}$). Таким образом, вдоль контура c будет на основании (17.11):

$$x\approx\int_{\mu_A}^{\mu}\frac{\tilde{V}}{\bar{v}}\sqrt{\frac{K}{K_\infty}}\left(2-\sqrt{\frac{K}{K_\infty}}\right)d\mu+x_A;$$

$$y\approx\int_{\nu_A}^{\nu}\frac{\tilde{V}}{\bar{v}}\sqrt{\frac{K}{K_\infty}}\left(2-\sqrt{\frac{K}{K_\infty}}\right)d\nu+y_A.$$

Остановимся ещё на следующих весьма простых соображениях. Предположим, что мы изучаем в плоскости (μ, ν) обтекание круга (хотя бы бесциркуляционное); в плоскости (x, y) мы имеем сплющенный круг. Пусть скорость фиктивного потока $\bar{V}_\infty=0{,}35$; ей отвечает скорость сжимаемой жидкости $\bar{v}_\infty=0{,}36$ (близкая к $\bar{V}_\infty$). Но максимальная скорость $\bar{v}_{\max}$, получающаяся в сжимаемой жидкости, будет близка к скорости звука. Действительно, $\bar{v}_{\max}$ получится там же, где $\bar{V}$ достигнет максимума. Но $\bar{V}_{\max}=2\bar{V}_\infty=0{,}70$, а этой скорости отвечает по таблице $\bar{v}=0{,}825$. Скорость звука будет достигнута, когда будет $\bar{v}=1$, т. е. при $\bar{V}=0{,}7577$; значит, в нашем примере сплющенного круга при $\bar{V}_\infty=0{,}7577/2=0{,}3789$, т. е. $\bar{v}_\infty\approx0{,}354$, мы обязательно получим звуковые скорости на контуре. Очевидно, что это явление ещё раньше возникнет, если контур c в плоскости (x, y) будет точным кругом. Таким образом, можно с уверенностью сказать, что при $\bar{v}_\infty>0{,}36$ при обтекании круга возникнут сверхзвуковые зоны.

Можно ожидать, что при обтекании вытянутого контура, например профиля Жуковского или профиля крыла современного самолёта, искажение будет получаться гораздо менее значительным, чем в случае круга. Но если грубо считать, что профили c и C тождественны, то метод Христиановича даёт замечательное средство быстро рассчитывать распределение скоростей и давлений вдоль профиля крыла с учётом сжимаемости при любых дозвуковых скоростях, если известно обтекание крыла при малых скоростях. Действительно, пусть мы получили, хотя бы путём продувки крыла в аэродинамической трубе при малых скоростях v_1 на бесконечности, распределение давления вдоль крыла C. Пусть v_1 настолько мало, что эффектом сжимаемости можно пренебречь: критерием этого может служить, например, то, что величина v_1/a_* будет почти совпадать с соответствующей величиной $\overline{V}$ и с таблицей.

По уравнению Бернулли для несжимаемой жидкости

$$1-\left(\frac{V}{v_1}\right)^2=q_{\text{несж}},$$

где

$$q_{\text{несж}}=\frac{p-p_\infty}{\rho\dfrac{v_1^2}{2}}.$$

Мы считаем, что q в каждой точке профиля известно, значит, мы можем найти V/v_1 для каждой точки профиля. Теперь спросим себя, каково будет распределение скоростей и давлений вокруг крыла C, если скорость на бесконечности будет v_2, причём $v_2 \gg v_1$? Рассчитаем сперва $v_2/a_*=\overline{v}_2$; обратимся затем к таблице или к формуле (17.9) и найдём соответствующую скорость фиктивного потока несжимаемой жидкости; пусть это будет V_2; для этого фиктивного потока несжимаемой жидкости конечно снова будет

$$1-\left(\frac{\overline{V}}{\overline{V}_2}\right)^2=q_{\text{несж}},$$

где $q_{\text{несж}}$ принимает прежние значения в соответствующих точках контура. Так как $\overline{V}_2$ известно, эта формула позволит найти $\overline{V}$ для каждой данной точки нашего контура C. Тогда по таблице мы можем найти безразмерную скорость $\overline{v}$ для каждой точки контура c, близкого к C (а грубо говоря, тождественного с C) и обтекаемого со скоростью $\overline{v}_2$ на бесконечности.

Распределение давления найдётся затем по формуле

$$q_{\text{сж}}=\frac{p-p_\infty}{\rho_\infty\dfrac{v_\infty^2}{2}}=\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa\overline{v}_2^2}-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\right)\left[\left(\frac{1-\dfrac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\overline{v}^2}{1-\dfrac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\overline{v}_2^2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}-1\right].$$

В начале этого параграфа мы уже упомянули о том, что сейчас имеется много работ, посвящённых приближённому решению задачи о движении газа с дозвуковыми скоростями. Из этих работ значительное число отправляется от уравнений Чаплыгина. Сам Чаплыгин предлагает перейти от переменных β, τ к переменным β, σ, где

$$\sigma = -\int \frac{1}{2\tau}(1-\tau)^{\frac{1}{\varkappa-1}}\,d\tau + \text{const.} = -\int \frac{\rho}{\rho_0}\frac{dv}{v} + \text{const.} \quad (17.34)$$

Уравнения (16.12) примут тогда вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = -\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = K\frac{\partial\psi}{\partial\beta}, \quad (17.35)$$

где

$$K = \frac{1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau}{(1-\tau)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}} = \frac{1-\bar{v}^2}{\left(1-\frac{\bar{v}^2}{h^2}\right)^{h^2}} \quad (17.36)$$

— ранее упомянутая функция, использованная Христиановичем. Если положить теперь приближённо

$$K \approx 1,$$

мы получим для φ и ψ в переменных β и σ уравнение Лапласа. Чаплыгин произвёл это построение для приближённого решения задачи о струях в сжимаемой жидкости. Слёзкин [1]) первый указал на возможность применения этих уравнений к решению задач о бесциркуляционном обтекании криволинейных профилей. Карман [2]) и Сюэ-сэнь цянь [3]) исследовали также бесциркуляционную задачу при помощи (17.35) и приняли K постоянным, но равным K_∞ [4]).

Преимущество метода Христиановича заключается в том, что Христианович, не ограничиваясь первым приближением, рассмотрел

---

[1]) Слёзкин Н. А., К вопросу о плоском движении газа, Труды МГУ, 1935.

[2]) Kármán Th., Compressibility Effects in Aerodynamics., Journ. Aer., Sci. 8, 1941.

[3]) Tsien H. S., Two-dimensional Subsonic Flow of Compressible Fluids., Journ. Aer. Sci. 6, 1939.

[4]) Равенство $K = K_\infty$ выполнялось бы точно, если бы мы приняли вместо формулы

$$p = \vartheta^\varkappa \cdot (1/\rho)^{-\varkappa}$$

($\vartheta = \text{const.}$, так как движение безвихревое) линейный закон

$$p = A - B\,1/\rho,$$

связывающий давление и удельный объём, причём A и B подобрали бы так, чтобы наша прямая в плоскости $(p, 1/\rho)$ была бы касательной к кривой

$$p = \vartheta^\varkappa (1/\rho)^{-\varkappa}$$

в точке p_∞, $(1/\rho)_\infty$. В самом деле, при нашем линейном законе Пуассона

общий случай обтекания при наличии циркуляции и что уже в первом приближении он получил бóльшую точность ценой введения, вместо σ, величины S.

§ 18. Приближённый метод Христиановича для решения плоских безвихревых задач. Сверхзвуковые скорости. В предыдущем параграфе мы рассказали о приближённых методах решения дозвуковых задач. Эти методы опирались на использование φ и ψ в качестве искомых функций, а плоскости скоростей — в качестве плоскости независимого переменного. В сверхзвуковом случае такого рода искомые функции и независимые переменные также могут помочь решению многих задач.

Христиановичу [1]) удалось, используя φ и ψ в качестве искомых функций от β и v, дать новый приближённый способ решения всех основных плоских безвихревых задач в сверхзвуковом случае.

Идея решения заключается в следующем.

До сих пор, рассматривая движения со сверхзвуковой скоростью, мы строили характеристики в плоскости (x, y) или в плоскости (v_x, v_y). Вместе с Христиановичем будем теперь строить характе-

---

уравнение Бернулли запишется в виде

$$\frac{v^2}{2}-\frac{B}{2}\left(\frac{1}{\rho}\right)^2=\text{const.}=\frac{v_\infty^2}{2}-\frac{B}{2}\left(\frac{1}{\rho_\infty}\right)^2.$$

Но тогда в уравнении (16.8) мы будем иметь:

$$\frac{d}{dv}\frac{\rho_0}{\rho v}=-\frac{\rho\rho_0 v}{2}\frac{d}{dv}\frac{v_\infty^2-B\frac{1}{\rho_\infty^2}}{Bv^2}=\frac{\rho\rho_0}{v^2}\frac{v_\infty^2-B\frac{1}{\rho_\infty^2}}{B},$$

так что на месте K будет стоять постоянная величина

$$-\left(\frac{v_\infty^2\rho_\infty^2}{B}-1\right)\frac{\rho_0^2}{\rho_\infty^2}.$$

С другой стороны,

$$K_\infty=\left(\frac{\rho_0}{\rho_\infty}\right)^2\left(1-\frac{v_\infty^2}{a_\infty^2}\right)=\left(\frac{\rho_0}{\rho_\infty}\right)^2\left(1-\frac{v_\infty^2\rho_\infty}{\varkappa p_\infty}\right).$$

Мы получим одно и то же значение K_∞ при $B=\varkappa p_\infty/\rho_\infty$, но это как раз и означает, что прямая

$$p=A-B\cdot 1/\rho$$

будет параллельна касательной к кривой

$$p=\vartheta^\varkappa(1/\rho)^{-\varkappa}$$

в точке $(p_\infty, 1/\rho_\infty)$.

[1]) Христианович С. А., Приближённое интегрирование уравнений сверхзвуковых течений газа, ПММ, т. XI, вып. 2, 1947.

ристики в плоскости (φ, ψ) (речь идёт о безвихревом движении). Чтобы связать φ и ψ при перемещении вдоль характеристики, удобнее всего обратиться к соотношениям (16.6) § 16. Вдоль характеристик мы имеем (см. 9.23):

$$dy = \operatorname{tg}(\beta \pm \alpha)\, dx, \tag{18.1}$$

где верхний знак отвечает характеристикам первого семейства, нижний — второго. Значит, по (16.6) вдоль характеристик будет:

$$\frac{1}{v}[\cos\beta \operatorname{tg}(\beta \pm \alpha) - \sin\beta]\, d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho v}[\sin\beta \operatorname{tg}(\beta \pm \alpha) + \cos\beta]\, d\psi = 0. \tag{18.2}$$

или, после сокращения и приведения членов:

$$d\varphi = \pm \frac{\rho_0}{\rho} \operatorname{ctg}\alpha\, d\psi. \tag{18.3}$$

Величина $(\rho_0/\rho)\operatorname{ctg}\alpha$ зависит только лишь от $\bar{v} = v/a_*$ [см., например, (9.22) и (16.1)]:

$$\frac{\rho_0}{\rho}\operatorname{ctg}\alpha = \left(1 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\bar{v}^2\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} \sqrt{\frac{\frac{\varkappa+1}{2}\left(1-\frac{1}{\bar{v}^2}\right)}{\frac{\varkappa+1}{2}\frac{1}{\bar{v}^2} - \frac{\varkappa-1}{2}}} = \sqrt{\frac{\bar{v}^2-1}{\left(1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\bar{v}^2\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}}}. \tag{18.4}$$

Обозначим вместе с Христиановичем

$$\chi(\bar{v}) = \frac{\bar{v}^2-1}{\left(1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\bar{v}^2\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}}\ ^{1}). \tag{18.5}$$

Легко видеть, что $\chi(\bar{v})$ есть монотонно растущая функция от $\bar{v}$, не отрицательная при $\bar{v} \geqslant 1$, обращающаяся в нуль при $\bar{v} = 1$ и в бесконечность при $\bar{v} = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}$. Итак, вдоль характеристик первого семейства будет

$$d\psi = \frac{1}{\sqrt{\chi(\bar{v})}}\, d\varphi, \tag{18.6}$$

а вдоль второго:

$$d\psi = -\frac{1}{\sqrt{\chi(\bar{v})}}\, d\varphi. \tag{18.7}$$

---

[1]) $\chi(\bar{v}) = -K(\bar{v})$, где $K(\bar{v})$ — функция, введенная в § 17, только $K(\bar{v})$ было определено для $\bar{v} \leqslant 1$, а $\chi(\bar{v})$, напротив, мы рассматриваем лишь для $\bar{v} \geqslant 1$.

Вспомним теперь, что характеристики в плоскости скоростей связаны соотношением

$$\beta \mp \zeta(\bar{v}) = \text{const.},$$

где

$$\zeta(\bar{v}) = \int_1^{\bar{v}} \sqrt{\frac{\bar{v}^2-1}{1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\bar{v}^2}} \cdot \frac{d\bar{v}}{\bar{v}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} \sqrt{\frac{\bar{v}^2-1}{1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\bar{v}^2}} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\bar{v}^2-1}{1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\bar{v}^2}}. \tag{18.8}$$

Обозначая

$$\zeta(\bar{v}) - \beta = 2\lambda, \quad \zeta(\bar{v}) + \beta = 2\mu \tag{18.9}$$

и переходя к независимым переменным λ и μ, мы должны из (18.6) и (18.7) получить:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} \frac{1}{\sqrt{\chi(\bar{v})}}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \frac{1}{\sqrt{\chi(\bar{v})}}. \tag{18.10}$$

При этом, вследствие (18.9),

$$\zeta(\bar{v}) = \lambda + \mu, \tag{18.11}$$

т. е. $1/\sqrt{\chi(\bar{v})}$ есть функция от $\lambda+\mu$.

Как выглядит эта функция? Не представляет труда изобразить $\sqrt{\chi}$ в функции от ζ: и ту, и другую величину можно считать параметрически представленной через $\bar{v}$ [формулы (18.5), (18.8) соответственно]. Так, например, легко убедиться, что в области $\zeta \approx 0$ ($\bar{v} \approx 1$, причём $\bar{v} \geqslant 1$) $\sqrt{\chi}$ имеет вид

$$\sqrt{\chi} = \left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{\frac{2+\varkappa}{3(\varkappa-1)}} \sqrt[3]{3\zeta} + \ldots$$

Далее, кривая имеет точку перегиба при

$$\zeta = \zeta_0 \approx 0{,}175.$$

При дальнейшем росте ζ знак кривизны у $\sqrt{\chi}$ не меняется, и она асимптотически уходит на бесконечность при

$$\zeta = \left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} - 1\right)\frac{\pi}{2}.$$

Кривая $\sqrt{\chi}$ в функции от ζ представлена на рис. 47.

Христианович замечает, что для значений ζ, не слишком близких к нулю, можно с большой точностью аппроксимировать нашу кривую как куски парабол; так в интервале

$$0{,}015 < \zeta < 0{,}57, \qquad (18.12)$$

в котором $\bar{v}$ меняется в пределах

$$1{,}06 < \bar{v} < 1{,}74,$$

можно написать

$$\sqrt{\chi} \approx 18{,}5\,(\zeta + 0{,}185)^2. \qquad (18.13)$$

В интервале

$$0{,}57 < \zeta < 1{,}02 \quad (1{,}74 < \bar{v} < 2{,}07) \qquad (18.14)$$

можно написать

$$\sqrt{\chi} \approx 6{,}5\,(\zeta - 1{,}30)^{-2} \qquad (18.15)$$

и т. п. Обычно в безвихревых задачах мы заранее знаем, в каких пределах меняется поле скоростей $\bar{v}$ (см. § 11) и поэтому мы можем выбрать представление для $\sqrt{\chi}$ в виде наиболее подходящей параболы.

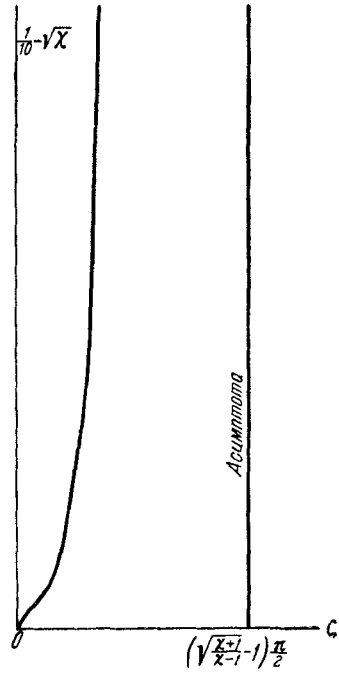

Рис. 47.

Но, если

$$\sqrt{\chi} = A\,(\zeta + c)^{2k}, \qquad (18.16)$$

где A, c и k — постоянные (причём k — целое число), то система (18.10) может быть решена в общем виде. Именно, исключая из (18.10) φ и используя (18.11) и (18.16), мы получим для ψ уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial\mu} + \frac{k}{\lambda+\mu+c}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right) = 0. \qquad (18.17)$$

Исключая же ψ, мы получим для φ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda\,\partial\mu} - \frac{k}{\lambda+\mu+c}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right) = 0. \qquad (18.18)$$

Если k положительно, удобно использовать (18.17), если $k < 0$, — возьмём (18.18). В обоих случаях мы получим уравнение Дарбу, причём тот тип, который в общем виде решается до конца. Так, если $k = +1$, как это будет по Христиановичу в интервале (18.12),

мы просто будем иметь в качестве общего решения:

$$\psi(\lambda, \mu) = \frac{\Psi_1(\lambda) + \Psi_2(\mu)}{\lambda + \mu + c}, \tag{18.19}$$

где Ψ_1 и Ψ_2 — две совершенно произвольные функции, каждая от одного аргумента; вид этих функций определится аналогично тому, как это делается в классической задаче о струне — из краевых условий. После того как ψ известно, φ найдётся из (18.10) путём простых квадратур. Это будет

$$\varphi = A(\lambda + \mu + c)[\Psi_2(\mu) - \Psi_1(\lambda)] + 2A\left[\int \Psi_1(\lambda)\, d\lambda - \int \Psi_2(\mu)\, d\mu\right].$$

Аналогичным образом в интервале (18.14) мы имеем (18.15), т. е. $k = -1$, и по (18.18) можем написать

$$\varphi(\lambda, \mu) = \frac{\Phi_1(\lambda) + \Phi_2(\mu)}{\lambda + \mu + c}, \tag{18.20}$$

где Φ_1 и Φ_2 — произвольные функции.

Прежде чем начать ставить краевые условия, построим ещё, как определяется связь между x, y и φ, ψ.

Как прежде (см. § 16), мы имеем равенства:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{1}{\bar{v}} \cos\beta\, d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho\bar{v}} \sin\beta\, d\psi, \\ dy &= \frac{1}{\bar{v}} \sin\beta\, d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho\bar{v}} \cos\beta\, d\psi. \end{aligned}\right\} \tag{18.21}$$

Слева в этих равенствах стоят полные дифференциалы, и это в конечном итоге обеспечивалось тем, что φ и ψ, $\bar{v}$, β были связаны уравнениями (16.9), (16.10). Теперь, когда φ и ψ мы представляем приближённо, как функции λ и μ (т. е. как функции β и $\bar{v}$), мы должны позаботиться о том, чтобы (18.21) оставались полными дифференциалами. Величины $1/\bar{v}$ и $\rho_0/\rho\bar{v}$ зависят только от $\bar{v}$, т. е. от ζ. Поэтому запишем (18.21) в виде:

$$\left.\begin{aligned} dx &= p(\zeta)\cos\beta\, d\varphi - q(\zeta)\sin\beta\, d\psi, \\ dy &= p(\zeta)\sin\beta\, d\varphi + q(\zeta)\cos\beta\, d\psi, \end{aligned}\right\} \tag{18.22}$$

и посмотрим, как надо представить p и q, чтобы (18.22) были полными дифференциалами. Мы можем прежде всего записать,

используя (18.10):

$$\left.\begin{aligned} dx &= -\left[p\sqrt{\chi}\cos\beta + q\sin\beta\right]\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\,d\lambda + \\ &\quad + \left[p\sqrt{\chi}\cos\beta - q\sin\beta\right]\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\,d\mu, \\ dy &= -\left[p\sqrt{\chi}\sin\beta - q\cos\beta\right]\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\,d\lambda + \\ &\quad + \left[p\sqrt{\chi}\sin\beta + q\cos\beta\right]\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\,d\mu. \end{aligned}\right\} \tag{18.23}$$

Напишем условие того, что dx есть полный дифференциал. Имеем:

$$-\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\left[p\sqrt{\chi}\cos\beta + q\sin\beta\right]\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right\} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\left[p\sqrt{\chi}\cos\beta - q\sin\beta\right]\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right\}$$

или если выполнить дифференцирование и вспомнить, что $\zeta = \mu + \lambda$, $\beta = \mu - \lambda$, и собрать члены с одинаковыми производными от ψ:

$$2p\sqrt{\chi}\cos\beta\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial\mu} + \left\{\left[\frac{d\left(p\sqrt{\chi}\right)}{d\zeta} + q\right]\cos\beta + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{dq(\zeta)}{d\zeta} - p\sqrt{\chi}\right]\sin\beta\right\}\frac{\partial\psi}{\partial\mu} + \left\{\left[\frac{d\left(p\sqrt{\chi}\right)}{d\zeta} + q\right]\cos\beta - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{dq}{d\zeta} - p\sqrt{\chi}\right)\sin\beta\right\}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = 0.$$

Наконец, замечая, что вследствие (18.10) должно быть

$$2\sqrt{\chi}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial\mu} = -\frac{d\sqrt{\chi}}{d\zeta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right),$$

мы получим окончательно два соотношения

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq}{d\zeta} - p\sqrt{\chi} &= 0, \\ \sqrt{\chi}\,\frac{dp}{d\zeta} + q &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{18.24}$$

Те же соотношения получаются из условий, что dy есть полный дифференциал [1]).

До сих пор наши выкладки были совершенно строгими. Подставим теперь вместо $\sqrt{\chi}$ наши приближённые выражения. В случае, когда

$$\sqrt{\chi} = A(\zeta + c)^2, \tag{18.25}$$

---

[1]) Легко проверить, что если мы вставим $q = \rho_0/\rho v$, $p = 1/v$, $\sqrt{\chi} = \sqrt{(v^2 - 1)/(1 - v^2/h^2)^{h^2}}$, то (18.24) будут тождественно удовлетворяться.

мы получим вследствие (18.24):

$$\frac{dq}{d\zeta} = A(\zeta + c)^2 p, \quad A(\zeta + c)^2 \frac{dp}{d\zeta} = -q.$$

Исключая q, придём к уравнению

$$\frac{d^2p}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta + c}\frac{dp}{d\zeta} + p = 0.$$

Общим интегралом этого уравнения будет

$$p = \frac{1}{\zeta + c}[c_1 \sin(\zeta + c) + c_2 \cos(\zeta + c)].$$

Для функции q мы получим при этом

$$q = A\{c_1 \sin(\zeta + c) + c_2 \cos(\zeta + c) - \\ - (\zeta + c)[c_1 \cos(\zeta + c) - c_2 \sin(\zeta + c)]\}.$$

В случае, когда

$$\sqrt{\chi} = \frac{A}{(\zeta + c)^2},$$

получим для q уравнение

$$\frac{d^2q}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta + c}\frac{dq}{d\zeta} + q = 0,$$

т. е. теперь будет

$$q = \frac{1}{\zeta + c}[c_1 \sin(\zeta + c) + c_2 \cos(\zeta + c)]$$

и

$$p = -\frac{1}{A}\{c_1 \sin(\zeta + c) + c_2 \cos(\zeta + c) - \\ - (\zeta + c)[c_1 \cos(\zeta + c) - c_2 \sin(\zeta + c)]\}.$$

Для функций p и q, отвечающих параболе (18.13), Христианович выбирает постоянные c_1 и c_2 так, чтобы при $\zeta = 0.2$ было $p = 1/\bar{v}$, $q = \rho_0/\rho\bar{v}$, тогда

$$c_1 = 0{,}553, \quad c_2 = 0{,}082.$$

Христианович даёт решение всех четырёх основных задач, о которых говорилось в § 11. При этом оказывается, что задачи I, II и IV решаются сразу же в конечном виде, или при помощи квадратур; задача же III приводится к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Начнём с задачи I.

Задача I. Движение известно на некоторой кривой, не являющейся характеристикой (кривая $\overset{\frown}{AB}$ на рис. 12). Пусть $A'B'$ есть линия, представляющая кривую AB в плоскости скоростей ($\overset{\frown}{A'B'}$ изо-

бражена на рис. 13). Пусть уравнение этой последней линии в плоскости (λ, μ) нам известно:

$$\lambda = \Lambda(\mu) \quad \text{или} \quad \mu = M(\lambda). \tag{18.26}$$

Вдоль этой линии заданы φ и ψ. Пусть будет здесь, в частности:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\mu), \\ \psi &= \psi_1(\lambda) = \psi_2(\mu). \end{aligned}\right\} \tag{18.27}$$

В общее решение для ψ

$$\psi(\lambda, \mu) = \frac{\Psi_1(\lambda) + \Psi_2(\mu)}{\lambda + \mu + c} \tag{18.28}$$

входят две функции Ψ_1 и Ψ_2. Определим их. Умножим обе части последнего равенства на $\lambda + \mu + c$ и продифференцируем по λ и μ:

$$\Psi_1'(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}[(\lambda + \mu + c)\,\psi(\lambda, \mu)] = \psi(\lambda, \mu) + (\lambda + \mu + c)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda},$$

$$\Psi_2'(\mu) = \frac{\partial}{\partial\mu}[(\lambda + \mu + c)\,\psi(\lambda, \mu)] = \psi(\lambda, \mu) + (\lambda + \mu + c)\frac{\partial\psi}{\partial\mu}.$$

Эти равенства, справедливые всюду, запишем для нашей заданной линии. Здесь можно написать:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1'(\lambda) &= \psi_1(\lambda) + [\lambda + M(\lambda) + c]\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_{\mu = M(\lambda)}, \\ \Psi_2'(\mu) &= \psi_2(\mu) + [\Lambda(\mu) + \mu + c]\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)_{\lambda = \Lambda(\mu)}. \end{aligned}\right\} \tag{18.29}$$

Члены, стоящие в правой части этих уравнений, известны все, за исключением $(\partial\psi/\partial\lambda)$ и $(\partial\psi/\partial\mu)$. Найдём эти выражения. Очевидно, что если двигаться вдоль нашей кривой (18.26), будем иметь

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\psi}{\partial\mu}M'(\lambda) = \frac{d\psi}{d\lambda} = \psi_1'(\lambda). \tag{18.30}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}M'(\lambda) = \varphi_1'(\lambda)$$

или, если воспользоваться (18.10) и (18.25),

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - M'(\lambda)\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = -\frac{\varphi_1'(\lambda)}{A[\lambda + M(\lambda) + c]^2}. \tag{18.31}$$

Из (18.30) и (18.31) мы получим:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_{\mu = M(\lambda)} = \frac{1}{2}\psi_1'(\lambda) - \frac{\varphi_1'(\lambda)}{2A[\lambda + M(\lambda) + c]^2}, \tag{18.32}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)_{\lambda = \Lambda(\mu)} = \frac{1}{2}\psi_2'(\mu) + \frac{\varphi_2'(\mu)}{2A[\mu + \Lambda(\mu) + c]^2}. \tag{18.33}$$

Остаётся подставить (18.32) и (18.33) в правые части (18.29) и провести квадратуры. Постоянные интегрирования найдутся из условия совпадения φ и ψ с заданными значениями из начальной кривой.

Мы приняли приближение (18.25). Аналогичным образом решается задача при $\sqrt{\chi} = A/(\zeta + c)^2$.

Задача II. Если в задаче I пришлось брать ещё квадратуры, то задача II решается совершенно элементарно. Имеем две характеристики: $\lambda = \lambda_0$ и $\mu = \mu_0$, выходящие из одной точки (рис. 14 и 15). На этих характеристиках движения известны. Пусть будет

$$\text{при } \lambda = \lambda_0 \quad \psi = \psi_1(\mu),$$
$$\text{при } \mu = \mu_0 \quad \psi = \psi_2(\lambda),$$

причём $\psi_1(\mu_0) = \psi_2(\lambda_0)$.

Тогда, полагая в (18.28) $\lambda = \lambda_0$, мы получим:

$$\psi_1(\mu) = \frac{\Psi_1(\lambda_0) + \Psi_2(\mu)}{\lambda_0 + \mu + c}, \tag{18.34}$$

а полагая $\mu = \mu_0$, получим:

$$\psi_2(\lambda) = \frac{\Psi_1(\lambda) + \Psi_2(\mu_0)}{\lambda + \mu_0 + c}. \tag{18.35}$$

Кроме того, первое из этих соотношений даст нам:

$$\psi_1(\mu_0) = \frac{\Psi_1(\lambda_0) + \Psi_2(\mu_0)}{\lambda_0 + \mu_0 + c}.$$

Из (18.34)

$$\Psi_2(\mu) = -\Psi_1(\lambda_0) + (\lambda_0 + \mu + c)\psi_1(\mu).$$

Из (18.35) имеем:

$$\Psi_1(\lambda) = -\Psi_2(\mu_0) + (\lambda + \mu_0 + c)\psi_2(\lambda).$$

Поэтому окончательно мы получим:

$$\psi(\lambda, \mu) = \frac{(\lambda_0 + \mu + c)\psi_1(\mu) + (\lambda + \mu_0 + c)\psi_2(\lambda) - (\lambda_0 + \mu_0 + c)\psi_1(\mu_0)}{\lambda + \mu + c}. \tag{18.36}$$

Задача III. Движение задано вдоль одной из (заданных) характеристик. Пусть, например, при $\lambda = \lambda_0$ будет $\psi = \psi_2(\mu)$, где ψ_2 — известная функция. Движение происходит между этой характеристикой и стенкой, причём уравнение последней мы напишем в виде $x = X(\beta)$, $y = Y(\beta)$ и на стенке примем $\psi = 0$. Ищем вновь решение в виде (18.28). Полагая сперва там $\lambda = \lambda_0$, получим:

$$\psi_2(\mu) = \frac{\Psi_1(\lambda_0) + \Psi_2(\mu)}{\lambda_0 + \mu + c}; \tag{18.37}$$

отсюда сразу найдём $\Psi_2(\mu)$ с точностью до постоянной $\Psi_1(\lambda_0)$; остаётся определить $\Psi_1(\lambda)$. Чтобы это сделать, заметим, что если

идти вдоль стенки, где $\psi = 0$ и $d\psi = 0$, получим по (18.22):

$$\frac{dX}{d\beta} = p(\zeta)\cos\beta\frac{d\varphi}{d\beta} = p\cos\beta\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{d\beta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\frac{d\mu}{d\beta}\right\};$$

последнее равенство можно написать, вследствие (18.10), в виде:

$$\frac{dX}{d\beta} = p\cos\beta A(\zeta + c)^2\left[\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{d\mu}{d\beta} - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{d\beta}\right]. \tag{18.38}$$

С другой стороны, вдоль линии стенки ($\psi = 0$) будет:

$$\Psi_1(\lambda) + \Psi_2(\mu) = 0 \tag{18.39}$$

и ещё

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \frac{\Psi_1'(\lambda)}{\lambda + \mu + c}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mu} = \frac{\Psi_2'(\mu)}{\lambda + \mu + c}. \tag{18.40}$$

Таким образом, комбинация, входящая в (18.38), будет

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{d\mu}{d\beta} - \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{d\lambda}{d\beta} = \frac{1}{\lambda + \mu + c}\left[\Psi_2'(\mu)\frac{d\mu}{d\beta} - \Psi_1(\lambda)\frac{d\lambda}{d\beta}\right].$$

По (18.39) выражение в квадратной скобке, стоящее здесь справа, будет просто

$$2\Psi_2'\frac{d\mu}{d\beta}.$$

Итак, мы можем дать формуле (18.38) вид

$$\frac{dX}{d\beta} = A \cdot p(\zeta + c)\cos\beta\Psi_2'\left(\frac{\zeta + \beta}{2}\right)\left[1 + \frac{d\zeta}{d\beta}\right]. \tag{18.41}$$

Наконец, мы можем сюда подставить Ψ_2' из (18.37) по формуле

$$\Psi_2'(\mu) = \frac{d}{d\mu}[(\lambda_0 + \mu + c)\psi_2(\mu)].$$

Мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для определения вдоль стенки ζ в функциях от β. Дальше решение сводится к квадратурам.

Задача IV. Эта задача решается значительно проще, чем предыдущая. Вдоль свободной поверхности, которая есть линия тока, пусть будет $\psi = 0$. Кроме того, на свободной поверхности давление и, значит, скорость известны; пусть будет там $\zeta = \zeta_1$. Тогда:

$$\Psi_1(\lambda) + \Psi_2(\mu) = 0, \quad \text{если} \quad \lambda + \mu = \zeta_1.$$

Далее, вдоль характеристики (см. рис. 18), пусть это будет $\lambda = \lambda_0$, имеем $\psi = \psi_2(\mu)$, где ψ_2 — заданная функция. Тогда

$$\psi_2(\mu) = \frac{\Psi_1(\lambda_0) + \Psi_2(\mu)}{\lambda_0 + \mu + c}.$$

Итак,

$$\Psi_2(\mu) = (\lambda_0 + \mu + c)\,\psi_2(\mu) - \Psi_1(\lambda_0)$$

и

$$\Psi_1(\lambda) = -(\lambda_0 + c + \zeta_1 - \lambda)\,\psi_2(\zeta_1 - \lambda) - \Psi_1(\lambda_0).$$

Постоянная $\Psi_1(\lambda_0)$ определится из условия совпадения значения φ с заданными её значениями на характеристике.

§ 19. Переход через скорость звука. Предельные линии. Примеры точных решений. Представим себе несжимаемую жидкость, обтекающую с определённой по величине и направлению скоростью на бесконечности, замкнутый контур. Если, не меняя направление скорости, мы увеличим величину её, то конфигурация линий тока останется неизменной — только нумерация функций тока изменится. Существует лишь одно семейство кривых, которые могут служить линиями тока при обтекании (под данным углом атаки) заданного контура несжимаемой жидкостью. Совсем иначе будет обстоять дело в сжимаемой жидкости. Если в несжимаемой жидкости мы могли написать

$$\tilde{v}_x = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y} = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}; \quad \tilde{v}_y = -\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x} = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y},$$

где

$$\tilde{v}_x = \frac{v_x}{v_\infty}; \quad \tilde{v}_y = \frac{v_y}{v_\infty}, \quad \tilde{\psi} = \frac{\psi}{v_\infty}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{v_\infty},$$

так что для $\tilde{\psi}$ мы имели просто уравнение Лапласа, то в сжимаемой жидкости мы должны положить

$$\frac{\rho}{\rho_0}\tilde{v}_x = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}; \quad \frac{\rho}{\rho_0}\tilde{v}_y = -\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}; \quad \tilde{v}_x = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}; \quad \tilde{v}_y = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y},$$

причём

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\tilde{v}^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\,\frac{v_\infty^2}{a_*^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}},$$

так что уравнение, получающееся для $\tilde{\psi}$, будет содержать в качестве коэффициента v_∞/a_* — число Маха на бесконечности. Сама конфигурация линии тока будет меняться с изменением числа Маха и, таким образом, одному профилю будет отвечать бесконечное множество линий тока, представляющих обтекание этого профиля при различных по величине скоростях на бесконечности [1]).

---

[1]) Несжимаемая жидкость получается как предельный случай, когда $v_\infty/a_* \ll 1$, так что в выражении для ρ/ρ_0 можно пренебречь членом, содержащим $(v_\infty/a_*)^2$; это приводит к приближённому условию $\rho/\rho_0 \approx 1$. Другой предельный случай получится, если скорость v_∞ будет сверхзвуковой и

Особенно резко проявляется изменение формы линий тока, когда в плоскости течения (обладающего ещё дозвуковой скоростью на бесконечности) возникают сверхзвуковые зоны. Мы уже видели в одном из предыдущих параграфов, на примере обтекания контура, близкого к кругу, что уже при $v_\infty \approx 0{,}36$ на профиле появляется точка, где $v > a_*$; при дальнейшем росте скоростей следует ожидать появления сверхзвуковой области. Но здесь возникает новая специфическая трудность. Дело в том, что течения сжимаемой жидкости обладают двумя особенностями по сравнению с движениями жидкости несжимаемой. Во-первых, в сжимаемой жидкости невозможны бесконечно большие скорости (максимальная возможная скорость есть $\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\,a_*$), во-вторых, в сверхзвуковом потоке газа, в противоположность жидкости несжимаемой, трубки тока расширяются с увеличением скорости (см. § 8). Последнее обстоятельство приводит к тому, что в сверхзвуковой зоне линии тока будут, расширяясь, расходиться по отношению к обтекаемой границе; в дозвуковой зоне, напротив, линии тока будут сужаться и как бы сходиться с приближением к сверхзвуковой зоне. Можно ожидать, что при заданном контуре будут существовать скорости на бесконечности, при которых невозможно будет удовлетворить этим обоим законам. Конечность скорости, с другой стороны, приводит к тому, что там, где решение для несжимаемой жидкости даёт бесконечные скорости, например, при обтекании острия, там решение для жидкости сжимаемой либо не существует, либо соответствующие линии тока не образуют острого угла.

Математически дело сводится к тому, что в сверхзвуковой зоне могут появиться точки и целые линии, на которых производные от скоростей будут обращаться в бесконечность. Это так называемые «предельные линии». Такие решения уравнений газовой динамики, формально существующие, физического смысла не имеют и реализоваться не могут. В этих случаях движение перестраивается так, что возникает линия сильного разрыва (не совпадающая, конечно, с предельной линией), и решение с самого начала следует искать

очень большой, т. е. если $M_\infty = v_\infty/a_\infty \gg 1$. В этом последнем случае, так как по (9.22)

$$\left(\frac{v_\infty}{a_*}\right)^2 = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,\frac{1}{1+\dfrac{2}{\varkappa-1}\,\dfrac{1}{M_\infty^2}},$$

мы получим, пренебрегая членом, содержащим $1/M_\infty^2$, $\rho/\rho_0 \approx (1-\tilde{v}^2)^{1/(\varkappa-1)}$. Таким образом, в этом предельном случае поток вновь не зависит от числа Маха на бесконечности.

не в виде непрерывного безвихревого обтекания, а в виде движения, в котором имеется поверхность разрыва, форма и местоположение которой заранее неизвестны и после перехода через которую течение становится вихревым.

Опыт показывает, что скачки, как правило, «садятся» на крыло в сверхзвуковой зоне (крыло движется с дозвуковой скоростью). Такие же скачки образуются в сопле Лаваля, даже при нужном перепаде давления, сразу после того, как совершился переход через звуковую скорость, если только профиль сопла не удовлетворяет специальным условиям (см. следующий параграф).

Условие наличия предельных линий в том или ином решении уравнений газовой динамики, т. е. условие, при котором появляются бесконечные ускорения (производные от скоростей), нетрудно написать. В самом деле, это условие очевидно равносильно обращению в нуль якобиана $D(x, y)/D(v, \beta)$; но последний можно записать так:

$$\frac{D(x, y)}{D(v, \beta)} = \frac{D(x, y)}{D(\varphi, \psi)} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(v, \beta)},$$

что вследствие (16.8), (16.9) и (16.10) даст:

$$\frac{D(x, y)}{D(v, \beta)} = \frac{1}{v^3}\left[\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 (M^2 - 1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2\right].$$

Мы видим, что если $M^2 < 1$, наш определитель не может обратиться в 0; значит, предельные линии невозможны в дозвуковом потоке. Предельные линии образуются там, где

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 (M^2 - 1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2 = 0. \qquad (19.1)$$

Любопытно, что первые примеры точных решений, в которых осуществлялся переход через скорость звука, обладали все предельными линиями [1]). Татаренчик [2]) первый показал, как можно найти ряд точных частных решений уравнений газовой динамики, в которых осуществляется переход через скорость звука, причём движения имеют физический смысл (предельная линия не успевает образоваться). Чтобы получить примеры таких решений, вернёмся к уравнениям Чаплыгина и обратим внимание на то, что каждый член ряда (стр. 118)

$$\psi = A + B\beta + \sum B_n z_n(\tau) \sin(2n\beta + \alpha_n)$$

будет формально удовлетворять уравнениям газовой динамики. Татаренчик рассматривает решения вида:

$$\psi = z_n(\tau)(A \cos 2n\beta + B \sin 2n\beta), \qquad (19.2)$$

---

[1]) Tollmien W., ZAMM 17, стр. 117—136 (1937).

[2]) Татаренчик В. В., О частных решениях уравнений газовой динамики, ПММ, т. VIII, вып. V, 1944.

где A и B — постоянные, а z_n по-прежнему будет

$$z_n = \tau^n y_n(\tau),$$

и y_n удовлетворяет уравнению гипергеометрического ряда (16.16):

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2y_n}{d\tau^2} + \left[2n+1+\left(\frac{1}{\varkappa-1}-2n-1\right)\tau\right]\frac{dy_n}{d\tau} + \frac{n(2n+1)}{\varkappa-1}y_n = 0.$$

Здесь n — любое число. Вместе с Татаренчиком положим:

$$2n+1=0,$$

тогда для y_n получим:

$$(1-\tau)\frac{d^2y_n}{d\tau^2} + \frac{1}{\varkappa-1}\frac{dy_n}{d\tau} = 0.$$

Это уравнение интегрируется и даёт:

$$y_n = c_1(1-\tau)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} + c_2,$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Итак, мы можем принять в качестве решения:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[c_1(1-\tau)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} + c_2\right][A\cos\beta - B\sin\beta]. \qquad (19.3)$$

При этом для φ получается [см., например, (16.21)]:

$$\varphi = -\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[c_1\left(1+\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau\right) + \frac{\rho_0}{\rho}c_2\right](A\sin\beta + B\cos\beta). \qquad (19.4)$$

Рассмотрим частные случаи. Положим сперва

$$c_1 = A = 0; \quad -c_2 B = \sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\,a_*,$$

тогда будет $\left(\tau = \dfrac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\dfrac{v^2}{a_*^2} = \bar{v}^2\dfrac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)$:

$$\frac{\psi}{a_*} = \bar{\psi} = \frac{1}{\bar{v}}\sin\beta, \quad \frac{\varphi}{a_*} = \bar{\varphi} = \frac{1}{\bar{v}}\frac{\rho_0}{\rho}\cos\beta. \qquad (19.5)$$

Найдём сперва, как выглядят в плоскости (x, y) линии $\bar{v} = \text{const}$. Так как вдоль этих линий

$$dx = \frac{\partial x}{\partial\beta}d\beta; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial\beta}d\beta$$

и так как, по (16.7) и по (19.5)

$$\frac{\partial x}{\partial\beta} = -\frac{1}{\bar{v}^2}\frac{\rho_0}{\rho}\sin 2\beta, \quad \frac{\partial y}{\partial\beta} = \frac{\rho_0}{\rho\bar{v}^2}\cos 2\beta,$$

то

$$dx = -\frac{\rho_0}{\bar{v}^2}\sin 2\beta\,d\beta; \quad dy = \frac{\rho_0}{\rho\bar{v}^2}\cos 2\beta\,d\beta.$$

Интегрируя по β в пределах от $\pi/2$ до β, получим:

$$x = x_0(\bar{v}) + \frac{\rho_0}{2\rho\bar{v}^2}(\cos 2\beta + 1); \quad y = y_0(\bar{v}) + \frac{\rho_0}{2\rho\bar{v}^2}\sin 2\beta,$$

отсюда

$$\left[x - \left(x_0 + \frac{\rho_0}{2\rho\bar{v}^2}\right)^2\right] + (y - y_0)^2 = \left(\frac{\rho_0}{2\rho\bar{v}^2}\right)^2.$$

Остаётся найти лишь $x_0(\bar{v})$ и $y_0(\bar{v})$. Это суть значения, которые принимают x и y в функциях от $\bar{v}$ на линии $\beta = \pi/2$. Но вдоль линии $\beta = \pi/2 = \text{const}$. будет

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \bar{v}}\, d\bar{v}, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \bar{v}}\, d\bar{v},$$

причём $(\partial x/\partial\bar{v})_{\beta=\pi/2} = \rho_0/\rho\bar{v}^3$, а $(\partial y/\partial\bar{v})_{\beta=\pi/2} = 0$. Таким образом, линия $\beta = \pi/2$ в плоскости (x, y) переходит в прямую, параллельную оси Ox, и можно считать

$$y_0 \equiv 0,$$

что же касается x_0, то оно найдётся квадратурой [1])

$$x_0(\bar{v}) = \int \frac{1}{\bar{v}^3}\frac{\rho_0}{\rho}\, d\bar{v} + \text{const.} = \int \frac{1}{\bar{v}^3}\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\bar{v}^2\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} d\bar{v} + \text{const.}$$

Таким образом, линиями $\bar{v} = \text{const}$. будет семейство кругов с центрами вдоль оси Ox и различных радиусов (см. рис. 48, на котором

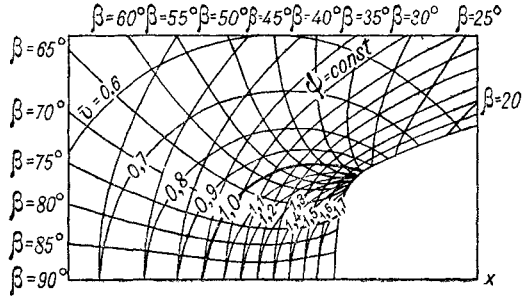

Рис. 48.

изображена «верхняя» часть течения). Так как на линии $y = 0$ будет $\beta = \pi/2$ — все линии тока под прямым углом пересекают ось Ox. Рассмотрим линию тока $\bar{\psi} = c$. По (19.5) там, где эта линия тока пересекает ось Ox, будет $\bar{v} = 1/c$. Перемещаясь вдоль линии тока,

[1]) Квадратура выполнится, если положить $\varkappa = 1{,}40$.

мы будем встречать различные значения $\bar{v}$. Попадём ли мы на предельную линию? Вдоль предельной линии (19.1) имеем по (19.5):

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 (M^2-1)\frac{\cos^2\beta}{\bar{v}^2} - \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \frac{1}{v^2}\sin^2\beta = 0.$$

Если двигаться вдоль линии тока $\bar{\psi}=c$, то будет по (19.5) $\sin\beta = c\bar{v}$, $\cos^2\beta = 1 - c^2\bar{v}^2$, и на месте встречи нашей линии тока с предельной линией будет по (8.9):

$$\left(\frac{2}{\varkappa-1}\,\bar{v}^2\,\frac{1}{\dfrac{\varkappa+1}{\varkappa-1}-\bar{v}^2} - 1\right)(1-c^2\bar{v}^2) - c^2\bar{v}^2 = 0$$

или, если собрать члены и произвести упрощения,

$$\bar{v}^4 - \frac{\varkappa+1}{2}\frac{1}{c^2}\bar{v}^2 + \frac{\varkappa+1}{2}\frac{1}{c^2} = 0.$$

У этого уравнения будут действительные корни только при

$$\frac{1}{c^2} \geqslant \frac{8}{\varkappa+1}.$$

Но, как мы видели, $1/c$ равно значению скорости в точке пересечения нашей линии тока с осью Ox. Значит, на всех тех линиях тока, для которых скорость $\bar{v}$ на оси Ox будет меньше, чем $\sqrt{\dfrac{8}{\varkappa+1}}$, бесконечные ускорения не возникают, и соответствующие течения имеют физический смысл. На рис. 48 изображены эти линии тока, вплоть до крайней возможной $\left((\bar{v})_{y=0} = \sqrt{\dfrac{8}{\varkappa+1}}\right)$. Круги постоянной скорости сгущаются по мере приближения к линиям тока, на которых возможны бесконечные ускорения. Любая из линий тока, изображённых на рис. 48, может быть принята за границу обтекаемого контура. На рис. 49 изображена одна из таких линий тока и нарисованы характеристики первого и второго семейства, которые возникают в нашем движении в сверхзвуковой зоне.

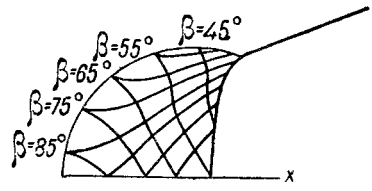

Рис. 49.

Второй частный случай решения (19.3), (19.4) получим, полагая

$$c_2 = A = 0, \quad c_1 B = -a_* \sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}.$$

Тогда

$$\psi = \frac{1}{\bar{v}}\left(1 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\bar{v}^2\right)\frac{\rho}{\rho_0}\sin\beta; \quad \varphi = \frac{1+\bar{v}^2}{\bar{v}}\cos\beta.$$

Вдоль линии $\bar{v} = \text{const}$.

$$dx = -\frac{1}{\bar{v}^2}\left(1 + \frac{1}{\varkappa+1}\bar{v}^2\right)\sin 2\beta\, d\beta;$$

$$dy = \left(\frac{1+\bar{v}^2}{\bar{v}^2}\cos 2\beta - \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\cos^2\beta\right)d\beta.$$

Так что можно написать:

$$x = x_0(\bar{v}) + \frac{1}{2\bar{v}^2}\left(1 + \frac{1}{\varkappa+1}\bar{v}^2\right)(\cos 2\beta + 1),$$

$$y = y_0(\bar{v}) + \left(\frac{1+\bar{v}^2}{\bar{v}^2} - \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\right)\frac{\sin 2\beta}{2} - \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right),$$

где $x_0(\bar{v})$, $y_0(\bar{v})$ — значения x и y в тех точках, где $\beta = \pi/2$. Как и в предыдущем примере, определим x_0 и y_0, перемещаясь по линии $\beta = \pi/2$. Получим без труда:

$$dx_0 = \frac{1+\bar{v}^2}{\bar{v}^3}\,d\bar{v}, \quad dy_0 = 0,$$

так что

$$x_0 = \text{const} - \frac{1}{2\bar{v}^2} + \ln\bar{v}, \quad y_0 = 0.$$

Вновь можно найти связь между β и $\bar{v}$ на предельной линии, а также выяснить, на каких линиях $\psi = \text{const}$ мы не встретим предельной

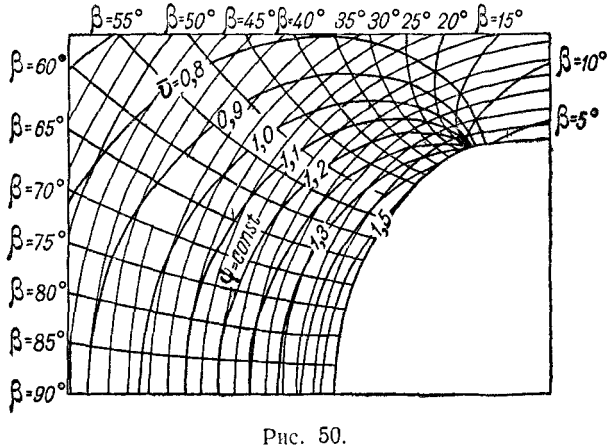

Рис. 50.

линии. Картина течения (в области, имеющей физический смысл) дана на рис. 50. На рис. 51 изображена крайняя линия тока и характеристики.

Другие примеры точных решений для движений с до- и сверхзвуковыми скоростями можем найти в статье Рингleба [1]) и Крафта и Диббла [2]). Эти авторы отправляются также от решений Чаплыгина. Полезно отметить, что решения вида (19.2) переходят в несжимаемой жидкости в решения типа

$$\Phi + i\Psi = kz^{\frac{2n}{2n-1}}, \quad (19.6)$$

где

$$z = x + iy.$$

В самом деле, для несжимаемой жидкости мы имели бы вместо (19.2) просто (см. стр. 119):

$$w = \Phi + i\Psi = cV^{2n}e^{-2ni\beta} = c\left(Ve^{-i\beta}\right)^{2n}.$$

Но тогда

$$\frac{dw}{dz} = Ve^{-i\beta} = \text{const.}\, w^{\frac{1}{2n}}.$$

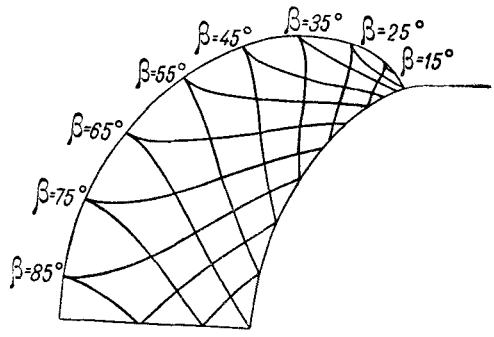

Рис. 51.

Отсюда и получится (19.6). Так решениям Татаренчика отвечает ($2n = -1$)

$$\Phi + i\Psi = k\sqrt{z}.$$

Здесь линии тока — семейство парабол с общей осью — осью Ox, а линии равных скоростей суть концентрические окружности (с центром в начале). На рис. 50 видно, как искажаются эти линии из-за сжимаемости. Крафт и Диббл рассмотрели детально случаи, когда $n = \pm 1/4,\ \pm 3/4,\ \pm 1$. На рисунке 52 изображены некоторые линии тока и линии $v = \text{const.}$ для случая $n = -3/4$ [3]). Отдельно показано в увеличенном виде поле, обведённое квадратом. Здесь как раз появляются предельные точки. Лишь вне некоторой линии тока возможно физически осуществимое обтекание, сходное с тем, что разобрал Татаренчик. В несжимаемой жидкости этому движению отвечает обтекание угла в 60°.

В приведённых примерах вопрос о возникновении или невозникновении предельных линий решается задним числом — после того, как решение получено, применяется критерий (19.1). Нельзя ли,

[1]) Ringleb F., Exakte Lösungen des Differenzialgleichungen einer adiabatischer Gasströmung, ZAMM 20, 1940.

[2]) Kraft and Dibble, Dimensional Adiabatic Compressible Flow Patterns. Journal of the Aeronaut. Sci. 11, № 4, 1914.

[3]) Постоянные, входящие в z_n, подобраны здесь так, чтобы максимальная скорость была $\bar{v} = 1{,}8$.

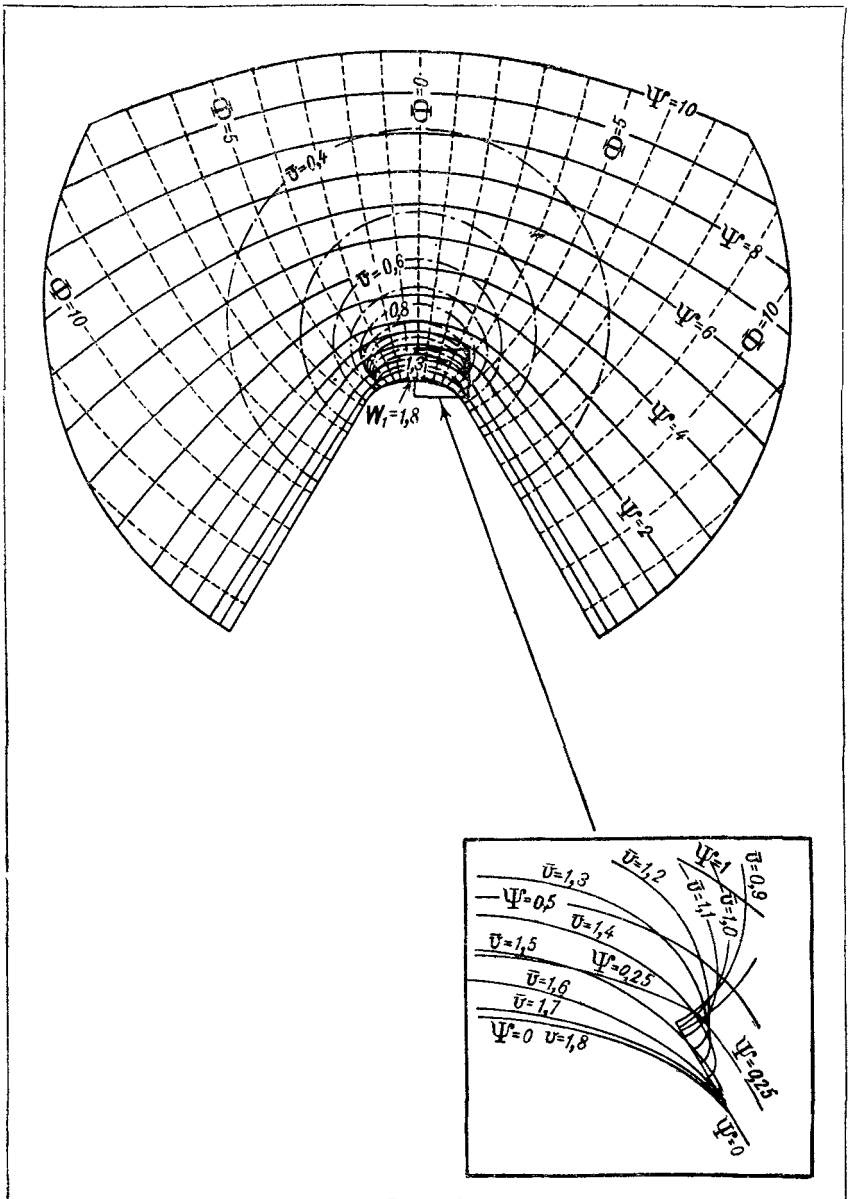
Φ=0
Φ=5
Φ=10
Ψ=10
Ψ=8
Ψ=6
Ψ=4
Ψ=2
v=0,4
v=0,6
v=0,8
v=1,3
W1=1,8
Ψ=1
Ψ=0,5
Ψ=0,25
Ψ=0
v=0,9
v=1,0
v=1,1
v=1,2
v=1,3
v=1,4
v=1,5
v=1,6
v=1,7
v=1,8

Рис. 52.

однако, выяснить заранее, получатся ли безразрывные, имеющие физический смысл, решения при обтекании данного контура, при данной скорости на бесконечности и при условии возникновения сверхзвуковой зоны. Этот вопрос тем более важен, что очень редко удаётся получить точное решение задачи обтекания. Почти всегда приходится довольствоваться решением приближённым, а благодаря неточности того или иного приближённого метода мы можем пропустить появление опасных областей. Так, например, при неудачном подборе входной части сопла Лаваля может оказаться, что непрерывное движение не осуществимо, и в сверхзвуковой зоне возникает поверхность сильного разрыва (см. § 21). Некоторый свет на условие отсутствия или возникновения разрывов проливают работы Христиановича, а также Никольского и Таганова. Мы изложим в общих чертах содержание этих исследований.

§ 20. Классификация сверхзвуковых течений по Христиановичу. Рассмотрим некоторую область течения газа, ограниченную четырьмя характеристиками. Пусть криволинейный четырёхугольник $M_1'M_2'M_3'M_4'$ (составленный из дуг эпициклоид) изображает рассматриваемую область течения в плоскости (v_x, v_y) (рис. 53). Пусть

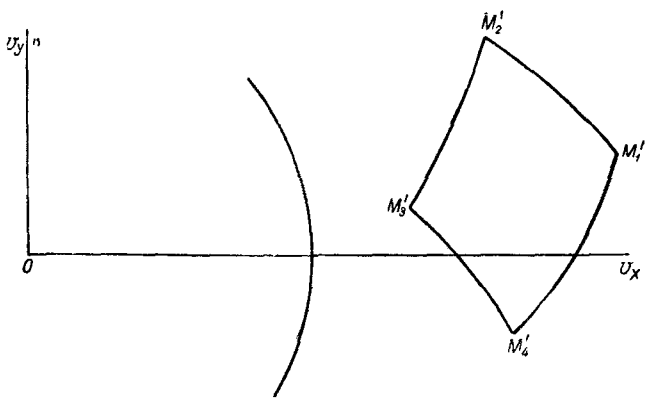

Рис. 53.

дуги $\overset{\frown}{M_3'M_2'}$, $\overset{\frown}{M_4'M_1'}$ принадлежат к эпициклоидам 1-го семейства, а дуги $\overset{\frown}{M_4'M_3'}$, $\overset{\frown}{M_1'M_2'}$ — к эпициклоидам 2-го семейства.

Как в плоскости (φ, ψ) расположатся точки M_1, M_2, M_3, M_4, являющиеся изображениями точек M_1', M_2', M_3', M_4' соответственно?

Минимальное значение φ может оказаться в одной из четырёх точек M_1, M_2, M_3, M_4. Мы не рассматриваем здесь вырождающихся случаев, когда в плоскости (v_x, v_y) мы будем иметь, вместо

четырёхугольника, дугу характеристик 1-го или 2-го семейства. Эти случаи полностью были разобраны раньше (см. § 12).

Рассмотрим все четыре возможных случая.

I. Минимальное значение φ оказалось в точке M_3. Двигаясь от M_3 по характеристике 1-го семейства $\overset{\frown}{M_3M_2}$, мы будем попадать в область с бóльшим φ; следовательно, по (18.6) ψ в точке M_2 должно быть больше, чем в M_3. Аналогично этому, чтобы попасть в M_4, надо двигаться по характеристике 2-го семейства $\overset{\frown}{M_3M_4}$, и значение ψ в точке M_4 должно быть по (18.7) меньше, чем в M_3. Таким образом, в этом случае взаимное расположение точек M_2, M_3, M_4 будет таким, как показано на рис. 54. Далее, двигаясь от M_3 к M_4 по характеристике 2-го семейства, мы будем получать по (18.6) для тангенса наклона $d\psi/d\varphi$ касательных к характеристикам 1-го семейства всё меньшие и меньшие (по модулю) значения, ибо при передвижении по эпициклоиде от M_3' к M_4' $\bar{v}$ растёт и значение $(\sqrt{\chi})^{-1}$ убывает. Аналогично, двигаясь по характеристике $\overset{\frown}{M_3M_2}$ от M_3 к M_2, мы по (18.7) будем встречать всё меньшие и меньшие значения $|d\psi/d\varphi|$ для характеристик 2-го семейства.

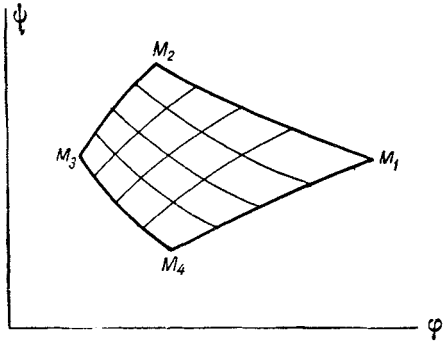

Рис. 54.

Таким образом, можно установить характер выпуклости характеристик обоих семейств. Схематическое изображение нашей области в плоскости (φ, ψ) дано на рис. 54. Христианович [1]) называет движения такого типа «течениями расширения». Криволинейные характеристики как 1-го, так и 2-го семейства ведут себя здесь, если перемещаться в направлении течения (т. е. по линиям $\psi = \text{const}$. от меньших φ к бóльшим) так же, как ведут себя прямолинейные характеристики 1-го семейства в задаче о движении газа вне выпуклой поверхности (§ 12, рис. 23). Возникновение предельной линии (пересечение характеристик) здесь невозможно.

II. Минимальное значение φ пришлось на точку M_1. Передвижение от точки M_1 к точке M_2 позволит теперь заключить, благодаря предположенной минимальности φ в точке M_1 и на основании (18.7), что ψ в точке M_2 должно быть меньше, чем в M_1; аналогично — ψ

[1]) Христианович С. А., О сверхзвуковых течениях газа, Труды ЦАГИ, вып. 543, 1941.

в M_4 будет больше, чем в M_1. Таким образом, точки M_1, M_2, M_4 расположатся так, как показано на рис. 55. Если теперь мы будем перемещаться по характеристике 2-го семейства $\overset{\frown}{M_3M_4}$ от точки M_3 к точке M_4, то мы будем в плоскости (v_x, v_y) двигаться в сторону увеличения $\bar{v}$ и, значит, по (18.7) будем получать всё меньший и меньший (по модулю) наклон характеристик 1-го семейства (см. рис. 55). Аналогичным образом при перемещении от M_3 к M_2 будем получать все меньший и меньший наклон характеристик 1-го семейства. Такие движения Христианович называет «течениями сжатия». Двигаясь по течению (слева направо по линиям $\psi =$ $=$ const.), мы будем встречать характеристики обоих семейств, ведущие себя так же, как вели себя характеристики (прямолинейные) в задаче о движении около вогнутой поверхности (§ 13). Характеристики сближаются по направлению течения. Предельная линия может здесь возникнуть как огибающая каждого из семейств характеристик. Христианович говорит в таких случаях, что течение стремится к разрушению. В случае II течение стремится к разрушению в трёх направлениях: в направлении возрастающих ψ, в направлении убывающих ψ, в направлении движения.

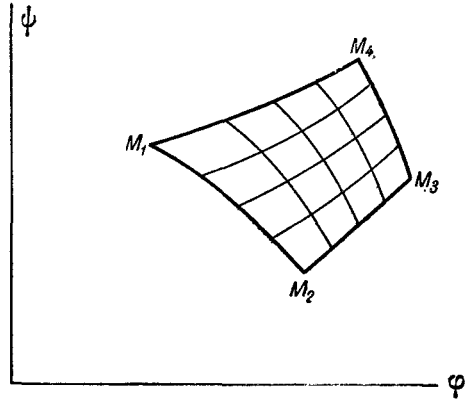

Рис. 55.

III. Минимальное значение φ принадлежит точке M_2. Движение по характеристике от M_2 к M_3 приведёт теперь, вследствие (18.6), к росту ψ; движение от M_2 к M_1, по (18.7), — к уменьшению ψ (см. рис. 56). При движении от M_2' к M_3' мы будем попадать в область меньших $\bar{v}$, значит, характеристики 2-го семейства, встречающие $\overset{\frown}{M_2M_3}$, будут подходить [вследствие (18.7)] всё круче и круче по мере перемещения от M_2 к M_3. Напротив, если двигаться от M_2 к M_1, мы

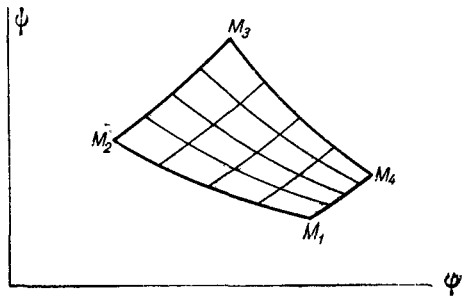

Рис. 56.

будем встречать всё менее и менее наклонённые характеристики 1-го семейства. Наконец, как и в предыдущих случаях, при перемещении по любой характеристике мы будем иметь монотонное изменение тангенса наклона этой же характеристики (неизменность знака кривизны). Такое решение стремится к разрушению в направлении убывающих ψ, но в направлении течения оно может не претерпевать разрушения — разрыв может и не возникнуть, ввиду того, что характеристики разных семейств ведут себя здесь по-разному. Этот тип можно назвать «смешанным».

IV. φ достигает минимума в точке M_4. Теперь рост ψ получим, двигаясь от M_4 к M_1, и убывание — двигаясь от M_4 к M_3. При передвижении от M_4 к M_3 будем попадать в область с меньшими $\overline{v}$ и, значит, по (18.6) характеристики 1-го семейства, пересекающие $\overset{\frown}{M_4M_3}$, будут становиться всё круче по мере перемещения от M_4 к M_3. Напротив, двигаясь от M_4 к M_1, будем встречать всё менее и менее наклонённые характеристики 1-го семейства. Движение стремится к разрушению в направлении растущих ψ (рис. 57). Как и в предыдущем случае, вопрос о возникновении линии разрывов останется открытым. Течения такого типа Христианович также называет смешанными, объединяя их с предыдущими.

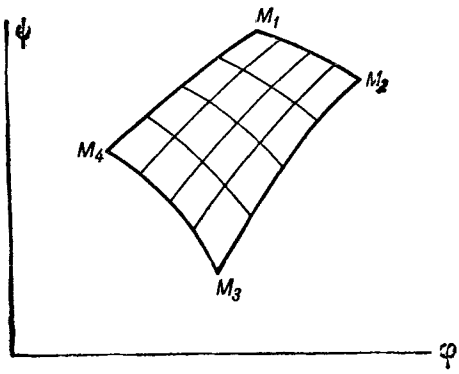

Рис. 57.

Мы имеем таким образом три типа течений.

Можно было бы провести классификацию и по поведению характеристик в плоскости (x, y) непосредственно, но здесь число классов пришлось бы удвоить. В самом деле, рассмотрим направление вогнутости характеристик в плоскости (x, y). Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\beta \pm \alpha).$$

Так что

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2(\beta \pm \alpha)} \frac{d(\beta \pm \alpha)}{dv} \frac{dv}{dx}.$$

Но вдоль характеристик [см., например, (10.3)]

$$\frac{d\beta}{dv} = \pm \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{v},$$

а по (9.22)

$$2\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\alpha}{dv}=-(\varkappa+1)\frac{a_*^2}{v^3}=-\left(\frac{\varkappa-1}{2}+\sin^2\alpha\right)\frac{2}{v}.$$

Таким образом,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{1}{\cos^2(\beta\pm\alpha)}\frac{dv}{dx}\frac{1}{v\sin\alpha\cos\alpha}\left\{\cos^2\alpha-\frac{\varkappa-1}{2}-\sin^2\alpha\right\}.$$

Кривизна обратится в нуль при значении $\alpha=\alpha_0$, где

$$\sin^2\alpha_0=\frac{3-\varkappa}{4}.$$

При $\varkappa=1{,}4$ $\sin\alpha_0=0{,}6325$, соответствующее число Маха будет

$$\mathsf{M}_0=\frac{2}{\sqrt{3-\varkappa}}=1{,}565,$$

а $\bar v_0=\sqrt{2}$.

Такие точки перегиба на характеристиках отчётливо видны, например, на рис. 49 и рис. 51 там, где наши характеристики пересекаются с линиями $\bar v=\sqrt{2}$.

Таким образом, классифицировать пришлось бы отдельно для $\mathsf{M}<\mathsf{M}_0$ и $\mathsf{M}>\mathsf{M}_0$.

Посмотрим теперь, к какому классу движений принадлежит движение, получающееся сразу же за «переходной линией» (так мы будем называть линию, где $v=a_*$) в сверхзвуковой области. Отправляемся на этот раз от уравнений (9.2):

$$(v_x^2-a^2)\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_xv_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+(v_y^2-a^2)\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

и условия отсутствия вихрей

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0.$$

Вводя величину скорости v и угол β, так что

$$v_x=v\cos\beta,\quad v_y=v\sin\beta,$$

мы можем переписать наши уравнения в виде

$$\left.\begin{aligned}(v^2-a^2)\left(\cos\beta\frac{\partial v}{\partial x}+\sin\beta\frac{\partial v}{\partial y}\right)-a^2v\left(\cos\beta\frac{\partial\beta}{\partial y}-\sin\beta\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)=0,\\ \sin\beta\frac{\partial v}{\partial x}-\cos\beta\frac{\partial v}{\partial y}+v\left(\cos\beta\frac{\partial\beta}{\partial x}+\sin\beta\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)=0\end{aligned}\right\}\quad(20.1)$$

или, если ввести $\bar v=v/a_*$ и обозначить $\mathsf{M}=v/a$:

$$\left.\begin{aligned}(\mathsf{M}^2-1)\left(\cos\beta\frac{\partial\bar v}{\partial x}+\sin\beta\frac{\partial\bar v}{\partial y}\right)+\bar v\left(\sin\beta\frac{\partial\beta}{\partial x}-\cos\beta\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)=0,\\ \sin\beta\frac{\partial\bar v}{\partial x}-\cos\beta\frac{\partial\bar v}{\partial y}+\bar v\left(\cos\beta\frac{\partial\beta}{\partial x}+\sin\beta\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)=0.\end{aligned}\right\}\quad(20.2)$$

Чтобы выяснить, что будет происходить около линии $\bar{v}=1$, рассмотрим сперва произвольную линию $\bar{v}=\text{const}$. Пусть P — точка на этой линии. Обозначим длину, отсчитанную по дуге от точки P вдоль линии $\bar{v}=\text{const}$., через s. Нормаль в P к линии $\bar{v}=\text{const}$. обозначим буквой n. Направив ось Ox по касательной, а ось Oy по нормали к линии $\bar{v}=\text{const}$. в точке P, мы можем переписать уравнения (20.1) в виде:

$$(\mathbf{M}^2-1)\sin\delta\frac{\partial\bar{v}}{\partial n}+\bar{v}\left(\sin\delta\frac{\partial\delta}{\partial s}-\cos\delta\frac{\partial\delta}{\partial n}\right)=0,$$

$$-\cos\delta\frac{\partial\bar{v}}{\partial n}+\bar{v}\left(\cos\delta\frac{\partial\delta}{\partial s}+\sin\delta\frac{\partial\delta}{\partial n}\right)=0.$$

Здесь δ — угол, составляемый вектором скорости с касательной к линии $\bar{v}=\text{const}$. (см. рис. 58). Исключив из этих уравнений $\partial\delta/\partial n$, мы получили следующее равенство, связывающее $\partial\delta/\partial s$ и $\partial\bar{v}/\partial n$:

$$\bar{v}\frac{\partial\delta}{\partial s}=(1-\mathbf{M}^2\sin^2\delta)\frac{\partial\bar{v}}{\partial n}. \quad (20.3)$$

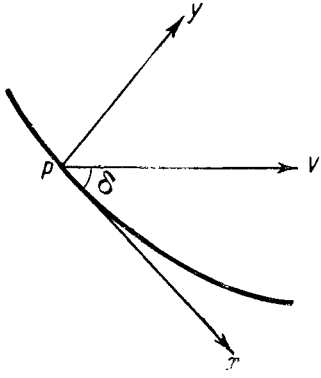

Рис. 58.

Особенно простой вид получит формула (20.3), когда наша линия $v=\text{const}$. есть линия перехода, т. е. если $\bar{v}=1$. Тогда:

$$\frac{\partial\delta}{\partial S}=\cos^2\delta\frac{\partial\bar{v}}{\partial n}. \quad (20.4)$$

Заметим, что если нормаль направлена в сторону сверхзвуковой зоны, то будет $\partial\bar{v}/\partial n>0$, и таким образом $\partial\delta/\partial s>0$. Отсюда мы получаем важное следствие: если перемещаться по линии $\bar{v}=1$, то угол между направлением скорости и направлением касательной к линии $\bar{v}=1$ будет меняться монотонно и именно так, что если при нашем перемещении сверхзвуковая скорость остаётся слева, то вектор скорости будет вращаться против часовой стрелки.

Может ли получиться бесконечное ускорение уже на самой линии $\bar{v}=1$? Согласно (20.4): $\partial\bar{v}/\partial n=(1/\cos^2\delta)\,\partial\delta/\partial s$. Может представиться два случая: 1) $\delta=\pi/2$, 2) $\delta\neq\pi/2$. Если $\delta=\pi/2$, то вектор скорости ортогонален в точке P к переходной линии. Так как при $\bar{v}=1$ $\sin\alpha=1$, т. е. $\alpha=\pi/2$, то в точке $\bar{v}=1$ вектор скорости должен быть ортогонален к характеристикам Значит, когда $\delta=\pi/2$, то характеристики будут касаться в P переходной линии (рис. 59). Пусть

$$\beta=\beta^*(s)$$

— значения угла β на линии $\bar{v}=1$ в функциях от длины дуги s,

отсчитываемой от точки P. Дифференцируя это соотношение вдоль дуги, получим

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}\cos(\beta-\delta)+\frac{\partial\beta}{\partial y}\sin(\beta-\delta)=\frac{d\beta^*}{ds}$$

(как и прежде, δ — текущий угол, составляемый вектором скорости с направлением касательной к линии $\bar{v}=1$, так что $\beta-\delta$ — угол наклона касательной к линии $\bar{v}=1$ к оси x). Кроме того, дифференцируя вдоль кривой $\bar{v}=1$, имеем:

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\cos(\beta-\delta)+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\sin(\beta-\delta)=0.$$

К этим двум уравнениям мы можем присоединить ещё два уравнения, которые получатся из (20.2) при $M=1$, $\bar{v}=1$:

$$\sin\beta\frac{\partial\beta}{\partial x}-\cos\beta\frac{\partial\beta}{\partial y}=0,$$

$$\sin\beta\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}-\cos\beta\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\cos\beta\frac{\partial\beta}{\partial x}+\sin\beta\frac{\partial\beta}{\partial y}=0.$$

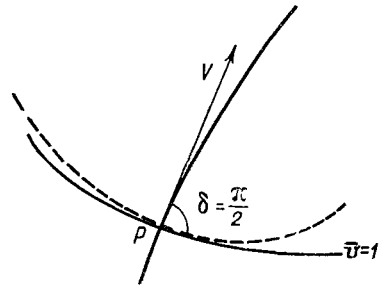

Рис. 59.

Решая наши уравнения относительно производных, получим

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}=\frac{\cos(\beta-\delta)}{\cos^2\delta}\frac{d\beta^*}{ds},\quad \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}=\frac{\sin(\beta-\delta)}{\cos^2\delta}\frac{d\beta^*}{ds},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial y}=\frac{\sin\beta}{\cos\delta}\frac{d\beta^*}{ds},\quad \frac{\partial\beta}{\partial x}=\frac{\cos\beta}{\cos\delta}\frac{d\beta^*}{ds}.$$

Мы предположили, что в точке $P(s=0)$ $\delta=\pi/2$. Около точки P мы можем написать

$$\delta=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{d\delta^*}{ds}\right)_0 s+\left(\frac{d^2\delta^*}{ds^2}\right)_0\frac{s^2}{2}+\left(\frac{d^3\delta^*}{ds^3}\right)_0\frac{s^3}{3!}+\ldots,$$

поэтому $\cos^2\delta=(d\delta^*/ds)^2 s^2+O(s^3)$, где $O(s^3)$ обозначает член порядка не ниже s^3. С другой стороны, для $d\beta^*/ds$ имеем

$$\frac{d\beta^*}{ds}=\left(\frac{d\beta^*}{ds}\right)_0+\left(\frac{d^2\beta^*}{ds^2}\right)_0 s+\left(\frac{d^3\beta^*}{ds^3}\right)_0\frac{s^2}{2}+O(s^3),$$

так что для $\partial\bar{v}/\partial y$, например, имеем

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}=\cos(\beta-\delta)\frac{\left(\frac{d\beta^*}{ds}\right)_0+\left(\frac{d^2\beta^*}{ds^2}\right)_0 s+\left(\frac{d^3\beta^*}{ds^2}\right)_0\frac{s^2}{2}+O(s^3)}{\left(\frac{d\delta^*}{ds}\right)_0^2 s^2+O(s^2)}. \quad (20.5)$$

Для ограниченности производной необходимо выполнение равенств

$$\left(\frac{d\beta^*}{ds}\right)_p = \left(\frac{d^2\beta^*}{ds^2}\right)_p = 0. \tag{20.6}$$

Таким образом, для возможности непрерывного перехода от дозвуковой скорости к сверхзвуковой в том случае, когда в некоторой точке линия перехода ортогональна к вектору скорости (например, на оси симметрии сопла Лаваля), необходимо выполнение специальных условий (20.6) относительно равномерности потока около этой точки.

Если линия $\bar{v} = 1$ сама является характеристикой (или во всех точках касается характеристик), то для непрерывности движения условие (20.6) должно выполняться во всех точках этой линии, т. е. должно быть

$$\frac{d\beta^*}{ds} \equiv 0,$$

и линия перехода должна быть простой прямой. В противном случае на всей линии перехода мы будем иметь бесконечные значения наших производных, т. е. бесконечные ускорения, и тогда движение нельзя продолжить за линию перехода (сама линия перехода будет предельной линией) и всё решение не будет иметь физического смысла. Простейшим примером такого решения может служить аналог источника или стока в несжимаемой жидкости. Именно, если в цилиндрических координатах

$$v_r = v_r(r), \qquad v_\theta = 0$$

(v_r — функция одного только r), то, так как по уравнению Бернулли

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\bar{v}^2\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}$$

($\bar{v} = |v_r/a_*|$), а вследствие уравнения неразрывности,

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{\rho}{\rho_0}\bar{v}\right) = 0,$$

мы можем написать:

$$r = \frac{\text{const.}}{\bar{v}\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\bar{v}^2\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}}.$$

Если r_* — радиус того круга, на котором $\bar{v}$ обращается в единицу, то постоянная интегрирования будет $r_*\left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}$, так что

$$r = \frac{r_*}{\bar{v}\left(\frac{\varkappa + 1}{2} - \frac{\varkappa - 1}{2}\bar{v}^2\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}}. \tag{20.7}$$

Мы можем, казалось бы, представить себе движение таким: на бесконечности $v = 0$, всюду $v_r < 0$ — жидкость устремляется по радиусам к центру; скорость движения монотонно растёт по закону (20.7) и на окружности $r = r_*$ достигает критического значения. Однако вдоль окружности $r = r_*$ будет $d\delta_*/ds = 1/r_*$, так что (20.6) не выполняется. С другой же стороны, как нетрудно убедиться, написав уравнения характеристик в цилиндрических координатах, все характеристики должны касаться окружности $r = r_*$ (где $\operatorname{ctg}\alpha = 0$). Движение наше не может быть продолжено внутрь круга радиуса $r = r_*$. В самом деле, знаменатель (20.7) имеет максимум, и следовательно, r имеет минимум в точности при $\bar{v} = 1$. Этот пример может служить иллюстрацией к сказанному в начале предыдущего параграфа о невозможности в сжимаемой жидкости осуществления таких течений, которые в жидкости несжимаемой давали бы бесконечные скорости. Вместо источника, или стока в начале координат, которые получаются в несжимаемой жидкости, мы имеем здесь ядро в виде круга радиуса $r = r_*$, внутрь которого течение нельзя продолжить.

Вернёмся теперь к общему случаю, когда $\delta \neq \pi/2$ (см. рис. 60). Нетрудно убедиться, что движение, возникающее в сверхзвуковой области сразу за линией перехода, будет принадлежать к типу смешанных течений по Христиановичу. Действительно, найдём изменение φ при перемещении по характеристике. Полная производная по x при перемещении по характеристике будет

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\operatorname{tg}(\beta \pm \alpha) =$$
$$= v[\cos\beta + \sin\beta \operatorname{tg}(\beta \pm \alpha)].$$

Таким образом,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{v\cos\alpha}{\cos(\beta \pm \alpha)}. \qquad (20.8)$$

На линии перехода $\alpha = \pi/2$, $(d\varphi/dx)_* = 0$.

Продифференцируем (20.8) ещё раз по x и определим эту производную на линии перехода. Получим:

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_* = \pm\frac{a_*}{\sin\beta}\frac{d\alpha}{dx}.$$

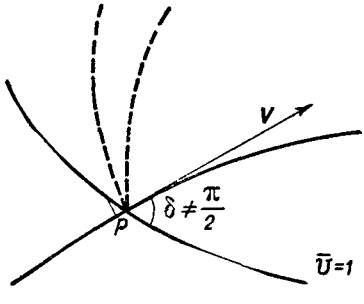

Рис. 60.

Знак плюс следует взять при перемещении вдоль характеристик 1-го семейства, знак минус — для 2-го семейства. Таким образом, если по мере передвижения от какой-либо точки P переходной линии по характеристике 1-го семейства φ будет расти, то при перемещении от P по характеристике 2-го семейства φ будет убывать и наоборот. Ясно, что это может быть лишь в случае смешанного течения (рис. 56 и 57). Итак, за переходной линией действительно может

возникнуть предельная линия, в чём мы и имели случай убедиться на конкретных примерах § 19.

§ 21. Построение «безударного» сопла Лаваля. Истечение газа из отверстия, сопровождаемое переходом через скорость звука. В § 12 мы видели, как можно путём подбора профиля стенок получить равномерную сверхзвуковую скорость в сопле Лаваля, после того как уже получено сверхзвуковое течение в некотором сечении сопла. Подбор стенок производится в сверхзвуковой области. На первый взгляд может показаться, что форма стенок в дозвуковой части сопла — так называемой входной части — может быть произвольна, лишь бы можно было достигнуть перехода через скорость звука. Однако это не так. Затруднения с отысканием решения, о которых мы говорили в предыдущем параграфе, здесь проявляются особенно отчётливо. Если профиль входного отверстия будет произвольным, может оказаться, что переход через скорость звука будет сопровождаться появлением бесконечных ускорений. Физически это будет означать, что движение перестроится, так что сразу течение будет «испорчено». На рис. 61, заимствованном из статьи Астрова,

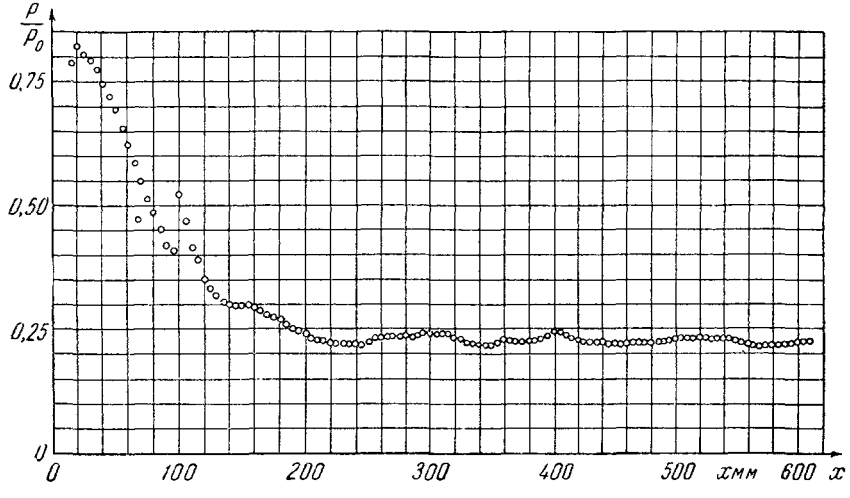

Рис. 61.

Левина, Павлова и Христиановича[1]), даны результаты экспериментальных измерений распределения давления p/p_0 вдоль оси одного сопла Лаваля. Сопло это было рассчитано без учёта возможности

[1]) Астров В., Левин Е., Павлов Л., Христианович С., О расчёте сопел Лаваля, ПММ, т. VII, 1943.

возникновения разрыва. Как видно на рисунке, недалеко от линии перехода (на ней $p/p_0 = 0{,}528$) в сверхзвуковой области возник разрыв; он породил возмущение, отражающееся от стенок сопла и распространяющееся по всей длине сопла. Равномерность потока оказалась испорченной.

Как же следует построить входное отверстие, чтобы скачок не образовался? Как построить безударное сопло Лаваля?

В качестве простейшего приёма можно, казалось бы, предложить следующий[1]). На оси симметрии сопла, каковую мы примем за ось Ox, с началом координат в точке линии перехода, зададим скорость v_x как некую аналитическую функцию от x. Пусть разложение этой функции в ряд около точки $x = 0$ имеет вид:

$$\bar{v}_x = \frac{v_x}{a_*} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots \tag{21.1}$$

Уравнения газовой динамики [см. (15.1)]:

$$\left[(\varkappa+1)(\bar{v}_x^2 - 1) + (\varkappa - 1)\bar{v}_y^2\right]\frac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial x^2} + 4\bar{v}_x\bar{v}_y\frac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial x\,\partial y} + \\ + \left[(\varkappa+1)(\bar{v}_y^2 - 1) + (\varkappa - 1)\bar{v}_x^2\right]\frac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial y^2} = 0, \tag{21.2}$$

где $\bar{\Phi}$ — безразмерный потенциал скоростей, так что

$$\bar{v}_x = \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x}, \quad \bar{v}_y = \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y}, \tag{21.3}$$

вместе с условиями симметрии и условием (21.1), позволят тогда последовательно определить в точке $O(0, 0)$ любую производную от $\bar{\Phi}$ по x и y. Так, например, из условия (21.1) имеем для точки O: $\partial\bar{\Phi}/\partial x = 1$, а из условия симметрии: $\partial\bar{\Phi}/\partial y = 0$ ($\bar{v}_y = 0$). Затем из того же условия (21.1) $\partial^2\bar{\Phi}/\partial x^2 = A$, из условия симметрии $\partial^2\bar{\Phi}/\partial x\,\partial y = 0$, из уравнения (21.2) получим $\partial^2\bar{\Phi}/\partial y^2 = 0$. Далее, $\partial^3\Phi/\partial x^3 = 2B$, $\partial^3\bar{\Phi}/\partial x^2\,\partial y = 0$; производные же $\partial^3\bar{\Phi}/\partial x\,\partial y^2$, $\partial^3\bar{\Phi}/\partial y^3$ определим путём дифференцирования (21.2) по x и из условия симметрии и т. д. Производя эти совершенно элементарные выкладки, получим:

$$\bar{\Phi} = x + A\frac{x^2}{2} + B\frac{x^3}{3} + \frac{(\varkappa+1)A^2}{2}xy^2 + C\frac{x^4}{4} + \\ + (\varkappa+1)A\frac{(2\varkappa-1)A^2 + 6B}{4}x^2y^2 + \frac{(\varkappa+1)^2}{4!}A^3y^4 + \ldots \tag{21.4}$$

---

[1]) Meyer T., Ueber zweidimensionale Bewegungsgleichung in einem Gas, die mit Ueberschallgeschwindigkeit strömt, Forschungheft 72, 1908.

Теперь мы можем написать разложения для $\bar{v}_x$ и $\bar{v}_y$:

$$\bar{v}_x = 1 + Ax + Bx^2 + (\varkappa+1)\frac{A^2}{2}y^2 + \\ + Cx^3 + (\varkappa+1)A\frac{(2\varkappa-1)A^2+6B}{2}xy^2 + \ldots \quad (21.5)$$

$$\bar{v}_y = (\varkappa+1)A^2xy + (\varkappa+1)A\frac{(2\varkappa-1)A^2+6B}{2}x^2y + \\ + \frac{(\varkappa+1)^2A^3}{6}y^3 + \ldots \quad (21.6)$$

и путём простых квадратур определить функцию тока $\bar{\Psi}$:

$$\bar{\Psi} = \int \frac{\rho}{\rho_0}(\bar{v}_x\,dy - \bar{v}_y\,dx),$$

где

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2)\right]^{\frac{1}{\varkappa-1}}.$$

Одну из линий тока $\psi = \text{const}$ можно принять за стенки сопла. Сходимость участвующих здесь рядов обеспечивается теоремой Коши — Ковалевской, благодаря аналитичности функции $v_x(x, 0)$. Однако радиус сходимости по оси Oy заранее неизвестен, и это сразу же заставляет отбросить изложенный здесь метод построения сопла. Действительно, так как неизвестно, на каком расстоянии мы ещё можем пользоваться нашими рядами, то заранее мы не знаем, не встретимся ли мы с тем же затруднением, о котором говорили в предыдущем параграфе: наше решение может оказаться не имеющим смысла за некоторым y.

Изложенные здесь подсчёты дают, однако, совершенно строгие значения производных в точке O от $\bar{\Phi}$ и $\bar{\Psi}$ и полезны для ориентировки. Они показывают, как ведёт себя движение недалеко от линии перехода в случае аналитического решения на оси. Так, например, они позволяют дать уравнение линии перехода около самой точки O. Именно, если искать это уравнение в виде

$$x = a_2y^2 + a_4y^4 + \ldots, \quad (21.7)$$

то, вставляя (21.7) в (21.5) и (21.6) и написав условие $\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 = 1$, получим без труда:

$$x = -\frac{\varkappa+1}{2}Ay^2 - \frac{(\varkappa+1)^2}{2}ABy^4 + \ldots$$

Далее, для характеристик обоих семейств, выходящих из O, будем иметь:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{\varkappa+1}{2}(\bar{v}_x^2-1) - \frac{\varkappa-1}{2}\bar{v}_y^2}{\bar{v}_x\bar{v}_y \pm \sqrt{\frac{\varkappa+1}{2}(\bar{v}_x^2+\bar{v}_y^2-1)}},$$

и если искать их уравнение в виде

$$x = my^2 + \ldots,$$

то для 1-го семейства (знак плюс) получим:

$$x = \frac{\varkappa+1}{2} Ay^2 + \ldots, \tag{21.8}$$

для 2-го:

$$x = -\frac{\varkappa+1}{4} Ay^2 + \ldots \tag{21.9}$$

На рис. 62 дана схема расположения линии перехода и обеих характеристик.

Чтобы избежать затруднения, связанного с необходимостью знать радиус сходимости, Христианович, Астров, Левин и Павлов предложили способ построения всего течения в эксплицитном виде, а не при

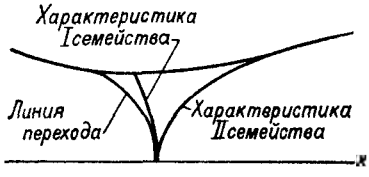

Рис. 62.

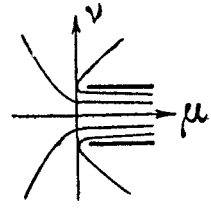

Рис. 63.

помощи рядов. В основу они положили построение входного отверстия по методу Христиановича (§ 17). Именно они приняли в качестве фиктивного потока течение через так называемый насадок Борда. Уравнение этого течения имеет вид

$$\overline{V}_\infty(\mu + i\nu) = \overline{\Phi} + i\overline{\Psi} - e^{-(\overline{\Phi}+i\overline{\Psi})}.$$

Линии тока схематически даны на рис. 63. Стенки насадка получаются при $\Psi = \pm\pi$ ($\nu = \pm\pi/\overline{V}_\infty$) — линия тока дважды повторяет стенку насадка.

Отделяя действительную и мнимую часть, получим:

$$\mu = \frac{1}{\overline{V}_\infty}[\overline{\Phi} - e^{-\overline{\Phi}}\cos\overline{\Psi}], \quad \nu = \frac{1}{\overline{V}_\infty}[\overline{\Psi} + e^{-\overline{\Phi}}\sin\overline{\Psi}].$$

Линии тока, для которых $\overline{\Psi} = \pm\pi/2$, могут быть приняты за «стенку» C фиктивного потока. Уравнения этих стенок будут

$$\nu = \pm\frac{1}{\overline{V}_\infty}\left(\frac{\pi}{2} + e^{-\overline{V}_\infty\mu}\right).$$

Потребуем теперь, чтобы $\bar{V}_\infty$ было в точности равно тому значению, при котором соответствующая скорость $\bar{v}_\infty$ в потоке сжимаемой жидкости равна единице:

$$\bar{V}_\infty = 2h \sqrt{\frac{(h-1)^{h+1}}{(h+1)^{h+1}}} \approx 0{,}7579.$$

Как показал расчёт упомянутых авторов, контуры в плоскости (x, y) укорачиваются, так что линия $\bar{v}=1$ оказывается на конечном расстоянии [1]). Далее, весьма существенно то, что линия перехода оказывается отрезком прямой, перпендикулярной к оси Ox, и вдоль линии перехода скорость всюду имеет одно и то же направление, параллельное оси Ox (в несжимаемой жидкости поток стремится к этому направлению на бесконечности). Мы уже видели в предыдущем параграфе, что прямая линия перехода обладает преимуществом по сравнению с другими. Тот факт, что линия перехода прямая, позволяет считать, что разрывов в сверхзвуковой зоне не образуется. Практически ход построения входной части следующий. Пересечение прямой перехода с осью сопла принимается за начало координат в плоскости (x, y) (положительная ось Ox направлена по оси сопла в сторону сверхзвуковых скоростей, отрицательная — в сторону дозвуковых скоростей). Начиная от линии перехода (в сторону дозвуковых скоростей), расчёт стенок ведётся вплоть до тех мест, где $\bar{v} \approx 0{,}8$ по формулам типа (17.2), упрощённых за счёт того, что здесь $\sqrt{K} \approx 0$, $\bar{v} \approx 1$; начиная от того места, где $\bar{v} \approx 0{,}8$, расчёт ведётся по формулам (17.23). В сверхзвуковой части следует сперва отойти от прямой линии $\bar{v}=1$ путём разложения $\bar{v}$ и β в ряды, но не по степеням x и y, как это делалось в начале этого параграфа, а по степеням φ и ψ. С этой целью можно использовать, например, уравнения Чаплыгина (16.9), (16.10), которые можно записать сперва в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \bar{v}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{v}}, \qquad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{v}} = \frac{M^2-1}{\bar{v}}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \beta},$$

затем принять за независимые переменные $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$, а за искомые функции $\bar{v}$ и β и, наконец, принять за неизвестную функцию $t = \bar{v}^2 - 1$. Написав разложение t и β по степеням $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ (практически можно ограничиться членами с пятыми степенями), можно при помощи этих рядов отойти немного от линии $\bar{v}=1$ в сторону сверхзвуковых скоростей. Определив вдоль линии $\bar{\varphi} = \text{const}$. (упомянутые выше авторы брали $\bar{\varphi} = 0{,}44721$) скорости в нескольких точках, можно

[1]) Это связано с наличием множителя $\sqrt{K}$ под интегралом выражений для x через μ. Ср. приближённые формулы стр. 143.

затем уже строить сверхзвуковую часть по методу, изложенному в § 12.

На рис. 64, заимствованном из упомянутой работы, изображён профиль сопла, рассчитанного так, чтобы на конце его было $\bar{v} = 1{,}7$; тут же дано распределение давления вдоль оси этого сопла, найденное экспериментально. Сравнение с рис. 61 подтверждает, что здесь удалось избежать появления скачка и связанного с ним искажения потока.

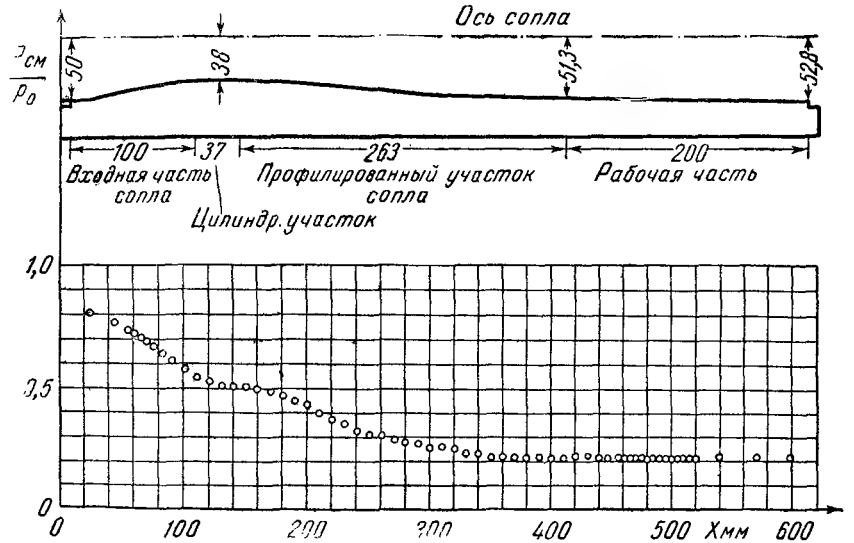

Рис. 64.

Наличие плоской поверхности перехода обеспечило «безударность» сопла. Однако условие, что линия перехода — прямая, является достаточным, но не необходимым для возможности непрерывности движения. Как показал Франкль [1]), можно использовать непосредственно уравнения Чаплыгина для построения входной части безударного сопла. При этом линия перехода будет, вообще говоря, криволинейной. Франкль показывает, как можно продолжить ряды типа рядов Чаплыгина (§ 16) в сверхзвуковую зону, и находит условия, достаточные для того, чтобы решение оказалось безударным. Главная трудность заключается в том, что функция тока ψ, которая по Чаплыгину отыскивается как функция β и v, оказывается неоднозначной функцией этих переменных в сверхзвуковой области, прилегающей

[1]) Франкль Ф. И., К теории сопел Лаваля, Изв. АН СССР, серия матем., 9, 1945.

к линии перехода. Остановимся несколько на выяснении этого обстоятельства. Способ изложения, более простой, чем у Франкля, был дан позже Фальковичем[1]). Мы будем придерживаться именно этого способа.

Уравнения Чаплыгина берём в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = v\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\mathbf{M}^2-1}{v}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}.$$

Примем за независимые переменные φ и ψ, а за искомые функции v и β. Получим

$$\frac{\rho}{\rho_0}\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial\psi} = \frac{\partial\beta}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\rho_0}{\rho}\frac{1-\mathbf{M}^2}{v}\frac{\partial v}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\beta}{\partial\psi}. \tag{21.10}$$

Вместе с Франклем введём теперь вместо v величину $\eta = \eta(\bar{v})$ из равенства

$$\eta = \left(\frac{3}{2}\int_{\bar{v}}^{1}\frac{\sqrt{1-\mathbf{M}^2}}{\bar{v}}\,d\bar{v}\right)^{2/3}. \tag{21.11}$$

Величина эта будет действительной как при $\mathbf{M} < 1$, так и при $\mathbf{M} > 1$, причём при $\bar{v} < 1$ $\eta > 0$ и при $\bar{v} > 1$ $\eta < 0$.

Совершенно элементарные преобразования дадут нам тогда

$$\frac{\partial\eta}{\partial\psi} + \frac{\rho_0}{\rho}\sqrt{\frac{1-\mathbf{M}^2}{\eta}}\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} = 0, \tag{21.12}$$

$$\eta\frac{\rho_0}{\rho}\sqrt{\frac{1-\mathbf{M}^2}{\eta}}\frac{\partial\eta}{\partial\varphi} - \frac{\partial\beta}{\partial\psi} = 0, \tag{21.13}$$

и, если обозначим

$$b(\eta) = \frac{\rho_0}{\rho}\sqrt{\frac{1-\mathbf{M}^2}{\eta}}, \tag{21.14}$$

получим окончательно

$$0 = \frac{\partial\eta}{\partial\psi} + b(\eta)\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}, \tag{21.15}$$

$$0 = \eta\frac{\partial\eta}{\partial\varphi} - \frac{1}{b(\eta)}\frac{\partial\beta}{\partial\psi}. \tag{21.16}$$

Такая форма уравнений удобна при анализе перехода через скорость звука. Функция $b(\eta)$ может быть представлена около $\eta = 0$ (т. е. около $\bar{v} = 1$) в виде ряда по степеням η:

$$b(\eta) = b(0) + \frac{b'(0)}{1!}\eta + \ldots$$

---

[1]) Фалькович С. В., К теории сопла Лаваля, ПММ, 1946.

По (21.14) при $\eta = 0$ мы имеем неопределённость, которая легко раскрывается. Действительно, подсчитаем, например,

$$b^3(0) = \lim_{\bar v \to 1} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\sqrt{\frac{1-\mathbf{M}^2}{\eta}}\right)^3 = \left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right)^3 \lim_{\bar v \to 1}\left(\frac{1-\mathbf{M}^2}{\eta}\right)^{3/2}.$$

Так как по (8.9)

$$\lim_{\bar v \to 1} \frac{d(1-\mathbf{M}^2)^{3/2}}{d\bar v} = -\frac{3}{2}(\varkappa+1)\lim_{\bar v \to 1}\sqrt{1-\mathbf{M}^2}$$

и по (21.11)

$$\lim_{\bar v \to 1}\frac{d}{d\bar v}\eta^{3/2} = -\lim_{\bar v \to 1}\frac{3}{2}\left(\sqrt{1-\mathbf{M}^2}\right),$$

то

$$b(0) = \frac{\rho_0}{\rho_*}(\varkappa+1)^{1/3} = \left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{1/\varkappa-1}(\varkappa+1)^{1/3}. \qquad (21.17)$$

Чтобы выяснить поведение решения около линии перехода ($\eta = 0$), заменим в уравнениях (21.15), (21.16) член $b(\eta)$ на $b(0)$. Мы получим при этом главные члены ряда, представляющего точное решение[1]). Теперь (21.15) и (21.16) примут вид:

$$\frac{\partial\eta}{\partial\psi} + b(0)\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} = 0; \quad \eta\frac{\partial\eta}{\partial\varphi} - \frac{1}{b(0)}\frac{\partial\beta}{\partial\psi} = 0. \qquad (21.18)$$

Пусть ось симметрии сопла есть линия $\psi = 0$. Тогда $\beta(\varphi, 0) = 0$. Кроме того, $\eta(\varphi, \psi) = \eta(\varphi, -\psi)$; $\beta(\varphi, \psi) = -\beta(\varphi, -\psi)$. Таким образом, β содержит лишь нечётные степени ψ, а η — лишь чётные.

Частные, точные решения системы уравнений (21.18) будут полиномы (а не ряды):

$$\beta = \frac{1}{b(0)^3}\left[A^2\varphi\psi - \frac{A^3}{6}\psi^3\right]; \quad \eta = \frac{1}{b(0)^2}\left[A\varphi - \frac{A^2}{2}\psi^2\right], \qquad (21.19)$$

где A — произвольная постоянная. Смысл этой последней легко установить. Действительно, из (21.19)

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}\right)_{\psi=0} = \frac{A}{b(0)^2};$$

с другой стороны,

$$\frac{\partial\eta}{\partial\varphi} = \frac{\partial\eta}{\partial\bar v}\frac{\partial\bar v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\frac{\sqrt{1-\mathbf{M}^2}}{\bar v\sqrt{\eta}}\frac{\partial\bar v}{\partial x}\frac{\cos\beta}{\bar v},$$

так что, полагая $\psi = \varphi = 0$ (точка пересечения линии перехода с осью сопла), получим

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=\psi=0} = -\frac{(\varkappa+1)^{1/3}}{a_*^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{x=y=0}$$

[1]) Строго это следует из упомянутой работы Франкля.

(мы совмещаем начало координат в плоскости (x, y) с точкой $\varphi=\psi=0$) Итак,

$$A = -b(0)^2 \frac{(\varkappa+1)^{1/3}}{a_*^2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{x=y=0}. \qquad (21.20)$$

Ось Ox направлена в сторону сверхзвуковых скоростей, так что $(\partial v_x/\partial x)_{x=y=0} > 0$ и

$$A < 0.$$

Полиномы (21.19) годятся, конечно, лишь в небольшом удалении от линии перехода $\eta = 0$, но зато для всей области движения. Посмотрим, как в плоскости (φ, ψ) представятся переходная линия и характеристики. На переходной линии по (21.19) будет $(\eta = 0)$:

$$\varphi = \frac{A}{2}\psi^2.$$

Вдоль характеристик, проходящих через точку $\beta = 0$, $\bar{v} = 1$, имеем (10.6):

$$\pm\beta = \zeta(\bar{v}), \quad \text{где} \quad \zeta(\bar{v}) = \int_1^{\bar{v}} \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\bar{v}}\, d\bar{v}.$$

Но так как $\sin\alpha = \frac{1}{M}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{M^2-1}$, то, привлекая (21.11), найдём без труда:

$$\zeta(\bar{v}) = \frac{2}{3}(-\eta)^{3/2} \qquad (21.21)$$

($\eta < 0$ при $\bar{v} > 1$). Таким образом, вдоль характеристик, проходящих через точку $x = y = 0$, будет

$$\beta = \pm\frac{2}{3}(-\eta)^{3/2} \qquad (21.22)$$

(в плоскости β, η характеристики — полукубические параболы).

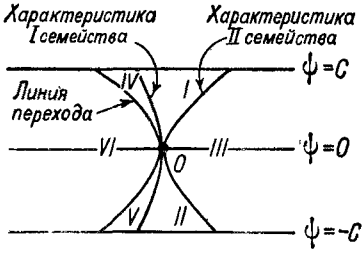

Рис. 65.

Вставляя в (21.22) β и η из (21.19), получим для характеристик 1-го семейства:

$$\varphi = \frac{A}{4}\psi^2 \qquad (21.23)$$

и для характеристик 2-го семейства

$$\varphi = -\frac{A}{2}\psi^2. \qquad (21.24)$$

На рис. 65 схематически даны в плоскости (φ, ψ) стенки сопла, линия перехода и обе характеристики.

Линия перехода и обе характеристики, выходящие из точки O, делят всю полосу плоскости (φ, ψ), отвечающую решению, на шесть областей. Области эти пронумерованы на рисунке римскими цифрами I — VI, так что, например, во всей области VI мы имеем дозвуковые скорости.

Посмотрим теперь, будет ли ψ всюду однозначной функцией от β и η. С этой целью исключим φ из уравнения (21.19). Получим:

$$A^3\psi^3 + 3Ab^2(0)\eta\psi - 3b^3(0)\beta = 0. \tag{21.25}$$

Относительно ψ это — кубическое уравнение. Оно будет иметь только один вещественный корень, если

$$\frac{9}{4}\beta^2 + \eta^3 > 0. \tag{21.26}$$

Таким образом, в дозвуковой области, в области VI, где $\eta > 0$, однозначность функции ψ, а значит и φ, обеспечена. Далее, (21.26) сохраняется и при $\eta < 0$ до тех пор, пока не будет

$$\frac{9}{4}\beta^2 + \eta^3 = 0.$$

Следовательно, однозначность будет иметь место ещё и в областях IV и V. Итак, в областях IV, V, VI мы можем написать

$$\frac{A\psi}{b(0)} = \sqrt[3]{\frac{3\beta}{2} + \sqrt{\frac{9\beta^2}{4} + \eta^3}} + \sqrt[3]{\frac{3\beta}{2} - \sqrt{\frac{9\beta^2}{4} + \eta^3}}. \tag{21.27}$$

В частности, на переходной линии, где $\eta = 0$:

$$\frac{A\psi}{b(0)} = \sqrt[3]{3\beta}, \quad \text{причём} \quad \frac{A}{b(0)}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \frac{1}{\sqrt[3]{3\beta}}. \tag{21.28}$$

Отметим, что аналитическое решение, которое мы приводили в начале этого параграфа, давало при $\eta = 0$, как показывает простой подсчёт, те же ψ и $\partial\psi/\partial\bar{v}$, что получаются по (21.28). Решение в областях I, II, III изобразится в виде складчатой поверхности. Интересно отметить, что мы можем расширить наше решение, предполагая, что в области IV (а значит, и V и VI) мы имеем (21.19), в которых $A = A_1$, а в области III имеем (21.19), но с $A = A_2 \neq A_1$ (скачок производной $\partial\bar{v}_x/\partial x$ скорости в точке O). Оба эти решения могут быть «склеены» при помощи переходных областей I, II следующим образом. В областях I, II ищем решение (21.18) в виде

$$\eta = f\left(\frac{\varphi}{\psi^2}\right)\psi^2; \quad \beta = F\left(\frac{\varphi}{\psi^2}\right)\psi^3.$$

Тогда первое из уравнений (21.18) даст

$$2f - 2t\frac{df}{dt} + b(0)\frac{dF}{dt} = 0,$$

где $t = \varphi/\psi^2$, а второе приведёт к соотношению

$$b(0) f \frac{df}{dt} - 3F + 2t \frac{dF}{dt} = 0.$$

Исключая отсюда F, мы придём к одному уравнению

$$(b^2 f + 4t^2) f'' + b^2 f'^2 - 2(tf' - f) = 0.$$

Уравнение это можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{b^2(0) f' + 2t}{2tf' - f} = 0.$$

Таким образом, мы можем написать

$$b^2(0) f' - \frac{b^2(0)}{2(t - c_1)} f = \frac{2c_1 t}{t - c_1},$$

где c_1 — произвольная постоянная. Это уравнение сразу интегрируется и даёт:

$$b^2(0) f = 4c_1 t - 8c_1^2 + c_2 \sqrt{t - c_1},$$

где c_2 — вторая произвольная постоянная. Постоянные c_1 и c_2 мы должны теперь подобрать так, чтобы при $t = A_1/4$ (характеристика, отделяющая область I от области IV) было $f = -A_1^2/4$ и при $t = -A_2/2$ (характеристика, отделяющая I от III) было $f = -A_2^2$.

Итак, мы исследовали поведение главной части частных решений (21.19) системы (21.15), (21.16) в сверхзвуковой области, примыкающей к линии перехода. Эти частные решения будут аналитическими (величина ψ и производная $\partial\psi/\partial\bar{v}$, если их получить из (21.28), в точности совпадут со значениями ψ и $\partial\psi/\partial\bar{v}$, построенными из аналитического решения Мейера, данного в начале этого параграфа. Опасность появления скачков может возникнуть в случае склеивания решений, отвечающих $A = A_1$ и $A = A_2$, но здесь могут быть даны неравенства, связывающие A_1 и A_2, выполнение которых достаточно для безударности решения [1]). Чтобы построить входную (дозвуковую) часть сопла, Франкль предлагает теперь использовать ряды типа рядов Чаплыгина, следующего вида:

$$\psi = -\beta - A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_{nc}(\tau)}{z_{nc}(\tau^*)} \frac{\sin 2nc\beta}{n^{4/3}}, \qquad (21.29)$$

где A и c — постоянные.

Детальный анализ, за которым мы отсылаем к статье Франкля, показывает, что на окружности $\tau = \tau^*$ будет:

$$\psi = k \sqrt[3]{3\beta} + 0(\beta), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \frac{k}{\sqrt[3]{3\beta}} + 0(\sqrt[3]{\beta}),$$

[1]) См. упомянутые выше работы Франкля и Фальковича.

где постоянная k определяется через c и A. Сравнивая это с (21.28), замечаем, что главные члены ψ и $\partial\psi/\partial\eta$ совпадают с главными членами нашего частного решения, построенного для сверхзвуковой области. Франкль устанавливает, что ряд (21.29) годится для сколь угодно далёкого расстояния от критического сечения в глубь дозвуковой области. Мы можем теперь построить сопло следующим образом. В дозвуковой части использовать ряд типа (21.29), вблизи линии перехода использовать решение вида (21.19); начиная с некоторого расстояния от линии перехода, в сверхзвуковой области, применить графический метод, изложенный в § 12. Параметры A, c, а также наклон стенок в дозвуковой области на большом расстоянии от линии перехода могут быть использованы для приспособления к заданным техническим условиям.

Как показал Франкль в другой работе [1]), ряды Чаплыгина можно использовать при решении задачи о струе, вытекающей в пространство, в котором давление будет меньше критического.

В § 16 мы видели, как происходит истечение струи, если

$$1 > \frac{p_1}{p_0} > \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\varkappa/(\varkappa-1)}$$

(p_1 — давление во внешнем пространстве, p_0 — давление внутри сосуда там, где газ покоится). Посмотрим теперь, что будет в том случае, когда

$$\frac{p_1}{p_0} < \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\varkappa/(\varkappa-1)}.$$

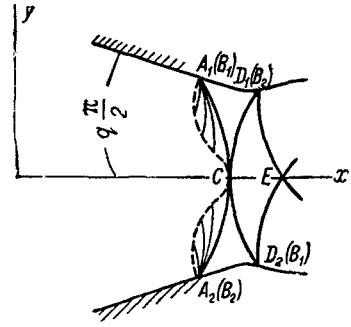

Рис. 66.

Имеем сосуд с симметрично расположенными стенками, угол между которыми равен $q\pi$ (при $q=1$ стенки будут служить одна продолжением другой) (рис. 66). Через отверстие сосуда A_1A_2 газ вырывается во внешнее пространство. Следуя Чаплыгину, будем искать функцию тока и потенциал скоростей в зависимости от величины и направления скорости. Вместо уравнений (16.12) теперь удобнее будет взять уравнение (17.35):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\beta}} = -\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\alpha}}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\alpha}} = K\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\beta}}, \tag{21.30}$$

где σ и K зависят только от $\bar{v}$:

$$\sigma = \int_{\bar{v}}^{1} \frac{\rho}{\rho_0}\frac{d\bar{v}}{\bar{v}}, \quad K = \frac{1-\bar{v}^2}{\left(1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\bar{v}^2\right)^{h^2}}, \quad \left(h^2 = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\right). \tag{21.31}$$

[1]) Франкль Ф. И., О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений, Изв. АН СССР, серия матем., 9, 1945.

Исключая из этих уравнений φ, получим для ψ:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}+K\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}=0. \tag{21.32}$$

Уравнение будет эллиптического типа, когда $\sigma>0$ ($\bar{v}<1$, $K>0$), и гиперболического при $\sigma<0$ ($\bar{v}>1$, $K<0$).

Посмотрим теперь, для каких границ и при каких граничных условиях мы должны решать уравнение (21.32) нашей задачи. Обратимся к плоскости скоростей и отметим в этой плоскости направления скоростей, отвечающие стенкам сосуда (рис. 67). Эти направления продолжим до пересечения с кругом критической скорости.

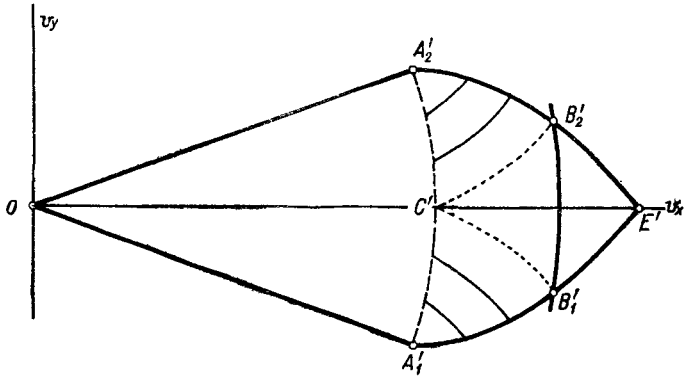

Рис. 67.

Назовём точки пересечения A_1' и A_2'. Проведём теперь из точки A_2' эпициклонду 2-го семейства, из точки C' ($v_x=a_*$, $v_y=0$) — обе эпициклоиды (изображены пунктиром) и из точки A_1' — эпициклоиду 1-го семейства. Пусть эпициклоиды пересекутся в точках B_1' и B_2'. Вследствие предположенного симметричного расположения стенок точки B_1' и B_2' лягут симметрично относительно оси Ox на одну окружность.

Исследуем сперва частный случай. Именно, пусть давление p_1 во внешнем пространстве в точности равно тому давлению, которое по уравнению Бернулли отвечает кругу $B_2'B_1'$. Такое давление, мы назовём его p_B, есть функция одного только q.

По Франклю, картина движения теперь будет следующей. Точка A_1 плоскости (x, y) отвечает точке A_1' в плоскости (v_x, v_y); точка A_2 отвечает точке A_2'. Таким образом линия перехода проходит через края выходного отверстия (пунктир на рис. 66). Далее, отрезку эпициклоиды $A_1'B_1'$ отвечает в плоскости (x, y) одна точка A_1, отре-

зок эпициклоиды $A_2'B_2'$ стягивается в одну точку A_2. Эпициклоидам второго семейства в криволинейном треугольнике $C'A_1'B_1'$ отвечает пучок характеристик, выходящих из A_1, а характеристики первого семейства в $C'A_2'B_2'$ изображаются пучком характеристик, идущих из A_2. Так как радиусу-вектору $\overline{OA_1'}$ отвечает вся верхняя стенка сосуда, а радиусу-вектору $\overline{OC'}$ — ось симметрии сосуда, то четырёхугольник $OA_1'B_1'C'$ отобразится на верхнюю часть области дозвуковых скоростей и на область, заключённую между верхней частью $\widetilde{AC}$ переходной линии и характеристикой $\widetilde{A_1C}$ (двууголь ник A_1C переходит в треугольник $A_1'B_1'C'$). Таким образом в четырёхугольнике $OA_1'B_1'C'$ мы должны решить уравнение (21.32), удовлетворяя краевым условиям [1]):

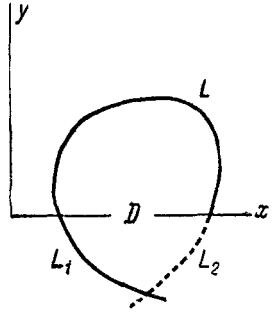

Рис. 68.

$$\left.\begin{aligned} &\psi = \frac{Q}{2} \text{ на } OA_1'B_1', \\ &\psi = 0 \text{ на } OC'. \end{aligned}\right\} \qquad (21.33)$$

Аналогичным образом область $OA_2'B_2'C'$ отобразится на нижнюю часть дозвуковой области и на двууголь ник CA_2, причём мы должны решить здесь (21.32) при краевых условиях

$$\left.\begin{aligned} &\psi = -\frac{Q}{2} \text{ на } OA_2'B_2', \\ &\psi = 0 \text{ на } OC'. \end{aligned}\right\} \qquad (21.34)$$

---

[1]) Значение ψ на характеристике $C'B_1'$ мы найдём при этом в конце решения задачи. Задавать эти значения заранее мы не можем. Дело в том, что мы имеем здесь дело с обобщённой задачей Трикоми. Последняя заключается в следующем. Имеем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \text{где} \quad z = z(x, y),$$

которое меняет тип из эллиптического на гиперболический, когда мы попадаем из верхней полуплоскости (x, y) в нижнюю. Рассмотрим область D, ограниченную кривой L, лежащей в эллиптической области (с концами на оси OX), и характеристиками L_1 и L_2 разных семейств, исходящими из концов L (рис. 68). Пусть заданы значения z на кривых L и L_1 (но не на L_2). Трикоми доказал существование и единственность решения этой задачи. Наше уравнение (21.32) является обобщением уравнения Трикоми (вместо σ мы имеем $K(\sigma)$, положительное при $\sigma > 0$ и отрицательное при $\sigma < 0$). Задание ψ на прямых $\overline{OA_1'}$ и $\overline{OC'}$ будет отвечать заданию z на L, а заданне ψ на $A_1'B_1'$ отвечает заданию z на L_1. Доказательство однозначности решений (21.32) имеется у Франкля.

Предположим, что нам удалось найти решения поставленных здесь задач. Это значит, в частности, что нам удалось найти движение и на характеристиках A_1C и A_2C. Но тогда мы будем знать скорости на характеристике A_1C (и A_2C), а нам, кроме того, известно, что $A_1(A_2)$ лежит на свободной поверхности, и мы можем, поскольку мы находимся уже в сверхзвуковой области, применить хотя бы метод, изложенный в § 12 (задача 4), и найти вид свободной поверхности $\overset{\frown}{A_1D_1}(\overset{\frown}{A_2D_2})$ и движение внутри треугольника $A_1CD_1(A_2CD_2)$, где $\overset{\frown}{CD_1}(\overset{\frown}{CD_2})$ — вторая характеристика, выходящая из C (рис. 66). Заметим, что линии $\overset{\frown}{CD_1}(\overset{\frown}{CD_2})$ отвечает в плоскости (v_x, v_y) характеристика $\overset{\frown}{C'B_2'}(\overset{\frown}{C'B_1'})$. Мы можем теперь решить задачу 2 (§ 12), ибо на характеристиках CD_1 и CD_2 скорости будут известны, и найти движение внутри криволинейного четырёхугольника CD_1ED_2 (точке E будет отвечать точка E' плоскости (v_x, v_y), лежащая на пересечении крайних эпициклоид). Далее, определим (задача IV) свободные поверхности, идущие от точек D_1, D_2 и т. д. Задача будет решена.

Прежде чем сказать о том, как же конкретно решается уравнение (21.32) при условиях (21.33) и (21.34), посмотрим, что получится, когда $p_1 \neq p_B$.

Пусть сперва

$$p_1 < p_B.$$

Проведём в плоскости (v_x, v_y) дугу круга с центром в начале координат и с радиусом, отвечающим давлению $p_1 (< p_B)$ (рис. 69), а также эпициклоиды второго (первого) семейства, выходящие из $A_2'(A_1')$,

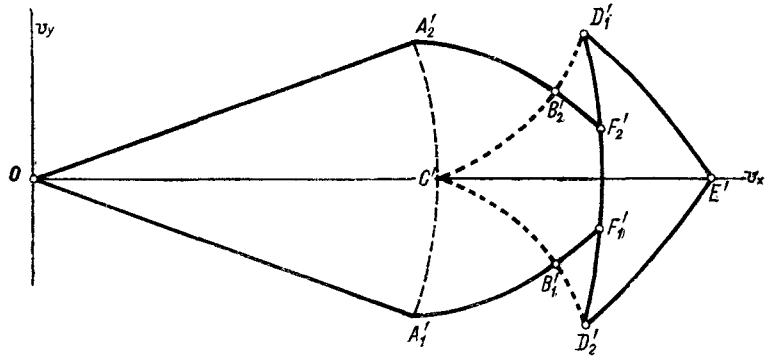

Рис. 69.

и обе эпициклоиды, выходящие из C'. Отметим пересечение всех наших четырёх эпициклоид с кругом, отвечающим давлению p_1 (точки D_2', F_1', F_2', D_1'). Треугольнику A_1CD_1 теперь будет в плоскости (v_x, v_y)

отвечать четырёхугольник $B_1'F_1'D_1'C'$. Аналогично этому, треугольнику A_2CD_2 отвечает в плоскости (v_x, v_y) четырёхугольник $B_2'F_2'D_2'C'$. Далее, криволинейный четырёхугольник $C'D_1'E'D_2'$ плоскости (v_x, v_y) ($\overset{\frown}{D_1'E'}$ и $\overset{\frown}{D_2'E'}$ — дуги эпициклоид) отвечает в плоскости (x, y) фигуре, образованной характеристиками $\overset{\frown}{CD_1}$, $\overset{\frown}{D_1E}$, $\overset{\frown}{D_2E}$, $\overset{\frown}{CD_2}$ и т. д.

Таким образом и здесь всё сводится к решению (21.32) при условиях (21.33), (21.34) для областей $OA_2'B_2'C'$ и $OA_1'B_1'C'$. Отметим, что эти последние области будут в точности теми же, что и области в случае, когда $p_1 = p_B$. Таким образом, течение внутри сосуда полностью определяется решением (21.32) и не зависит от величины давления во внешнем пространстве, если только $p_1 \leqslant p_B$.

Наконец, в том случае, когда $p_0 > p_1 > p_B$, мы должны рассмотреть в плоскости (v_x, v_y) картину, представленную на рис. 70.

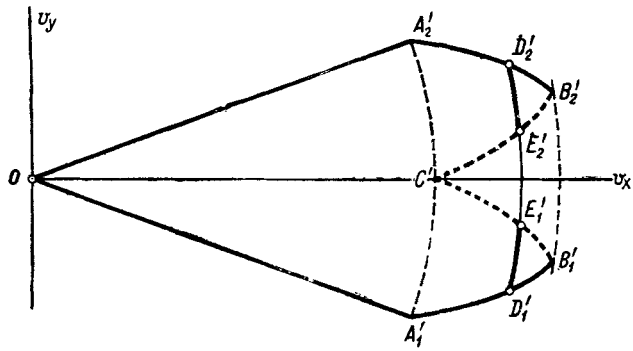

Рис. 70.

Здесь мы должны решить уравнение (21.32) для области $OA_1'D_1'E_1'C'$ при краевых условиях

$$\psi = \frac{Q}{2} \text{ вдоль } OA_1'D_1'E_1',$$

$$\psi = 0 \text{ вдоль } OC'.$$

Также надо решить (21.32) для области $OA_2'D_2'E_2'C'$ при краевых условиях

$$\psi = -\frac{Q}{2} \text{ вдоль } OA_2'D_2'E_2',$$

$$\psi = 0 \text{ вдоль } OC'.$$

Коль скоро решения эти получены и мы выходим в сверхзвуковую область, мы можем далее вновь применить методы, изложенные в § 12.

Нам остаётся только сказать, как конкретно ищется решение уравнения (21.32) в смешанных (до- и сверхзвуковых) областях, участвующих в наших задачах. Как мы уже упомянули, Франкль предлагает искать эти решения в виде рядов типа рядов Чаплыгина. Рассмотрим для конкретности решение (21.32) для области $OA_1'B_1'C'$ (рис. 67 и рис. 69). Будем искать ψ в виде

$$\psi = Q\frac{\beta}{q\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\zeta_n(\sigma)}{\zeta_n(0)} \sin\frac{2n\beta}{q}, \tag{21.35}$$

где

$$\zeta_n(\sigma) = z_n(\tau),$$

a_n — постоянные коэффициенты, пока неопределённые, но такие, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится. Краевые условия на прямых OC' и OA_1' удовлетворятся при этом сами собой. Сходимость ряда в дозвуковой области (треугольник $OA_1'C'$) обеспечивается на основании результатов Чаплыгина. Франкль показывает [1]), что при непрерывном изменении данных Коши на переходной линии решение задачи типа нашей, в соответствующем характеристическом треугольнике, меняется непрерывно. Отсюда можно заключить, что (21.35) может представлять решение не только внутри круга $\bar{v} = 1$, но и внутри характеристического треугольника. Неопределённые до этого коэффициенты a_n надо найти, удовлетворяя краевому условию на характеристике $A_1'B_1'$. Именно, должно быть

$$Q\frac{\beta}{q\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\zeta_n(\sigma(\beta))}{\zeta_n(0)} \sin\frac{2n\beta}{q} = \frac{Q}{2}, \tag{21.36}$$

где $\sigma(\beta)$ есть результат представления σ через β из уравнения эпициклоиды $\overset{\frown}{A_1'B_1'}$. Путём переразложения наших функций от β в ряды и сравнения коэффициентов мы получим теперь бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения a_n. Практически достаточно будет сохранить конечное число членов ряда для a_n, требуя выполнения равенства (21.36) для конечного числа заранее выбранных значений β.

§ 22. Численные методы решения плоских задач газовой динамики. Расчёт сверхзвукового обтекания кругового цилиндра. С появлением электронных быстродействующих вычислительных

[1]) Франкль Ф. И., loc. cit. См. также Франкль Ф. И., О задачах Коши для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с начальными условиями на переходной линии. Изв. АН СССР, серия матем., 8, 1944.

машин стало практически возможным получение, с нужной степенью точности, решения наиболее трудных задач газовой динамики. В качестве примера применения соответствующих численных методов рассмотрим расчёт обтекания сверхзвуковым потоком (со скоростью v_∞) кругового цилиндра S (рис. 71). От цилиндра отходит ударная волна Σ, после прохождения которой поток становится вихревым и смешанным. Требуется найти форму ударной волны, её положение и движение между ударной волной и цилиндром вплоть до не известной заранее линии перехода через скорость звука и далее. Изложим здесь схему численного решения этой задачи, разработанную (и применённую к расчётам) О. М. Белоцерковским на основании метода А. А. Дородницына [1]). Этот последний метод сводит задачу интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных к решению некоторой аппроксимирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

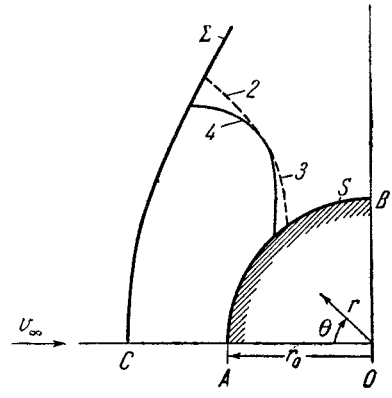

Рис. 71.

Прежде чем излагать схему численного решения, запишем уравнения плоской вихревой стационарной задачи в полярных координатах (r, θ); такая система естественна для рассматриваемой задачи обтекания круга.

Уравнения движения примут вид

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{22.1}$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} \tag{22.2}$$

(v_r, v_θ — составляющие скорости по осям r и θ соответственно).

Уравнение неразрывности запишем в виде:

$$\frac{\partial r\rho v_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial \theta} = 0. \tag{22.3}$$

---

[1]) Дородницын А. А., Об одном методе численного решения некоторых задач аэродинамики, Труды III Всесоюзного матем. съезда, Изд. АН СССР **2** (1956), **3** (1958).

Белоцерковский О. М., Обтекание произвольного профиля с отошедшей ударной волной, ПММ, т. XXII, вып. 2, 1958; Расчёт обтекания кругового цилиндра с отошедшей ударной волной, Вычислит. математика, № 3, 1958.

Может быть введена функция тока $\psi(r, \theta)$ такая, что

$$r\rho v_r = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \rho v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{22.4}$$

Условие адиабатичности запишется в виде:

$$v_r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} = 0, \tag{22.5}$$

где, как и прежде, $\vartheta = p^{1/\varkappa}\rho^{-1}$. Комбинируя (22.4) и (22.5), заключаем, что ϑ зависит только от ψ:

$$\frac{1}{\rho} p^{1/\varkappa} = \vartheta(\psi). \tag{22.6}$$

Уравнение Бернулли, получающееся путем комбинации (22.1), (22.2) и (22.4), запишется, как в любом плоском случае, в виде:

$$\frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2} + \frac{\varkappa \vartheta^\varkappa}{\varkappa - 1} p^{\frac{(\varkappa-1)}{\varkappa}} = \frac{v_{\max}^2}{2}, \tag{22.7}$$

где, как и прежде (§ 8, стр. 42) $v_{\max}^2 = (\varkappa+1)/(\varkappa-1)\, a_*^2$ (a_* — критическая скорость, не меняющаяся при переходе через поверхность разрыва и потому постоянная как для вихревого, так и для безвихревого движения).

Умножая (22.1) на ρr и используя уравнение неразрывности (22.3), получим без труда

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho v_r^2 + pr\right) + \frac{\partial \rho v_\theta v_r}{\partial \theta} = v_\theta^2 \rho + p. \tag{22.8}$$

Определяя из уравнения Бернулли (22.7) плотность через v и ϑ и вводя её в уравнение неразрывности (22.3), получим

$$\frac{\partial}{\partial r}(r v_r \tau) + \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \tau) = 0, \tag{22.9}$$

где

$$\tau = \left(1 - \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}.$$

Наконец, используя (22.4), получим для изменения ψ вдоль какой-то линии $r = R(\theta)$ соотношение

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \rho\left(v_\theta \frac{dR}{d\theta} - r v_r\right). \tag{22.10}$$

Неизвестными функциями являются здесь v_r, v_θ, ψ и ϑ. Давление p и плотность ρ находятся из соотношений (22.6) и (22.7) через v_r, v_θ, ϑ. Вводя давление p_0 и плотность ρ_0 адиабатического затормо-

жённого (в невозмущённой среде) потока и потенциальную температуру ϑ_0 до скачка, можем написать

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left(1-\frac{v_r^2+v_\theta^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\tau^{\varkappa}, \quad (22.11)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left(1-\frac{v_r^2+v_\theta^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\tau. \quad (22.12)$$

Запишем теперь краевые условия задачи на поверхности разрыва Σ и на обтекаемом цилиндре S.

Выразим v_r, v_θ, ψ и ϑ сразу после прохождения поверхности разрыва через угол наклона φ нормали к поверхности разрыва к оси X. Из уравнений (7.16) и (7.17) имеем для v_x и v_y (составляющие скорости по оси X и ей перпендикулярной)

$$v_x=v_\infty\left(1+\frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_\infty^2}{v_\infty^2}-\frac{2}{\varkappa+1}\cos^2\varphi\right), \quad (22.13)$$

$$v_y=v_\infty\frac{2}{\varkappa+1}\operatorname{tg}\varphi\left(\frac{a_\infty^2}{v_\infty^2}-\cos^2\varphi\right), \quad (22.14)$$

где a_∞ — скорость звука, связанная со скоростью набегающего потока v_∞ и максимальной скоростью $v_{\max}$ соотношением

$$\frac{v_\infty^2}{2}+\frac{a_\infty^2}{\varkappa-1}=\frac{1}{2}v_{\max}^2,$$

так что

$$\left(\frac{a_\infty}{v_\infty}\right)^2=\frac{\varkappa-1}{2}\left(\frac{v_{\max}^2}{v_\infty^2}-1\right).$$

Сочетая (22.13), (22.14) с очевидными соотношениями

$$\left.\begin{aligned} v_r&=v_y\sin\theta-v_x\cos\theta,\\ v_\theta&=v_x\sin\theta+v_y\cos\theta,\end{aligned}\right\} \quad (22.15)$$

получим выражение через φ значений v_r и v_θ сразу же после перехода через поверхность разрыва.

Функция ψ не претерпевает скачка после прохождения разрыва. До прохождения разрыва мы имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\rho_\infty v_\infty\sin\theta=\rho_0\left(1-\frac{v_\infty^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}v_\infty\sin\theta.$$

Следовательно, на поверхности разрыва

$$\psi = \rho_0 \left(1 - \frac{v_\infty^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} v_\infty r \sin\theta. \tag{22.16}$$

При этом, если поверхность Σ имеет уравнение

$$r = r_0 + e(\theta), \tag{22.17}$$

где r_0 — радиус обтекаемого цилиндра S, то r и θ на поверхности Σ будут связаны очевидным геометрическим соотношением $\left(\frac{dx}{dy} = -\operatorname{tg}\varphi\right)$:

$$\frac{de}{d\theta} = -(r_0 + e)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \theta\right). \tag{22.18}$$

Наконец, для определения значений ϑ после прохождения разрыва получим, воспользовавшись формулой (7.10):

$$\vartheta^\varkappa = \frac{p}{\rho^\varkappa}; \quad \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^\varkappa = \frac{p}{p_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^\varkappa = \frac{p}{p_\infty}\left(\frac{\rho_\infty}{\rho}\right)^\varkappa:$$

$$\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^\varkappa = \left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)^\varkappa \left(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\frac{v_\infty^2}{a_\infty^2}\cos^2\varphi - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)\left(1 + 2\frac{a_\infty^2}{v_\infty^2}\frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{\varkappa-1}\right)^\varkappa. \tag{22.19}$$

Остаётся записать краевые условия на обтекаемом цилиндре. Здесь имеем, очевидно,

$$\text{при } r = r_0 \quad v_r = 0 \quad \psi = 0. \tag{22.20}$$

При этом, так как S является линией тока, то вдоль $r = r_0$ величина ϑ должна сохранять постоянное значение, которое можно получить из (22.19), полагая там $\varphi = 0$. Таким образом,

$$\text{при } r = r_0\text{: } \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^\varkappa = \left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)^\varkappa \left(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\frac{v_\infty^2}{a_\infty^2} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)\left(1 + \frac{2}{\varkappa-1}\frac{a_\infty^2}{v_\infty^2}\right)^\varkappa. \tag{22.21}$$

Теперь, когда записаны дифференциальные уравнения и краевые условия задачи, перейдём к описанию аппроксимирующей системы, разработанной и применённой к расчётам О. М. Белоцерковским на основе метода интегральных соотношений, развитого А. А. Дородницыным.

Разобьём всю область между цилиндром S и поверхностью разрыва Σ на N полосок, проводя $N-1$ кривую с уравнениями:

$$r = r_i(\theta) = r_0 + \frac{i}{N}e(\theta), \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{22.22}$$

Линии эти отстоят друг от друга на равные расстояния $e(\theta)/N$ (имеется в виду расстояние по r при закрепленном θ). Индекс $i=N$ отвечает линии разрыва Σ; индекс $i=1$ отвечает первой, наиболее близкой к цилиндру S, линии и т. д.

В дальнейшем будем обозначать все величины на i-й промежуточной линии индексом i, на ударной волне — индексом Σ (или N), на поверхности цилиндра — индексом S.

Обратимся теперь к уравнению (22.8) и проинтегрируем обе его части по r вдоль произвольного луча $\theta=\text{const}$. от поверхности тела $r=r_0$ до границы каждой из полученных нами полос. Получим N соотношений (по числу полос) вида

$$(r\rho v_r^2+pr)_i-(r\rho v_r^2+pr)_S+\int\limits_{r_0}^{r_i(\theta)}\frac{\partial(\rho v_\theta v_r)}{\partial\theta}\,dr=\int\limits_{r_0}^{r_i(\theta)}(v_\theta^2\rho+p)\,dr;$$

далее, вынося дифференцирование по θ за знак интеграла (слева) и принимая во внимание определение (22.22) функции $r_i(\theta)$, запишем:

$$\frac{d}{d\theta}\int\limits_{r_0}^{r_i(\theta)}(\rho v_\theta v_r)\,dr-\frac{i}{N}(\rho v_\theta v_r)_i\frac{de}{d\theta}+(r\rho v_r^2+pr)_i-(pr)_S=$$

$$=\int\limits_{r_0}^{r_i(\theta)}(v_\theta^2\rho+p)\,dr,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{22.23}$$

$$((v_r)_S=0).$$

Аналогичным образом получим из уравнения (22.9):

$$\frac{d}{d\theta}\int\limits_{r_0}^{r_i(\theta)}v_\theta\tau\,dr-\frac{i}{N}(v_\theta\tau)_i\frac{de}{d\theta}+(rv_r\tau)_i=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N. \tag{22.24}$$

Уравнения (22.23), (22.24) содержат интегралы вида

$$\int\limits_{r_0}^{r_i(\theta)}f(r,\ \theta)\,dr.$$

Аппроксимируем теперь любую подынтегральную функцию интерполяционным полиномом по r степени N, принимая за узлы интерполяций границы полос:

$$f(r,\ \theta)=\sum_{m=0}^{N}a_m(\theta)\left[\frac{r-r_0}{e(\theta)}\right]^m, \tag{22.25}$$

Коэффициенты $a_m(\theta)$ определим так, чтобы значения $f_i(\theta) = f[r_i(\theta), \theta]$ нашей функции f на линиях $r_i(\theta)$ точно представлялись с помощью нашей интерполяционной формулы. Иначе говоря, определим a_1, a_2, ..., a_N из следующей системы N уравнений

$$\sum_{m=0}^{N} a_m \left[\frac{r_i - r_0}{e}\right]^m = f_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

или же

$$\sum_{m=0}^{N} a_m \left(\frac{i}{N}\right)^m = f_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Кроме того, заметим, что $a_0 = f_0$ (значение f при $r = r_0$). Пусть мы получим

$$a_0 = f_0, \quad a_m = b_{jm} f_0 + \sum_{j=1}^{N} b_{jm} f_j \qquad (m = 1, 2, \ldots, N). \tag{22.26}$$

Коэффициенты b_{jm}, b_{0m} могут быть рассчитаны заранее. Так, для $N = 1$ имеем

$$b_{01} = -1, \quad b_{11} = +1.$$

Для $N = 2$ имеем

$$b_{01} = -3, \; b_{11} = 4, \quad b_{21} = -1;$$
$$b_{02} = 2, \quad b_{12} = -4, \; b_{22} = 2;$$

для $N = 3$:

$$b_{01} = -\frac{11}{2}, \quad b_{11} = 9, \quad b_{21} = -\frac{9}{2}, \quad b_{31} = 1;$$
$$b_{02} = 9, \quad b_{12} = -\frac{45}{2}, \quad b_{22} = 18, \quad b_{32} = -\frac{9}{2};$$
$$b_{03} = -\frac{9}{2}, \quad b_{13} = \frac{27}{2}, \quad b_{23} = -\frac{27}{2}, \quad b_{33} = +\frac{9}{2}.$$

Ориентируясь на (22.25), мы можем теперь вычислить $\int_{r_0}^{r_i} f\,dr$. Введем обозначение:

$$\bar{f}_i(\theta) = \int_{r_0}^{r_i(\theta)} f(r, \theta)\,dr. \tag{22.27}$$

Используя представление (22.25) функции f, мы получим

$$\bar{f}_i(\theta) = \sum_{m=0}^{m} a_m(\theta) \int_{r_0}^{r_i(\theta)} \left[\frac{r - r_0}{e(\theta)}\right]^m dr = e(\theta) \sum_{m=0}^{N} \frac{a_m(\theta)}{m+1} \left[\frac{r_i - r_0}{e(\theta)}\right]^{m+1}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N)$$

или, по (22.22):

$$\bar{f}_i(\theta) = e(\theta) \sum_{m=0}^{N} \frac{a_m(\theta)}{m+1} \left(\frac{i}{N}\right)^{m+1}, \qquad (22.28)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N.$$

Достаточно будет вставить сюда вместо a_m их выражения из (22.26), и мы получим $\bar{f}_i$ (для каждого i) через линейные комбинации от значений $f_j (j = 0, 1, \ldots, N)$

$$\bar{f}_i(\theta) = e(\theta) \left(\beta_{0i} f_0 + \sum_{j=1}^{N} \beta_{ji} f_j\right) \qquad (f_N = f_\Sigma), \qquad (22.29)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N.$$

Для $N = 1$

$$\beta_{01} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{11} = \frac{1}{2}.$$

Для $N = 2$

$$\beta_{01} = \frac{5}{24}, \quad \beta_{11} = \frac{1}{3}, \quad \beta_{21} = -\frac{1}{24},$$
$$\beta_{02} = \frac{1}{6}, \quad \beta_{12} = \frac{2}{3}, \quad \beta_{22} = \frac{1}{6}.$$

Для $N = 3$

$$\beta_{01} = \frac{1}{8}, \quad \beta_{11} = \frac{19}{72}, \quad \beta_{21} = -\frac{5}{72}, \quad \beta_{31} = \frac{1}{72},$$
$$\beta_{02} = \frac{1}{9}, \quad \beta_{12} = \frac{4}{3}, \quad \beta_{22} = \frac{1}{9}, \quad \beta_{32} = 0,$$
$$\beta_{03} = \frac{1}{8}, \quad \beta_{13} = \frac{3}{8}, \quad \beta_{23} = \frac{3}{8}, \quad \beta_{33} = \frac{1}{8}.$$

Наконец, удобно будет иметь ещё формулу, позволяющую выразить $f_1, \ldots, f_N$ через $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_N, f_0$. Чтобы получить эту формулу, достаточно решить систему уравнений (22.29) (записанную для $i = 1, 2, \ldots, N$) относительно f_j.

Получим выражения типа

$$f_j = \alpha_{0j} f_0 + \frac{1}{e(\theta)} \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij} \bar{f}_i \; ^{1}). \qquad (22.30)$$

Приведём коэффициенты α_{ij} для $N = 1$, 2 и 3.
Для $N = 1$

$$\alpha_{01} = -1, \quad \alpha_{11} = 2.$$

[1]) Формула (22.30) особенно полезна в случаях, когда $f_0 = 0$.

Для $N=2$

$$\alpha_{01}=-\frac{1}{2}, \quad \alpha_{11}=2, \quad \alpha_{21}=\frac{1}{2},$$

$$\alpha_{02}=1, \quad \alpha_{12}=-8, \quad \alpha_{22}=4.$$

Для $N=3$

$$\alpha_{01}=-\frac{1}{3}, \quad \alpha_{11}=\frac{3}{2}, \quad \alpha_{21}=\frac{3}{2}, \quad \alpha_{31}=-\frac{1}{6},$$

$$\alpha_{02}=\frac{1}{3}, \quad \alpha_{12}=-6, \quad \alpha_{22}=3, \quad \alpha_{32}=\frac{2}{3},$$

$$\alpha_{03}=-1, \quad \alpha_{13}=\frac{27}{2}, \quad \alpha_{23}=-\frac{27}{2}, \quad \alpha_{33}=\frac{13}{2},$$

и т. д.

Вернёмся теперь к формулам (22.23), (22.24) и запишем их сперва в виде:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\bar{s}_i}{d\theta}&=\frac{i}{N}\bar{s}_i\frac{de}{d\theta}-(r\rho v_r^2+pr)_i+(pr)_0+\overline{(v_\theta^2\rho+p)}_i,\\ \frac{d\bar{t}_i}{d\theta}&=\frac{i}{N}\bar{t}_i\frac{de}{d\theta}-(rv_r\tau)_i,\end{aligned}\right\} \tag{22.31}$$

где для сокращения записи обозначено:

$$s_i=(\rho v_\theta v_r)_i, \quad t_i=(v_\theta\tau)_i. \tag{22.32}$$

С другой стороны, в силу (22.30), мы можем записать $ds_j/d\theta$ в виде

$$\frac{ds_j}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\frac{1}{e(\theta)}\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ij}\bar{s}_i \qquad (s_0=0)$$

или, выполняя дифференцирование:

$$\frac{ds_j}{d\theta}=\frac{1}{e(\theta)}\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ij}\frac{d\bar{s}_i}{d\theta}-\frac{1}{e^2(\theta)}\frac{de}{d\theta}\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ij}\bar{s}_i \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{22.33}$$

Аналогично, для $dt_j/d\theta$ имеем

$$\frac{dt_j}{d\theta}-\alpha_{0j}\frac{dt_0}{d\theta}=\frac{1}{e(\theta)}\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ij}\frac{d\bar{t}_i}{d\theta}-\frac{1}{e^2(\theta)}\frac{de}{d\theta}\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ij}\bar{t}_i \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{22.34}$$

Но теперь мы можем внести в эти два последних соотношения выражения $d\bar{s}_i/d\theta$, $d\bar{t}_i/d\theta$ из (22.31). Мы получим, выражая еще $\bar{s}_i$, $\bar{t}_i$, $\overline{v_\theta^2\rho+p_i}$ с помощью (22.29), систему уравнений, в которых слева будут стоять производные $ds_j/d\theta$ и $dt_j/d\theta$, а справа — комбинации

всех искомых функций $(v_\theta)_S$, $(v_\theta)_1$, ..., $(v_\theta)_N$; $(v_r)_1$, $(v_r)_2$, ..., $(v_r)_N$; ϑ_S, ϑ_1, ..., ϑ_N; e (при этом правые части будут содержать производные $de/d\theta$ и ещё $dt_0/d\theta$).

Получим систему $2N(j=1, \ldots, N)$ обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, линейную относительно производных. Система эта будет содержать $2N+1$ скорости $(v_r)_1$, $(v_r)_2$, ..., $(v_r)_N$; $(v_i)_S$, $(v_\theta)_1$, ..., $(v_\theta)_N$ (причём $(v_r)_N=(v_r)_\Sigma$, $(v_\theta)_N=(v_\theta)_\Sigma$), $N+1$ функцию ϑ_S, ϑ_1, ..., ϑ_N, а также функцию $e(\theta)$ — итого $3N+3$ функции. Чтобы замкнуть систему, сперва обратимся к краевым условиям. Заметим, что $(v_r)_\Sigma$, $(v_\theta)_\Sigma$ связаны с углом φ соотношениями (22.13), (22.14), (22.15). Мы можем, поэтому, ввести вместо двух неизвестных функций $(v_r)_\Sigma$ и $(v_\theta)_\Sigma$ одну искомую функцию φ (угол наклона). При этом производные, входящие в наши уравнения, будут содержать как саму функцию φ, так и $d\varphi/d\theta$. Именно, для $d(v_\theta)_\Sigma/d\theta$ и $d(v_r)_\Sigma/d\theta$ будем иметь

$$\frac{d(v_\theta)_\Sigma}{d\theta} = -n_1\frac{d\varphi}{d\theta} - (v_r)_\Sigma, \quad \frac{d(v_r)_\Sigma}{d\theta} = m_1\frac{d\varphi}{d\theta} + (v_\theta)_\Sigma, \quad (22.35)$$

где

$$m_1 = +\frac{dv_y}{d\varphi}\sin\theta - \frac{dv_x}{d\varphi}\cos\theta, \quad n_1 = -\left(\frac{dv_x}{d\varphi}\sin\theta + \frac{dv_y}{d\varphi}\cos\theta\right);$$

m_1 и n_1, вычисляемые посредством формул (22.13), (22.14) суть известные функции от φ и θ.

Далее, мы имеем ещё соотношение (22.18), связывающее функции $e(\theta)$ и $\varphi(\theta)$. Недостающие $N+1$ уравнения составим, используя уравнение для $\partial\vartheta/\partial\theta$. Так как ϑ зависит лишь от ψ, то можно считать $\vartheta_i=\vartheta_i(\psi_i)$. Поэтому $d\vartheta_i/d\theta = d\vartheta_i/d\psi_i \cdot d\psi_i/d\theta$. С другой стороны, ясно, что $\vartheta_i(\psi_i)=(\vartheta_\Sigma(\psi_\Sigma))_{\psi_\Sigma=\psi_i}$, так что $d\vartheta_i/d\psi_i=(d\vartheta_\Sigma/d\psi_\Sigma)_{\psi_\Sigma=\psi_i}$. Наконец, напишем $d\vartheta_\Sigma/d\psi_\Sigma = d\vartheta_\Sigma/d\varphi \cdot d\varphi/d\theta \cdot d\theta/d\psi_\Sigma$ и заметим, что в этом выражении $d\vartheta_\Sigma/d\varphi$ может быть вычислено (через φ) непосредственно по формуле (22.19), а $d\theta/d\psi_\Sigma$ может быть рассчитано по формулам (22.16), (22.17).

Если мы запишем теперь $d\psi_i/d\theta$ с помощью соотношения (22.10), в котором под $R(\theta)$ будем подразумевать $r_i(\theta)$ из (22.22), то получим окончательно

$$\frac{d\vartheta_i}{d\theta} = \left(\frac{d\vartheta_\Sigma}{d\varphi}\frac{d\theta}{d\psi_\Sigma}\right)_{\psi_\Sigma=\psi_i}\frac{d\varphi}{d\theta}\rho_i\left[(v_\theta)_i\frac{i}{N}\frac{de}{d\theta} - r_i(v_r)_i\right]. \quad (22.36)$$

Это соотношение надо записать для $i=1, 2, \ldots, N-1$. Для $i=N(\Sigma)$ имеем непосредственно равенство (22.19); на поверхности цилиндра будем иметь постоянное значение ϑ_S по формуле (22.21).

Таким образом мы замкнули задачу: число уравнений будет равно числу искомых функций. При этом краевые условия на теле и ударной волне удовлетворяются автоматически при любом N.

Полученная таким путем система обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка (так называемая аппроксимирующая система) решается численно шагами по θ. При этом будем отправляться от некоторых начальных значений, отвечающих $\theta = 0$. Здесь, однако, мы встретимся с тем затруднением, что не все искомые функции задаются при $\theta = 0$. Именно на оси $\theta = 0$:

$$(v_\theta)_S = (v_\theta)_1 = \ldots = (v_\theta)_{N-1} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 = \ldots = \vartheta_{N-1} =$$

$$= \left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)\left(1+\frac{2}{\varkappa-1}\frac{a_\infty^2}{v_\infty^2}\right)\left(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\frac{v_\infty^2}{a_\infty^2}-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{N-1} = 0.$$

Таким образом мы имеем $3N-1$ условия, в то время как искомых функций $4N-1$ (v_r и v_θ — выражаются на Σ через φ). Неизвестными оказываются $(v_r)_1$, $(v_r)_2$ ... $(v_r)_{N-1}$, $e(0)$ (N параметров задачи).

Обратим внимание на то, что наши дифференциальные уравнения будут содержать подвижные особые точки. Разрешим нашу систему относительно производных от искомых функций. Мы привели систему к виду, решённому относительно производных $ds_j/d\theta$, $dt_j/d\theta$, где s_j и t_j определяются из (22.32) через $(v_r)_j$ и $(v_\theta)_j$. Используя эти связи, получим для $j = 0, 1, 2, \ldots, N$:

$$\frac{dt_j}{d\theta} = -\frac{t_j (v_r)_j}{a_j^2}\frac{d(v_r)_j}{d\theta} + \frac{\tau_j}{a_j^2}\left(a^2 - v_\theta^2\right)_j \frac{d(v_\theta)_j}{d\theta}, \tag{22.37}$$

$$\frac{ds_j}{d\theta} = \rho_0\left(\frac{\vartheta_j}{\vartheta_0}\right)^{-\varkappa/(\varkappa-1)}\left[(v_r)_j\frac{dt_j}{d\theta} + t_j\frac{d(v_r)_j}{d\theta} - \frac{\varkappa}{\varkappa-1}t_j(v_r)_j\frac{d\ln\vartheta_j}{d\theta}\right], \tag{22.38}$$

где $a_j^2 = \dfrac{\varkappa-1}{2}\left(v_{\max}^2 - v_r^2 - v_\theta^2\right)$ — местная скорость звука. На обтекаемом цилиндре ($j = 0$) надо учесть, что $(v_r)_S = 0$ (тогда $s_S = 0$). На поверхности разрыва, где $j = N(\Sigma)$, справедливо (22.35) и $dt_\Sigma/d\theta$, $ds_\Sigma/d\theta$ выражаются через $d\varphi/d\theta$. Теперь без труда из (22.38) и (22.37) получим выражение для $d(v_r)_j/d\theta$ ($j = 1, 2, \ldots, N-1$) и $d(v_r)_j/d\theta$ $j = 0, 1, \ldots, N-1$) через $dt_S/d\theta$, $dt/d\theta$ и $ds_j^f/d\theta$ ($j = 1, 2, \ldots, N$),

$d(v_r)_j/d\theta = U_j$, где

$$U_j = \frac{1}{t_j}\left[\frac{1}{\rho_s}\left(\frac{\vartheta_j}{\vartheta_0}\right)^{\varkappa/(\varkappa-1)}\frac{ds_j}{d\theta} - (v_r)_j\frac{dt_j}{d\theta} + \frac{\varkappa}{\varkappa-1}t_j(v_r)_j\frac{d\ln\vartheta_j}{d\theta}\right], \tag{22.39}$$

$$\frac{d(v_\theta)_j}{d\theta} = \frac{E_j}{a_j^2-(v_\theta^2)_j}, \quad \text{где } E_j = \frac{a_j^2}{\tau_j}\frac{dt_j}{d\theta} + (v_r)_j(v_\theta)_j\frac{d(v_r)_j}{d\theta}. \tag{22.40}$$

Выражение (22.37) или (22.38) при $j = N(\Sigma)$ используется для определения $d\varphi/d\theta$. После этого аппроксимирующую систему в нормальной форме можно записать так:

$$\frac{de}{d\theta} = -(r_0+e)\operatorname{tg}(\theta+\varphi),$$

$$\frac{d\psi_j}{d\theta} = \rho_j\left(v_\tau\frac{dr_j}{d\theta} - rv_r\right)_j,$$

$$\vartheta_j(\psi_j) = \vartheta_\Sigma(\psi_\Sigma)|_{\psi_\Sigma=\psi_j}, \qquad \frac{d(v_r)_j}{d\theta} = v_j,$$

$$\frac{d(v_\theta)_s}{d\theta} = \frac{E_0}{a_s^2-(v_\theta^2)_s}, \qquad \frac{d(v_\theta)_j}{d\theta} = \frac{E_j}{a_j^2-(v_\theta^2)_j},$$

$$j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Входящие в правые части $ds_j/d\theta$ и $dt_j/d\theta$ определяются по (22.33) и (22.34). Неизвестными функциями здесь являются e, ψ_j, ϑ_j, φ, $(v_r)_j$, $(v_\theta)_j$, $(v_\tau)_s$.

Из аппроксимирующей системы видно, что правые части всех уравнений, кроме уравнения для $dv_j/d\theta$ ($j = s, 1, 2, \ldots, N-1$), являются голоморфными в области определения функциями от θ и искомых величин.

В уравнениях же для $d(v_\theta)_j/d\theta$ ($j = s, 1, \ldots, N-1$) при $(v_\theta)_j = a_j$ знаменатель обращается в нуль. Если мы не потребуем, чтобы и числитель E_j в этих точках обращался в нуль, то мы будем иметь бесконечные значения производных

$$\frac{d(v_\theta)_s}{d\theta}, \quad \frac{d(v_\theta)_1}{d\theta}, \quad \ldots, \quad \frac{d(v_\theta)_{N-1}}{d\theta},$$

т. е. бесконечные ускорения. Тогда движение не может быть продолжено за соответствующие точки — мы получим особую предельную линию (ср. решение на стр. 164) и всё решение не будет иметь физического смысла. Таким образом, N уравнений нашей аппроксимирующей системы в окрестности звуковой линии будут иметь по-

движные особые точки и для возможности непрерывного перехода через эти точки необходимо выполнение в них N условий: при $(v_\theta)_j = a_j$ должно быть

$$E_j = 0 \quad (j = s,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1). \tag{22.41}$$

Для удовлетворения этих условий в нашем распоряжении имеется N параметров при $\theta = 0$. Теперь задача полностью замыкается. Отметим, что при $\theta > 0$, как следует из (22.39), уравнения для $d(v_r)_j/d\theta$ особенностей не имеют, а при $\theta = 0$ $d(v_r)_j/d\theta = 0$.

Проведённый О. М. Белоцерковским анализ особых точек показывает, что в уравнениях (22.40) особенности будут типа «седла», причём во всей рассматриваемой области интегрирования существует единственное решение, голоморфное всюду и удовлетворяющее условиям как при $\theta = 0$, так и при $(v_\theta)_j = a_j$. Техническая трудность построения такого решения заключается в том, что в особых точках в правых частях уравнений (22.40) будут неопределенности типа 0/0. Заранее раскрыть эти неопределенности нельзя, так так положение самих особенностей и значения многих искомых величин в них неизвестны. Для возможности счёта в окрестности таких точек можно поступить, например, так: решение в окрестности регулярной точки $\theta = \theta_r$, близкой к особой, разлагается по степеням $(\theta - \theta_0)$ в ряды, по которым оно достраивается вплоть до особой точки $\theta = \theta_k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1)$; затем в окрестности θ_k строятся ряды по $(\theta - \theta_k)$, которые дают возможность «выйти» из особой точки. В случае необходимости значения θ_k и других величин в этой точке могут быть уточнены методом итераций по условиям склейки при $\theta = \theta_0$ рядов, отправляющихся от θ_k с решением, полученным обычным путём. Как правило, это делать не приходится, а для возможности «выхода» из особых точек достаточно бывает знать 2—3 члена разложения.

Продемонстрируем теперь более детальный ход решения на простейшем случае, когда $N = 1$ («первое приближение»).

Промежуточных линий здесь нет и все подынтегральные функции аппроксимируются линейно по их значениям на цилиндре и на волне. Искомых функций будет три: $e(\theta)$, $\varphi(\theta)$ и $(v_\theta)_s$. Функции $(v_r)_\Sigma$ и $(v_\theta)_\Sigma$ на поверхности разрыва (т. е. $(v_r)_1$ и $(v_\theta)_1$) найдутся сразу же из (22.13)—(22.15) после того, как $\varphi(\theta)$ известно. Одним из трёх дифференциальных уравнений, служащих для определения e, φ, $(v_\theta)_s$, будет уравнение (22.18), а два других получатся из интегральных соотношений (22.23) и (22.24). При $N = 1$ каждое из этих соотношений записывается только один раз — для $r_i = r_1 = r_0 + e(\theta)$. Соотношение (22.23) приведёт нас к равенству:

$$\frac{ds_1}{d\theta} = \frac{1}{e}\left[s_1 \frac{de}{d\theta} + 2r_0 p_s - 2r_1 (p + v_r^2)_1\right] + (p + \rho v_\theta^2)_s + (p + \rho v_\theta^2)_1. \tag{22.42}$$

Соотношение (22.24) записывается в виде:

$$\frac{dt_s}{d\theta}+\frac{dt_1}{d\theta}=\frac{1}{e}\left[(t_1-t_s)\frac{de}{d\theta}-2r_1(\rho v_r)_1\right]. \tag{22.43}$$

Здесь $(i=s,\ 1)$:

$$t_i=(v_i\tau)_i, \qquad \tau_i=\left(1-\frac{v_r^2+v_\theta^2}{v_{\max}^2}\right)_i^{\frac{1}{\varkappa-1}},$$

$$s_i=(\rho v_\theta v_r)_i \quad (s_s\equiv 0, \text{ так как } (v_r)_s\equiv 0),$$

причём p_i и ρ_i определяются через $(v_\theta)_i$ и $(v_r)_i$ с помощью (22.11), (22.12), (22.19) и (22.21).

С другой стороны:

$$\frac{ds_1}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(\rho v_\theta v_r)_1=\frac{d\rho_1}{d\theta}(v_\theta v_r)_1+\rho_1\left[(v_\theta)_1\frac{d(v_r)_1}{d\theta}+(v_r)_1\frac{d(v_\theta)_1}{d\theta}\right].$$

Здесь

$$\frac{d\rho_1}{d\theta}=\rho_1\left\{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{d\ln\vartheta_1}{d\theta}\frac{d\varphi}{d\theta}-\frac{2}{\varkappa-1}\frac{1}{\left(v_{\max}^2-v_r^2-v_\theta^2\right)_1}\times\right.$$

$$\left.\times\left[(v_r)_1\frac{d(v_r)_1}{d\theta}+(v_\theta)_1\frac{d(v_\theta)_1}{d\theta}\right]\right\}, \tag{22.44}$$

где $d\ln\vartheta_1/d\varphi$ находится по (22.19). Подставив из (22.35) выражения $d(v_r)_1/d\theta$ и $d(v_\theta)_1/d\theta$ через $d\varphi/d\theta$ в (22.44) и (22.43), получим окончательно

$$\frac{ds_1}{d\theta}=D\frac{d\varphi}{d\theta}+\rho_1\left(v_\theta^2-v_r^2\right)_1,$$

где

$$D=\rho_1\left\{(v_\theta)_1m_1-(v_r)_1n_1-\frac{1}{\varkappa-1}\left[\frac{\varkappa\,d\ln\vartheta_1}{d\varphi}+\frac{2}{\left(v_{\max}^2-v_\theta^2-v_r^2\right)_1}\right]\right\}, \tag{22.45}$$

причём m_1 и n_1 по (22.13), (22.14) и (22.35) — известные функции φ и θ.

Аналогично,

$$\frac{dt_1}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(v_\theta\tau)_1=G\frac{d\varphi}{d\theta}-\tau_1(v_r)_1,$$

где

$$G=-\frac{t_1(v_r)_1}{a_1^2}m_1-\frac{\tau_1}{a_1^2}\left(a^2-v_\theta^2\right)_1n_1. \tag{22.46}$$

Учитывая, что на поверхности цилиндра $(v_r)_s=0$, получим также:

$$\frac{dt_s}{d\theta}=\frac{\tau_s}{a_s^2}\left(a^2-v_\theta^2\right)_s\frac{d(v_\theta)_s}{d\theta}. \tag{22.47}$$

Теперь из (22.45) и (22.47) мы получим оставшиеся два уравнения аппроксимирующей системы при $N=1$:

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{1}{D}\left[\frac{ds_1}{d\theta}-\rho_1\left(v_\theta^2-v_r^2\right)_1\right],$$

$$\frac{d\,(v_\theta)_s}{d\theta}=\frac{E_s}{a_s^2-(v_\theta)_s^2},\qquad E_s=\frac{a_s^2}{\tau_s}\frac{dt_s}{d\theta}.$$

Входящие в правые части $ds_1/d\theta$ и $dt_s/d\theta$ находятся по (22.42) и (22.43), а $dt_1/d\theta$ определяется из (22.46).

Итак, мы можем выразить $de/d\theta$, $d\varphi/d\theta$, $d\,(v_\theta)_s/d\theta$ через θ, e, φ, $(v_\theta)_s$. Интегрирование системы проводится шагами по θ от $\theta=0$ (направление набегающего потока), где $\varphi=0$, $(v_\theta)_s=0$, $e_0=e\,(0)$ — неизвестный параметр, который определяется из условия (22.41) конечности $d\,(v_\theta)_s/d\theta$: при $(v_\theta)_s=a_s$ или $(v_\theta^2)_s=[(\varkappa-1)/(\varkappa+1)]\cdot v_{1a}^2$ должно быть

$$E_s=0.$$

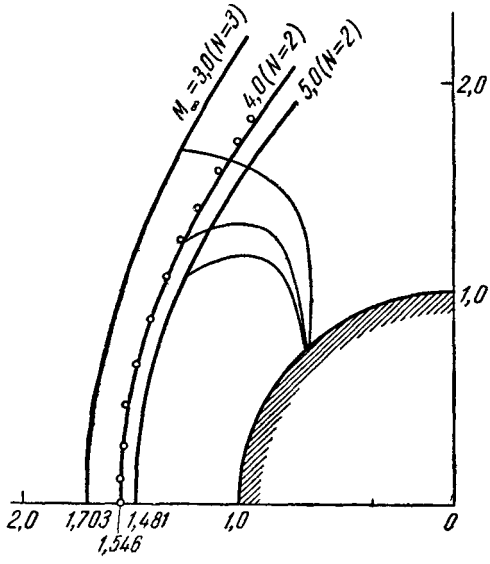

Рис. 72.

Во втором приближении ($N=2$) вводится одна промежуточная линия (квадратичная аппроксимация), в третьем ($N=3$) — две и т. д. В каждом приближении ($N\geqslant 2$) добавляется по одному неизвестному параметру $(v_r)_j$ при $\theta=0$ и по одному условию (22.41) конечности производной $d\,(v_1)_j/d\theta$. Совпадение результатов с требуемой точностью в двух последних приближениях свидетельствует о практической сходимости расчёта. Следует заметить, что метод интегральных соотношений весьма быстро сходится.

Приведём некоторые результаты расчётов обтекания кругового цилиндра ($r_0=1$, $\varkappa=1{,}40$), взятые из работы О. М. Белоцерковского [1]). Расчёты проводились на быстродействующей электронной вычислительной машине БЭСМ-1 АН СССР. Уже приведённый выше рис. 71 отвечает случаю $M_\infty=v_\infty/a_\infty=3$.

[1]) См. сноску на стр. 191.

Минимальная область влияния здесь ограничена двумя характеристиками I-го и II-го семейств (обозначены цифрами 3 и 2 соответственно), что вполне согласуется со стр. 182. Линия перехода,

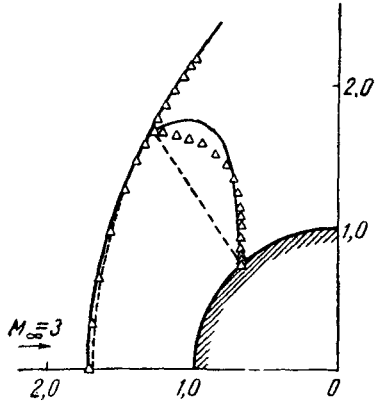

Рис. 73.

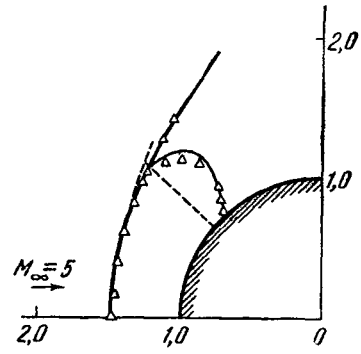

Рис. 74.

обозначена цифрой 4. Рис. 72 показывает, как изменяется форма и положение ударной волны и звуковой линии при возрастании M_∞

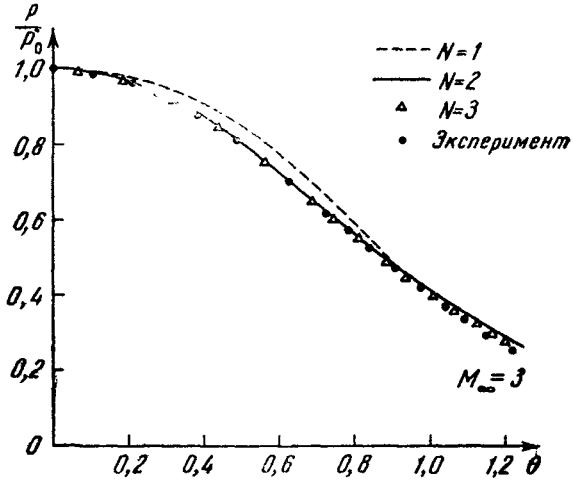

Рис. 75.

от 3 до 5. Там же нанесены результаты эксперимента (точки). Рис. 73, 74, 75 иллюстрируют сходимость метода по приближениям

для $M_\infty = 3$ и 5: пунктиром нанесены результаты расчётов при $N = 1$, сплошной линией — при $N = 2$, треугольниками — при $N = 3$ и точками — эксперимент (Г. М. Рябинков).

Как видим, уже расчёт по первому приближению даёт в основном правильное положение и форму ударной волны, распределение давления на теле, на волне. Для определения величин в поле при $M_\infty \leqslant 3$ надо считать по крайней мере три приближения, в то время как при $M_\infty > 3$ достаточно двух.

§ 23. Движение с очень большими сверхзвуковыми скоростями. Гиперзвуковые течения и обтекание тонких тел. В современной газовой динамике, имеющей дело со скоростями порядка нескольких километров в секунду, возникает много теоретических и практических вопросов, требующих изучения движения газа при очень больших значениях числа M_∞. Обтекания с очень большими сверхзвуковыми скоростями обладают рядом специфических особенностей. В § 14, а также в § 19 мы уже обратили внимание на некоторые характерные свойства движений, в которых $M_\infty \gg 1$. В настоящем параграфе мы остановимся на некоторых общих законах таких движений.

С. В. Валландер доказал (1949) наличие предельного, не зависящего от M_∞ состояния течения, возникающего при очень больших M_∞ [1]). Покажем, как это получается для плоского случая.

Пусть обтекаемое тело помещено в поток газа, обладающий скоростью v_∞. Образуется поверхность сильного разрыва, после прохождения которой начинается вихревое обтекание тела. Движение описывается уравнением Бернулли

$$\frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{a^2}{\varkappa - 1} = \frac{v_\infty^2}{2} + \frac{a_\infty^2}{\varkappa - 1}, \tag{23.1}$$

уравнением неразрывности, которое можно взять в форме (9.2):

$$(a^2 - v_x^2)\frac{\partial v_x}{\partial x} - v_x v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_x v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + (a^2 - v_y^2)\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \tag{23.2}$$

и уравнением для вихря скорости (§ 6):

$$v_x\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \frac{\partial \ln \vartheta}{\partial y} = \frac{a^2}{\varkappa - 1}\frac{\partial \ln \vartheta}{\partial y}. \tag{23.3}$$

---

[1]) Результаты Валландера были получены также Осватичем (K. Oswatitsch) в работе Ähnlichkeitsgesetze für Hyperschallströmung, Zs. f. angew. Math. u. Phys., 1951.

Вводя a^2 из (23.1) в уравнения (23.2) и (23.3) и переходя к безразмерным скоростям $v_x/v_\infty = \tilde{v}_x$, $v_y/v_\infty = \tilde{v}_y$, получим два уравнения:

$$\left(\frac{\varkappa+1}{2}\tilde{v}_x^2+\frac{\varkappa-1}{2}\tilde{v}_y^2-\frac{\varkappa-1}{2}-\frac{1}{\mathbf{M}_\infty^2}\right)\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial x}-\tilde{v}_x\tilde{v}_y\left(\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{v}_y}{\partial x}\right)+$$

$$+\left(\frac{\varkappa-1}{2}\tilde{v}_x^2+\frac{\varkappa+1}{2}\tilde{v}_y^2-\frac{\varkappa-1}{2}-\frac{1}{\mathbf{M}_\infty^2}\right)\frac{\partial\tilde{v}_y}{\partial y}=0, \quad (23.4)$$

$$\tilde{v}_x\left(\frac{\partial\tilde{v}_y}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial y}\right)=\left(1-\frac{\tilde{v}_x^2+\tilde{v}_y^2}{2}+\frac{1}{\varkappa-1}\frac{1}{\mathbf{M}_\infty^2}\right)\frac{\partial\ln\vartheta}{\partial y}. \quad (23.5)$$

Уравнения (23.4), (23.5) содержат три безразмерных функции: $\tilde{v}_x$, $\tilde{v}_y$, $\ln\vartheta$ и, если не считать $\varkappa$, один безразмерный параметр $\mathbf{M}_\infty$. Последний входит таким образом, что при $\mathbf{M}_\infty \gg 1$ членом, его содержащим, можно пренебречь. Отсюда, однако, было бы поспешно сделать вывод о независимости нашего движения от $\mathbf{M}_\infty$ при весьма больших $\mathbf{M}_\infty$. Дело в том, что мы еще не знаем поведения функции $\ln\vartheta$ и не учли краевые условия.

Определение $\ln\vartheta$ тесно связано, как известно, с видом поверхности разрыва. Краевые условия надо будет как всегда записывать на поверхности тела и на поверхности разрыва. На поверхности тела:

$$\tilde{v}_y = \tilde{v}_x \operatorname{tg}\beta, \quad (23.6)$$

где β — угол наклона касательной к поверхности тела к оси X. На поверхности разрыва можем написать (см., например, (22.19)):

$$\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_\infty}\right)^\varkappa=\mathbf{M}_\infty^2\left(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\cos^2\varphi-\frac{1}{\mathbf{M}_\infty^2}\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}+\frac{2}{\varkappa+1}\frac{1}{\mathbf{M}_\infty^2\cos^2\varphi}\right)^\varkappa. \quad (23.7)$$

Кроме того, по (7.16) и (7.17)

$$\left.\begin{aligned}\tilde{v}_x&=1+\frac{2}{\varkappa+1}\frac{1}{\mathbf{M}_\infty^2}-\frac{2}{\varkappa+1}\cos^2\varphi,\\ \tilde{v}_y&=\frac{2}{\varkappa+1}\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{1}{\mathbf{M}_\infty^2\cos^2\varphi}-1\right).\end{aligned}\right\} \quad (23.8)$$

Отметим теперь, и это является важным обстоятельством, что, в силу сверхзвукового характера потока, форма поверхности вдали от тела не влияет на течение вблизи головной части тела. Поток вблизи тела находится под влиянием лишь ограниченной, наиболее интенсивной части ударной волны. На этой части $\cos\varphi$ будет отличен от нуля. При обтекании тупого профиля $\cos\varphi$ будет близок к единице; при симметричном обтекании клина $\cos\varphi$ будет близок к косинусу угла раствора клина и т. д. Поэтому, на некотором участке будет всегда достигаться

такое течение, при котором не только $M_\infty \gg 1$, но и $M_\infty \cos\varphi \gg 1$. Но тогда и в краевых условиях (23.7), (23.8) мы можем отбросить член, содержащий $1/M_\infty^2$. Теперь параметр M_∞ остаётся в одном лишь выражении для $\ln\vartheta$:

$$\ln\frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} = \frac{1}{\varkappa}\ln\left[\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)^{\varkappa} M_\infty^2\right] + \ln\left(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\cos^2\varphi - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right),$$

причём член, содержащий M_∞, входит в $\ln\vartheta$ аддитивно. Но $\ln\vartheta$ входит в формулу (23.3) лишь под знаком производной по координате поэтому в окончательной задаче M_∞ полностью исчезнет, и мы получим доказательство утверждения Валландера [1]). Закон независимости от M_∞ при больших M_∞ хорошо подтверждается экспериментально.

Обратимся теперь к специальному рассмотрению обтекания тонких тел при больших сверхзвуковых скоростях. На примере обтекания пластинки (§ 14) мы уже видели, что простая линеаризация уравнений по отношению к основному потоку в случае, когда $M_\infty \gg 1$, не даёт удовлетворительных результатов. Мы видели, что характерным параметром задачи является, в случае пластинки, величина $M_\infty|\beta_0|$. Для общего случая обтекания тонких тел при $M_\infty \gg 1$ были открыты специальные законы подобия. Это было сделано Цзянем для безвихревых движений и обобщено Хэйсом на случай движений вихревых [2]).

Следуя Г. Г. Чёрному [3]), попробуем сперва дать оценки порядка различных гидродинамических величин нашей задачи.

Пусть, в общем случае, мы имеем установившееся обтекание со скоростью v_∞ на бесконечности тонкого заостренного впереди тела, расположенного так, что углы между касательными к поверхности тела и основным потоком близки к нулю. Направив ось X вдоль основного потока, имеем

$$O(\cos(n, x)) = \tau, \tag{23.9}$$

где n — нормаль к телу, τ — малый безразмерный параметр (например, относительная толщина тела, наибольшее значение угла, образованного поверхностью тела с направлением потока, наибольшее значение $\cos(n, x)$ и т. п.), буква O, как обычно, означает порядок величины.

Из краевого условия обтекания следует тогда, что на контуре

$$O(\tilde{v}_y) = \tau\tilde{v}_x, \tag{23.10}$$

[1]) В случае безвихревого движения, т. е. в случае отсутствия поверхности разрыва, доказательство независимости движения от M_∞ при $M_\infty \gg 1$ было нами приведено выше. См. сноску на стр. 156.

[2]) Tsien H. S., Similarity laws of hypersonic flows. Journal Math. Phys. 3 (1946), 25; Hayes W. D., On hypersonic similitude. Quart. Appl. Math. 5 (1947).

[3]) Чёрный Г. Г., Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью, Физматгиз, 1959.

где, как и раньше, $\tilde{v}_x = v_x/v_\infty$, $\tilde{v}_y = v_y/v_\infty$. Это соотношение естественно распространить и на всю область течения между поверхностью разрыва и контуром. Но на поверхности разрыва мы имеем соотношения (7.12), (7.15), из которых следует, что

$$-\rho_\infty v_\infty (v_x - v_\infty) = p - p_\infty = \frac{2\varkappa p_\infty}{\varkappa+1}\left(\mathsf{M}_\infty^2 \cos^2\varphi - 1\right) \quad (23.11)$$

(ρ_∞, p_∞ — значения ρ и p до прохождения поверхности разрыва). С другой стороны, так как касательные к поверхности разрыва, составляющие скорости, непрерывны, то

$$v_x - v_\infty = -V\cos\varphi, \quad (23.12)$$

где $V = \sqrt{(v_x - v_\infty)^2 + v_y^2}$. Внося это выражение в (23.11), получим квадратное уравнение относительно $\cos\varphi$, из которого без труда найдём

$$\cos\varphi = \frac{\varkappa+1}{4}\tilde{V} + \sqrt{\left(\frac{\varkappa+1}{4}\right)^2 \tilde{V}^2 + \frac{1}{\mathsf{M}_\infty^2}},$$

где $\tilde{V} = \sqrt{(\tilde{v}_x - 1)^2 + \tilde{v}_y^2}$, так что

$$O(\cos\varphi) = \tilde{V} + \frac{1}{\mathsf{M}_\infty}. \quad (23.13)$$

Далее, по (7.11) и (23.12) имеем

$$\tilde{v}_y = (\tilde{v}_x - 1)\operatorname{tg}\varphi = -\tilde{V}\sin\varphi. \quad (23.14)$$

Но $\sin\varphi \approx 1$. Значит,

$$O(\tilde{V}) = O(\tilde{v}_y)$$

или, по (23.10),

$$O(\tilde{V}) = \tau. \quad (23.15)$$

Возвращаясь теперь к (23.12) и учитывая (23.13), (23.14) и (23.15), имеем окончательно для скоростей:

$$O(v_x - v_\infty) = v_\infty\left(\tau^2 + \frac{\tau}{\mathsf{M}_\infty}\right), \quad (23.16)$$

$$O(v_y) = v_\infty\tau. \quad (23.17)$$

Наконец, найдём ещё порядок величин $p - p_\infty$ и $\rho - \rho_\infty$. По (23.11) имеем сперва

$$\frac{p - p_\infty}{p_\infty} = -\varkappa\mathsf{M}_\infty^2\frac{v_x - v_\infty}{v_\infty},$$

так что, используя (23.16), получим

$$O\left(\frac{p - p_\infty}{p_\infty}\right) = \mathsf{M}_\infty^2\tau^2 + \mathsf{M}_\infty\tau. \quad (23.18)$$

Что же до $\frac{p-p_\infty}{p_\infty}$, то по (7.10) можем написать

$$\frac{p-p_\infty}{p_\infty}=\frac{M_\infty^2\cos^2\varphi-1}{\frac{\varkappa-1}{2}M_\infty^2\cos^2\varphi+1}$$

и тогда, на основании полученных выше оценок для $M_\infty\cos\varphi$, имеем

$$O\left(\frac{p-p_\infty}{p_\infty}\right)=O\left(\frac{(M_\infty\tau+1)^2-1}{(M_\infty\tau+1)^2}\right)=\frac{M_\infty\tau}{M_\infty\tau+1}. \qquad (23.19)$$

Проанализируем теперь полученные нами оценки.

Пусть сперва мы имеем дело с умеренными сверхзвуковыми скоростями, так что $M_\infty\approx 1$. Наши оценки показывают, что тогда при обтекании очень тонких тел ($\tau\ll 1$) возмущения всех гидродинамических элементов малы и имеют один и тот же порядок малости:

$$\tilde{v}_x-1\approx\frac{1}{M_\infty}\tau,\quad \tilde{v}_y\approx\tau,\quad \frac{p-p_\infty}{p_\infty}\approx M_\infty\tau,\quad \frac{\rho-\rho_\infty}{\rho_\infty}\approx M_\infty\tau.$$

В то же время по (23.13), (23.15) имеем

$$\cos\varphi\approx\frac{1}{M_\infty},$$

т. е. наша поверхность разрыва будет иметь наклон того же порядка, как и наклон характеристики (большой по сравнению с наклоном обтекаемой поверхности). Мы можем поэтому при исследовании сверхзвукового обтекания тонких тел, если $M_\infty\approx 1$, линеаризовать уравнения движения по отношению к основному потоку, обладающему скоростями $v_x=v_\infty$, $v_y=0$, давлением p_∞ и плотностью ρ_∞.

Иначе будет обстоять дело при исследовании обтекания тонких тел, когда $M_\infty\tau=1$ или же $M_\infty\tau\gg 1$. Здесь наши формулы приведут к новым соотношениям:

$$\tilde{v}_x-1\approx\tau^2,\quad \tilde{v}_y\approx\tau,\quad \frac{p-p_\infty}{p_\infty}\approx M_\infty^2\tau^2,\quad \frac{\rho-\rho_\infty}{\rho_\infty}=1.$$

«Малость» возмущений скорости сохраняется, но характер этой малости будет различным для продольных (v_x) и поперечных (v_y) составляющих. Возмущения давления и плотности не будут уже малыми; более того, возмущение давления может иметь тот же порядок, что и самодавление и даже превышать его во много раз; отметим, что при этом коэффициент давления

$$C_p=\frac{2}{c_\infty v_\infty^2}(p-p_\infty)=\frac{2}{\varkappa M_\infty^2}\frac{p-p_\infty}{p_\infty}$$

будет весьма мал — он будет иметь порядок τ^2. Наконец, $\cos\varphi$ по (23.13) и (23.15) будет мал и будет иметь порядок тот же, что и косинус

нормали к поверхности обтекаемого контура — поверхность разрыва будет как бы прилипать к поверхности тела.

Мы видим, таким образом, что метод линеаризации, по отношению к потоку на ∞, не применим в нашем случае больших сверхзвуковых скоростей.

Движение с очень большими сверхзвуковыми скоростями около тонких тел называют в современной литературе гиперзвуковыми.

Выведем теперь, используя наши оценки, важный принцип подобия, касающийся гиперзвуковых движений. Обратимся вновь к общим уравнениям движения, неразрывности и притока тепла для плоского стационарного случая.

Выделим основное движение по формуле

$$v_x' = v_x - v_\infty \tag{23.20}$$

и перейдём к безразмерным координатам из соотношений:

$$v_x' = v_\infty \tau^2 u, \quad v_y = v_\infty \tau v, \quad p = \varkappa p_\infty M_\infty^2 \tau^2 p_1, \quad \rho = \rho_\infty \rho_1,$$
$$x = x_1, \quad y = \tau y_1.$$

Теперь уравнения движения примут вид:

$$(1 + \tau^2 u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + v\frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 0,$$
$$(1 + \tau^2 u)\frac{\partial v}{\partial x_1} + v\frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0.$$

Уравнение неразрывности запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\rho_1(1 + \tau^2 u) + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial y_1} = 0,$$

и условие адиабатичности даст:

$$(1 + \tau^2 u)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{p_1}{\rho_1 \varkappa} + v\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{p_1}{\rho_1 \varkappa} = 0.$$

В согласии с приведенными выше оценками, мы можем считать, что все наши безразмерные функции имеют теперь порядок 1. Считая, что τ мало и отбрасывая член, содержащий τ^2 (это единственное упрощение, которое здесь делается), мы придём к уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + v\frac{\partial u}{\partial y_1} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \tag{23.21}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x_1} + v\frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial y_1} = 0, \tag{23.22}$$
$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial y_1} = 0, \tag{23.23}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{p_1}{\rho_1 \varkappa} + v\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{p_1}{\rho_1 \varkappa} = 0. \tag{23.24}$$

Пусть уравнение обтекаемого контура в новых координатах имеет вид

$$F(x_1, y_1) = 0.$$

Тогда краевое условие на контуре запишется

$$(1 + \tau^2 u)\frac{\partial F}{\partial x_1} + v\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$$

или, если отбросить член τ^2,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + v\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0. \tag{23.25}$$

Далее, на больших расстояниях от тела возмущения пропадают, и мы должны там написать

$$u = v = 0, \quad \rho_1 = 1, \quad p_1 = \frac{1}{\varkappa(M_\infty \tau)^2}. \tag{23.26}$$

Наконец, выпишем еще условия на поверхности разрыва.

Пусть уравнение этой последней (в новых координатах) имеет вид

$$f(x_1, y_1) = 0.$$

Тогда по (7.5) имеем

$$\rho_\infty \rho_1 v_\infty \left\{(1 + \tau^2 u)\frac{\partial f}{\partial x_1} + v\frac{\partial f}{\partial y_1}\right\} = \rho_\infty v_\infty \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

или, в нашем приближении:

$$\rho_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + v\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}. \tag{23.27}$$

Аналогичным образом вместо уравнений (7.3), (7.4) получим теперь

$$u = p_1 - \frac{1}{\varkappa M_\infty^2 \tau^2}, \tag{23.28}$$

$$v\frac{\partial f}{\partial x_1} = \left(p_1 - \frac{1}{\varkappa M_\infty^2 \tau^2}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial y_1}, \tag{23.29}$$

а вместо (7.6) будем иметь:

$$\varkappa M_\infty^2 \tau^2 p_1 = \frac{(\varkappa + 1)\rho_1 - (\varkappa - 1)}{\varkappa + 1 - (\varkappa - 1)\rho}. \tag{23.30}$$

Из двух параметров задачи (τ и M_∞) ни один не входит в уравнения (23.21) — (23.24) и краевое условие (23.25). Краевые условия на бесконечности (23.26) содержат лишь комбинацию этих параметров

$$K = \tau M_\infty$$

(результат Цзяня). Условия на поверхности разрыва (23.28) — (23.30) также содержат лишь комбинацию этих параметров (результат Хэйса). Отсюда принцип подобия, который может быть сформулирован так:

движения около двух тел, аффинно преобразуемых друг в друга, имеющих относительные толщины τ' и τ'', будут подобны, если числа Маха M'_∞ и M''_∞ этих движений таковы, что

$$\tau' M'_\infty = \tau'' M''_\infty.$$

Уравнения наши распадаются на две группы: уравнения (23.22) — (23.24) содержат искомые функции v, p_1, ρ_1 и не содержат u; краевое условие (23.25) и условия на поверхности разрыва (23.27), (23.29), (23.30) также содержат лишь v, p_1, ρ_1. Таким образом, задача сильно упрощается. После того как v, p_1, ρ_1 определены, для нахождения u может служить уравнение (23.21) и краевое условие (23.28). Проще определить u из уравнения Бернулли.

Хэйс обратил внимание на то, что уравнения (23.22) — (23.24) совпадут с уравнениями для одноразмерного *нестационарного* движения газа вдоль оси Y_1, если заменить x_1 через некое фиктивное время. При этом краевое условие (23.25) представит аналог краевого условия на поршне, движущемся по закону $F(x_1, y_1) = 0$ (x_1 — время), а условия (23.27), (23.29), (23.30), как легко видеть, отвечают в точности условиям на поверхности разрыва в нестационарном случае.

§ 24. Случай реального газа. «Идеально-диссоциирующийся» газ. При прохождении поверхности сильного разрыва, если сверхзвуковые скорости движения очень велики, температура может увеличиваться до весьма больших значений.

В самом деле, комбинируя формулы (7.10) и (7.15), мы получим для отношения температур T/T_1 на скачке формулу:

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1} M_1^2 \cos^2\varphi - \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\right)\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} + \frac{2}{\varkappa+1}\frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{M_1^2}\right). \qquad (24.1)$$

Если $\varphi = 0$ (прямой скачок), то при $M_1 = 5$ будем иметь для $\varkappa = 1{,}4$ $T/T_1 \approx 5{,}8$, а при $M_1 = 10$ $T/T_1 \approx 20{,}8$; это значит, что если $T_1 = 280°\,\mathrm{K}$, мы получим увеличение температуры в первом случае примерно до $1642°\,\mathrm{K}$, а во втором — примерно до $5712°\,\mathrm{K}$. При таких высоких температурах отдельные молекулы кислорода, входящего в состав воздуха, начнут диссоциироваться.

Соответствующий пересчёт, основанный на рассмотрении статистической физики процесса, был проведён, применительно к газовой динамике, рядом авторов. Остановимся более подробно на теории Лайтхилла [1]) «идеально-диссоциирующегося» газа. Рассмотрим газ, состоящий из двухатомных молекул. Пусть в нём начинается диссоциация: часть молекул начинает делиться на свободные атомы. Обозначим через α процентное отношение (по массе) числа свободных

[1]) Lighthill M. J., Dynamics of dissociating gas, I Journal of fluid mechanics, 2 (1957).

(возникших за счет диссоциации) атомов

$$\alpha = \frac{n_A}{n_A + 2n_{2A}},$$

где n_A — число диссоциированных атомов (в единице массы газа), n_{2A} — число недиссоциированных молекул (в единице массы газа). По Лайтхиллу имеем соотношение

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{\rho_d}{\rho} e^{-T_d/T}, \tag{24.2}$$

где T_d и ρ_d — некоторые параметры. Именно, величина $T_d = D/k$, где D — энергия диссоциации, k — постоянная Больцмана ($k = 1{,}38 \times \times 10^{-16}$ *эрг/град*); величина же ρ_d представляется более сложно: она выражается через температуру и некоторые функции распределения; приближенно ρ_d может считаться постоянным. В этом смысле Лайтхилл говорит об «идеально-диссоциирующемся» газе.

Для кислорода $T_d = 59\,000°$ K, $\rho_d = 150$ *г/см*^{3};

для азота $T_d = 113\,000°$ K, $\rho_d = 130$ *г/см*^{3}.

На рис. 76 (заимствованном из статьи Лайтхилла), где по оси ординат отложено α, а по оси абсцисс — T/T_d, даны три кривые — зависимости α от T/T_d, отвечающие $\lg \rho_d/\rho = 7$, 6 и 5 соответственно.

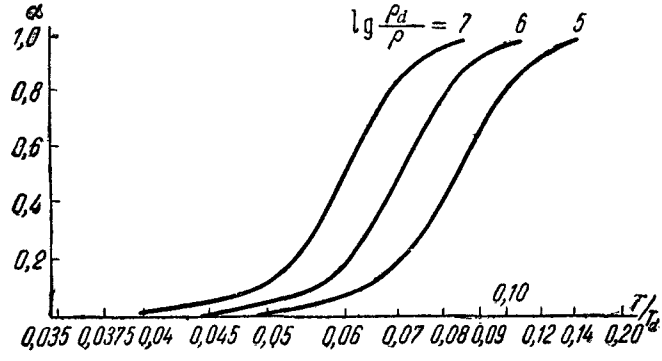

Рис. 76.

Из рисунка видно, что если при $T \approx 1600°$ K (случай $M_1 = 5$, см. выше), когда $T/T_d \approx 0{,}027$, практически ещё нет диссоциации, то при $T = 5700°$ K (случай с $M_1 = 10$), когда $T/T_d \approx 0{,}097$, мы имеем при $\lg \rho/\rho_d = 5$ почти полную диссоциацию (для нижних слоёв атмосферы $\rho \approx 10^{-3}$ *г/см*^{3}, поэтому $\rho_d/\rho \approx 1{,}3 \cdot 10^5$ и $\lg \rho_d/\rho \approx 5$).

Для частично диссоциированного газа уравнения движения и уравнения неразрывности остаются прежними. Изменяется прежде всего уравнение состояния, которое может быть записано теперь в виде

$$p = R\rho T(1+\alpha), \tag{24.3}$$

где R, как и прежде,—газовая постоянная. Для воздуха $R = 2{,}87\times$ $\times 10^6$ *см*^{2}/*сек*$^2 \cdot$ *град*; для кислорода $R = 2{,}59 \cdot 10^6$ *см*^{2}/*сек*$^2 \cdot$ *град*, для азота $R = 2{,}97 \cdot 10$ *см*^{2}/*сек*$^2 \cdot$ *град*.

Изменится и уравнение энергии; при выводе последнего уравнения для внутренней энергии $u\left(u = \frac{U}{A}\right.$, см. стр. 17$\left.\right)$ теперь придётся написать:

$$\frac{u}{u_d} = \frac{3T}{T_d} + \alpha, \tag{24.4}$$

где $u_d = RT_d$ (в механических единицах). Для кислорода $u_d = 1{,}53\times$ $\times 10^{11}$ *см*^{2}/*сек*^{2}, для азота $u_d = 3{,}35 \cdot 10^{11}$ *см*^{2}/*сек*^{2}. При $\alpha=0$ мы получим при этом $U = 3RT$. Для идеального газа мы имели (стр. 17) $u = \frac{c_v T}{A} = \frac{RT}{\varkappa - 1}$, так что если $\varkappa = 1{,}4$, то $u = 2{,}5\,RT$. Формула (24.4) отвечает случаю, когда $\varkappa = \frac{4}{3}$.

Уравнение энергии (аналог уравнения (3.4)) будет теперь иметь вид

$$\rho \frac{d}{dt}\frac{VV}{2} + \rho \frac{du}{dt} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{V}) = 0 \tag{24.5}$$

или же (см. стр. 20):

$$\rho \frac{du}{dt} + p \operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0, \tag{24.5'}$$

при этом u выражается через (24.4).

Теперь, кроме функций $\boldsymbol{V}$, p, ρ, T, в качестве искомых величин входит ещё α, которая связана с ρ и T конечным соотношением (24.2). Как и прежде, уравнение (24.5) описывает факт сохранения энтропии S частицы, ибо по определению энтропии:

$$dS = \frac{du + p\,d\frac{1}{\rho}}{T}, \tag{24.6}$$

так что, в силу уравнения неразрывности и, по (24.5) имеем

$$\frac{dS}{dt} = 0.$$

Используя (24.3) и (24.4), мы получим для dS из (24.6) выражение

$$dS = \frac{3u_d}{T_d}\frac{dT}{T} + \frac{u_d}{T}d\alpha + \rho(1+\alpha)\,d\frac{1}{\rho}.$$

Но по (24.2) имеем

$$\frac{u_d}{T} = R\frac{T_d}{T} = -R\left(\ln\frac{\alpha^2}{1-\alpha} + \ln\frac{\rho}{\rho_d}\right);$$

запишем ещё

$$\rho(1+\alpha)\,d\frac{1}{\rho} = -R(1+\alpha)\,d\ln\frac{\rho}{\rho_d} = -Rd\left[(1+\alpha)\frac{\rho}{\rho_d}\right] + R\ln\frac{\rho}{\rho_d}\,d\alpha,$$

далее получим

$$d\frac{S}{R} = d\left\{3\ln\frac{T}{T_d} = (1+\alpha)\ln\frac{\rho}{\rho_d} - (1-\alpha)\ln(1-\alpha) + \alpha(2-2\ln\alpha)\right\}.$$

Для сравнения напомним, что в случае идеального газа мы имели (см. (6.8), стр. 33):

$$d\frac{S}{R} = \frac{1}{\varkappa-1}\,d\ln\vartheta^{\varkappa} = \frac{1}{\varkappa-1}\,d\ln(Tp^{1-\varkappa}) = d\left(\frac{1}{\varkappa-1}\ln T - \ln\rho\right),$$

что согласуется (для $\varkappa = 4/3$) с формулой (24.7), если в ней положить $\alpha = 0$.

Посмотрим теперь, как изменятся, в случае диссоциирующегося газа, условия на поверхности сильного разрыва.

Условия (2.12), (2.13) останутся без изменения. Условие (2.17) мы должны записать, вводя вместо U/A его выражение по (24.4)[1]). Ограничимся только рассмотрением стационарного случая, когда $\theta = -V_n$ и $[\rho V_n] = 0$. Записывая $[pV_n] = \left[\frac{p}{\rho}\rho V_n\right] = \rho V_n\left[\frac{p}{\rho}\right]$, мы можем представить (2.17) в виде

$$\rho V_n\left[\frac{V\cdot V}{2} + \frac{U}{A} + \frac{p}{\rho}\right] = 0.$$

Введя вновь теплосодержание (стр. 34) i, мы получим

$$\left[\frac{V\cdot V}{2} + i\right] = 0, \tag{24.7}$$

---

[1]) Мы можем получить взамен (2.16), повторяя рассуждения, приведенные на стр. 29, также и аналог формулы (5.9). Это будет

$$\frac{p_+ + p_-}{2}\left[\frac{1}{p}\right] + \frac{1}{A}[U] = 0,$$

причём теперь, в отличие от того, что отвечает совершенному газу, мы имеем

$$i = 3RT + \alpha u_d + \frac{p}{\rho} = RT(4+\alpha) + u_d\alpha\ ^{1}). \tag{24.8}$$

Обратимся к плоскому случаю и будем обозначать значение наших элементов до прохождения разрыва значком «1», после прохождения — значком «2». Умножая (2.12) скалярно на n и замечая, что $\theta = -V_n$, получим

$$p_1 + \rho_1 v_{n_1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{n_2}^2. \tag{24.9}$$

Умножая обе части (2.12) скалярно на единичный вектор τ, касательный к поверхности разрыва, получим, как и раньше,

$$v_{\tau_1} = v_{\tau_2}, \tag{24.10}$$

где v_τ — составляющая скорости, касательная к поверхности разрыва. Условие (2.13) перепишем в виде

$$\rho_1 v_{n_1} = \rho_2 v_{n_2}, \tag{24.11}$$

а условие (24.7) даёт нам, в соответствии с (24.10):

$$\frac{v_{n_1}^2}{2} + i_1 = \frac{v_{n_2}^2}{2} + i_2. \tag{24.12}$$

Аналогично тому, что было в случае идеального газа, соотношения (24.9) — (24.12) связывают пять величин p_2, ρ_2, v_{x_2}, v_{y_2}, T_2 четырьмя уравнениями. К ним надо прибавить (24.2), записанное для p_2 и T_2; в качестве шестой величины будет фигурировать α_2.

Анализ формул (24.9) — (24.12) несколько облегчается тем обстоятельством, что в интересующих нас сейчас случаях — случаях возникновения диссоциации — величины i_1 и p_1 всегда могут считаться пренебрежимо малыми по сравнению с $v_{n_1}^2/2$ и $\rho_1 v_{n_1}^2$ соответственно [2]). Для того чтобы это показать, обратимся вновь к рис. 76.

Даже для ничтожно малой диссоциации, когда $\alpha = 0{,}05$, мы должны считать $T_2/T_d > 0{,}0475$. Но тогда по (24.8) $T_2/u_d = T/T_d(4+\alpha) + \alpha = 0{,}05 + 0{,}0475(4 + 0{,}05) \approx 0{,}25$. Таким образом, по (24.12) мы

---

[1]) Аналогом формулы (5.14) будет теперь более громоздкое соотношение. Если $\alpha_- = 0$, $\alpha_+ = \alpha$, то мы получим

$$\frac{p_+}{p_-} = \frac{7 - \frac{\rho_-}{\rho_+}}{\left(1 + \frac{6}{1+\alpha}\right)\frac{\rho_-}{\rho_+} - 1} - \frac{2Td}{T_-}\,\frac{\alpha}{\left(1 + \frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\frac{\rho_-}{\rho_+} - 1};$$

при $\alpha = 0$ получим вновь (5.14) с $k = 4/3$.

[2]) Упрощённые условия на скачках, получающиеся путём отбрасывания p_1 и i_1, называются «приближениями для очень сильных разрывов».

должны иметь $\frac{1}{u_d i_1} + \frac{1}{\frac{1}{2} u_d v_{n_1}^2} > 0{,}25$. С другой стороны, при обычных температурах T_1 порядка 300°К, при отсутствии диссоциации мы имеем $T/T_d < 0{,}005$ и, следовательно, $1/u_d i_1 = 4T/T_d < 0{,}02$. Таким образом, даже при ничтожных α величина $^1/_2 v_{n_1}^2$ должна значительно превышать i_1. Ещё в большей степени это относится к $\rho_1 v_{n_1}^2$ и p_1. Итак, приближенно имеем

$$\rho_1 v_{n_1} = \rho_2 v_{n_2}, \quad \rho_1 v_{n_1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{n_2}^2, \quad \frac{1}{2} v_{n_1}^2 = \frac{1}{2} v_{n_2}^2 + i_2. \tag{24.13}$$

Исключаем v_{n_2} с помощью равенства (24.11):

$$v_{n_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} v_{n_1}. \tag{24.14}$$

Второе равенство из (24.13) дает нам $p_2 = \rho_1 v_{n_1}^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{v_{n_2}^2}{v_{n_1}^2}\right)$, или, по (24.14):

$$p_2 = \rho_1 v_{n_1}^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right). \tag{24.15}$$

Наконец, третье из (24.13) даёт нам $i_2 = \frac{1}{2} v_{n_1}^2 \left(1 - \frac{v_{n_2}^2}{v_{n_1}^2}\right)$, т. е.

$$i_2 = \frac{1}{2} v_{n_1}^2 \left\{1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\right\}. \tag{24.16}$$

Используя (24.8), можем, по (24.16) и (24.15), написать

$$RT_2(4+\alpha) + \alpha u_d = \frac{1}{2} v_{n_1}^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \frac{p_2}{2\rho_1}\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right).$$

Или, исключая p_2 с помощью (24.3):

$$RT_2(4+\alpha) + \alpha u_d = \frac{RT_2(1+\alpha)}{2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + 1\right).$$

Отсюда выразим ρ_2/ρ_1 через T_2 и α:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{3T_2 + \alpha T_d}{\frac{1}{2} T_2(1+\alpha)} + 1, \tag{24.17}$$

или если использовать ещё (24.2):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 7 + \frac{2\alpha}{1+\alpha}\left\{\ln\left(\frac{\rho_d}{\rho_2}\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\right) - 3\right\}. \tag{24.18}$$

Может быть построено одно трансцендентное уравнение для определения T_2/T_d (или α) через v_{n_1} и ρ_1/ρ_d. Уравнение это громоздко

и трудно обозримо [1]). Лайтхилл предлагает анализировать поведение функций после скачка последовательными приближениями. Именно, возьмём сначала какое-либо грубое значение ρ_2/ρ_1, например $\rho_2/\rho_1 = 10$, и найдём с его помощью по (24.16) i_2; но по (24.8), используя (24.15), можно получить

$$\frac{v_{n_1}^2}{u_d}\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{4+\alpha}{1+\alpha}+\alpha=\frac{i_2}{u_d}. \qquad (24.19)$$

Из этого равенства, внося сюда выбранное нами ρ_2/ρ_1 и найденное нами i_2, получим величину α. Вставив это α в правую часть (24.18) (вместе с выбранным ρ_2/ρ_1), мы получим новое, уточненное отношение ρ_2/ρ_1. Отправляясь от этого значения проведём расчёт снова и т. д.

Приведём пример. Пусть $v_{n_1}^2/u_d = 1{,}44$ ($v_{n_1} \approx 4{,}68$ *км/сек*), $\rho_1/\rho_d = 2\cdot 10^{-7}$ ($\rho_1 \approx 0{,}26\cdot 10^{-3}$ *г/см*^{3}). Тогда по (24.16) имеем (пренебрегая членом с $(\rho_1/\rho_2)^2$) $i_2/u_d \approx 0{,}72$. При $\rho_2/\rho_1 = 12$ имеем $\rho_2/\rho_d = 2{,}4\cdot 10^{-6}$; при этих значениях i_2 и ρ_2/ρ_1 получим по (24.19) (отбрасывая ρ_1/ρ_2 в скобках) $\alpha = 0{,}42$ и тогда по (24.18) мы сможем найти исправленное ρ_2/ρ_1. Это будет $\rho_2/\rho_1 = 13{,}2$. Теперь $\rho_2/\rho_d = 2{,}64\cdot 10^{-6}$; если это новое значение внести в наши формулы, величины α и ρ_2/ρ_1 останутся практически теми же. Итак, мы получим $T_2/T_d = 1/13{,}2 \approx 0{,}075$

---

[1]) Уравнение для T_2/T_d можно получить, исключив сперва α из соотношений $\frac{T}{T_d}(1+\alpha)=\frac{v_{n_1}^2}{u_d}\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$ (следствие (24.15) и (24.3)) и $\frac{T}{T_d}(4+\alpha)+\alpha=\frac{v_{n_1}^2}{2u_d}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$ (следствие (24.16) и (24.8)). По отношению к ρ_1/ρ_2 получим при этом квадратное уравнение:

$$\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2-\frac{2T_d}{T_2+2T_d}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)-2\frac{u_d(3T_2-T_d)T_2}{v_{n_1}^2(2T_d+T_2)T_d}=0;$$

при этом

$$\alpha=\frac{1}{T_2+2T_d}\left\{\frac{v_{n_1}^2}{u_d}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)-7T_2\right\}.$$

Решив указанное квадратное уравнение, найдём ρ_1/ρ_2 через T_2, а затем α через T_2. Останется вставить эти выражения в (24.2), и мы получим одно трансцендентное уравнение, связывающее T_2/T_d с ρ_d/ρ_1 и $v_{n_1}^2/u_d$. Это уравнение будет аналогом соотношения (24.1) (вернее, соотношения $\frac{T_2}{T_1}=\frac{2\varkappa(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\mathrm{M}_1^2\cos^2\varphi$, получающегося из (24.1) для очень больших M_1, т. е. для рассматриваемого нами сейчас случая «очень сильных разрывов»).

($T_2 \approx 4400°$ K), в то время как при отсутствии диссоциации мы получили бы по (24.1):

$$\frac{T_2}{T_d} \approx \frac{2\varkappa(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\frac{T_1}{T_d}\mathsf{M}_1^2\cos^2\varphi = \frac{2(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\frac{v_{n_1}^2}{RT_d},$$

т. е. при принятых в этом примере величинах

$$\frac{T_2}{T_d} \approx \frac{6\cdot 1{,}44}{49} \approx 0{,}176 \quad (T_2 \approx 10\,000°\text{ K}).$$

Любопытной особенностью движений с диссоциацией является то, что величина ρ_2/ρ_1 имеет определенный экстремум, при котором $\alpha \approx 0{,}6 \div 0{,}7$; этот экстремум отвечает примерно значениям $\rho_2/\rho_1 \approx \approx 13 \div 15$. Заметим, что для идеального газа ρ_2/ρ_1 монотонно растёт с ростом M_1 и достигает предельного значения только при $\mathsf{M}_1 = \infty$ (ср. (7.10)),

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \to \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}, \quad \text{т. е. при} \quad \varkappa = \frac{4}{3}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \to 7.$$

Остановимся теперь на выражении для энтропии; посмотрим, что можно сказать об изэнтропических движениях диссоциирующегося газа.

Аналогично случаю идеального газа мы можем и здесь ввести скорость звука как скорость распространения малого возмущения. Заметим сперва, что энтропию S вновь можно считать функцией только p и ρ, ибо хотя по определению S зависит от T, ρ и α, мы можем считать, что с помощью уравнений (24.2), (24.3) T и α выражены через p и ρ.

Возвращаясь к системе уравнений (4.14), мы должны заменить лишь последнее из уравнений этой системы соотношением

$$\left(\bar{v}_x\frac{\partial f}{\partial x} + \bar{v}_y\frac{\partial f}{\partial y} + \bar{v}_z\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial S}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}}\right) = 0.$$

Повторяя рассуждения § 4, мы получим теперь для квадрата скорости звука a^2 выражение:

$$a^2 = -\frac{\partial S}{\partial p} : \frac{\partial S}{\partial \rho}.$$

Если обозначить

$$a^2 = \gamma\frac{p}{\rho},$$

то γ, аналог отношения теплоемкостей, будет зависеть от p и ρ. Мы можем представить γ в виде:

$$\gamma = \frac{d\ln p}{d\ln \rho}$$

(дифференциалы берутся при $dS=0$) и получим, после простых выкладок:

$$\gamma = 1 + \frac{2TT_d\,\alpha(1-\alpha^2) + (2+3\alpha^2-\alpha^3)\,T^2}{T_d^2\,\alpha(1-\alpha^2) + 3(2-\alpha)(1+\alpha)\,T^2}. \qquad (24.20)$$

Для крайних значений $\alpha=0$ и $\alpha=1$ получим соответственно $\gamma=4/3$ и $\gamma=5/3$ [1]). Интересно отметить, что, подобно ρ_2/ρ_1, величина γ имеет экстремум (для отношений T/T_d, лежащих между 0,04 и 0,10) для каких-то промежуточных значений α; в этом убеждаемся из анализа формулы (24.20).

Мы ограничимся сказанным здесь относительно особенностей диссоциирующегося газа. Вопрос о движении в пограничном слое, влиянии вязкости, а также диффузии рассмотрен в ряде работ, из которых упомянем работу В. В. Щенникова [2]).

В. УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА

§ 25. Движения с осевой симметрией. Из пространственных движений рассмотрим сперва обладающие симметрией по отношению к некоторой оси. Последнюю примем на ось Oz цилиндрической системы координат; расстояние от оси будем обозначать через r, полярный угол через θ, проекции скоростей — через v_z, v_r, v_θ соответственно. Условие осесимметричности запишется тогда в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial\theta} = \frac{\partial v_r}{\partial\theta} = \frac{\partial v_z}{\partial\theta} = \frac{\partial\rho}{\partial\theta} = v_\theta = 0.$$

Кроме того, движение предположим стационарным, так что ни один из его элементов не зависит от времени. Так как движение происходит одинаково во всех меридиональных плоскостях (полуплоскостях), проходящих через ось Oz, мы можем рассмотреть одну такую полуплоскость (z, r). Уравнения движения примут вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{v^2}{2} + v_r\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right),$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{v^2}{2} - v_z\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right).$$

Уравнение неразрывности примет вид:

$$\frac{\partial r\rho v_z}{\partial z} + \frac{\partial r\rho v_r}{\partial r} = 0; \qquad (25.1)$$

условие адиабатичности даст:

$$v_z\frac{\partial}{\partial z}\frac{p}{\rho^\varkappa} + v_r\frac{\partial}{\partial r}\frac{p}{\rho^\varkappa} = 0.$$

---

[1]) Последнее значение совпадает с тем, которое приводится обычно для идеального одноатомного газа: $\varkappa=5/3$ (стр. 21).

[2]) Щенников В. В., Расчёт ламинарного пограничного слоя у сублимирующей поверхности, Сб. выч. матем. и мат. физики, 1 (1961), № 5,

Мы видим, что все уравнения, кроме уравнения неразрывности, отличаются от уравнений плоской задачи (§ 6) лишь заменой x на z и y на r. Поэтому мы можем повторить все те выводы, которые мы получили, не употребляя уравнения неразрывности, в плоской задаче.

Введём функцию тока $\psi(z, r)$. Из уравнения неразрывности имеем:

$$r\rho v_z = \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad r\rho v_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{25.2}$$

и (6.11) заменится на

$$\Omega = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = -r\rho\left(\frac{di_0}{d\psi} - \frac{\varkappa p}{\varkappa - 1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \frac{d\vartheta}{d\psi}. \tag{25.3}$$

Снова вихри будут отсутствовать, если $di_0/d\psi = d\vartheta/d\psi = 0$; обратно, если $\Omega = 0$, будет, вообще говоря, $di_0/d\psi = d\vartheta/d\psi = 0$.

Обращаемся к условиям на поверхности сильного разрыва (в плоской задаче это были цилиндрические поверхности, сейчас — это поверхности, получающиеся вращением около оси Oz; их пересечение с плоскостью меридиана назовём линией разрыва); получим, очевидно, вновь (7.1) и (7.2), а также формулы

$$\rho\theta\,[v_z] = [p]\cos(n, z); \quad \rho\theta\,[v_r] = [p]\cos(n, r)$$

вместо (7.3), (7.4), причём по-прежнему имеют место (7.5), (7.6), (7.7). Но тогда справедливо и (7.10), где φ есть угол между нормалью к линии разрыва и осью Oz, а v_1 есть скорость до разрыва.

Далее, (7.14) запишется в виде:

$$v_r^2 = (v_1 - v_z)^2 \frac{\frac{2}{\varkappa+1}\left(v_1 - \frac{a_1^2}{v_1}\right) - (v_1 - v_z)}{v_1 - v_z + \frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_1^2}{v_1}}, \tag{25.4}$$

т. е. нам придётся иметь дело с прежней гипоциссоидой. Наконец, всё, что мы говорили о критической скорости и об уравнении Бернулли (§ 8), останется в силе, если только заменить там, где они входят, буквы x и y на z и r соответственно.

Обратимся к изучению движений со сверхзвуковыми скоростями и привлечём уравнение неразрывности. Примем, что

$$i_0 = \text{const.}; \quad \Omega = r\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\rho p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\frac{d\vartheta}{d\psi},$$

причём

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = \Omega. \tag{25.5}$$

Уравнение неразрывности (второе из дифференциальных уравнений задачи) запишется так:

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial z} v_z + \frac{\partial \ln \rho}{\partial r} v_r + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{v_r}{r};$$

выражая ρ через a, получим после простых преобразований:

$$(a^2 - v_z^2)\frac{\partial v_z}{\partial z} - v_r v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} - v_r v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + (a^2 - v_r^2)\frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{a^2 v_r}{r}. \quad (25.6)$$

Уравнение (25.6) отличается от уравнения (9.2) наличием свободного от производных члена $-a^2 v_r/r$.

Предположим, что $v > a_*$, и введём характеристики

$$r = r(z).$$

Вдоль них мы имеем:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\frac{dr}{dz} = \frac{dv_z}{dz}; \quad \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r}\frac{dr}{dz} = \frac{dv_r}{dz}.$$

Находя отсюда $\partial v_z/\partial z$ и $\partial v_r/\partial z$ и внося в (25.5) и (25.6), приведём последние уравнения к виду:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r}\left[v_r v_z + r'(a^2 - v_z^2)\right] - \frac{\partial v_r}{\partial r}(r' v_r v_z + a^2 - v_r^2) =$$

$$= (a^2 - v_z^2)\frac{dv_z}{dz} - v_r v_z \frac{dv_r}{dz} + \frac{a^2 v_r}{r},$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} + r'\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{dv_r}{dz} - \Omega.$$

Чтобы линия $r = r(z)$ была характеристикой, должно быть:

$$\begin{vmatrix} r'(a^2 - v_z^2) + v_r v_z & -r' v_r v_z - (a^2 - v_r^2) \\ 1 & r' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} r'(a^2 - v_z^2) + v_r v_z & (a^2 - v_z^2)v_z' - v_r v_z v_r' + \frac{a^2 v_r}{r} \\ 1 & -\Omega + v_r' \end{vmatrix} = 0.$$

Первый из этих определителей даст нам, очевидно, аналогично плоскому случаю:

$$r'^2(v_z^2 - a^2) - 2v_r v_z r' + v_r^2 - a^2 = 0 \quad (25.7)$$

и

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_{1,2} = \frac{v_r v_z \pm a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_z^2 - a^2}, \quad (25.8)$$

где значку 1 отвечает знак плюс, значку 2—знак минус перед корнем. Мы видим таким образом, что в плоскости (z, r) характеристики $r = r(z)$ строятся из скоростей v_z, v_r совершенно так же, как в

плоскости (x, y) характеристики $y = y(x)$ строятся из v_x и v_y. Обратимся теперь ко второму определителю. После простых преобразований получим:

$$\frac{dv_r}{dz}\left[r'\left(a^2 - v_z^2\right) + 2v_r v_z\right] - \left(a^2 - v_z^2\right)\frac{dv_z}{dz} = \\ = \Omega\left[r'\left(a^2 - v_z^2\right) + v_r v_z\right] + \frac{a^2 v_r}{r}.$$

Замечая, что вследствие (25.7) коэффициент при v_r' будет равен $\left(v_r^2 - a^2\right)/r'$, деля на него и заменяя члены в квадратной скобке правой части по формуле (25.8), получим:

$$\frac{dv_r}{dz} + r'\frac{v_z^2 - a^2}{v_r^2 - a^2}\frac{dv_z}{dz} = \mp\frac{a\Omega\sqrt{v^2 - a^2}}{v_r^2 - a^2}r' + \frac{a^2 v_r r'}{r}\frac{1}{v_r^2 - a^2}.$$

Вспоминая затем, что

$$r_1' r_2' = \frac{v_r^2 - a^2}{v_z^2 - a^2},$$

получим окончательно:

вдоль характеристики первого семейства:

$$dv_r + \frac{1}{r_2'}dv_z = \left\{\frac{-a\Omega\sqrt{v^2 - a^2}r_1'}{v_r^2 - a^2} + \frac{a^2 v_r}{r\left(v_r^2 - a^2\right)}r_1'\right\}dz, \qquad (25.9)$$

вдоль характеристики второго семейства:

$$dv_r + \frac{1}{r_1'}dv_z = \left\{\frac{+a\Omega\sqrt{v^2 - a^2}r_2'}{v_r^2 - a^2} + \frac{a^2 v_r}{r\left(v_r^2 - a^2\right)}r_2'\right\}dz. \qquad (25.10)$$

Так же, как и в плоском случае, можно придать формулам более обозримый вид, если ввести величину скорости v и угол наклона β к оси z:

$$v_z = v\cos\beta, \quad v_r = v\sin\beta. \qquad (25.11)$$

Мы получим тогда вместо (25.8)

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_{1,2} = \operatorname{tg}(\beta \pm \alpha), \qquad (25.12)$$

где, как и прежде, $\sin\alpha = a/v$.

Формулы (25.9) и (25.10) перейдут при этом в соотношения

$$d\beta - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{v}dv = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\varkappa - 1}d\ln\vartheta - \frac{\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\beta + \alpha)}\frac{dr}{r}, \qquad (25.13)$$

$$d\beta + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{v}dv = -\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\varkappa - 1}d\ln\vartheta + \frac{\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}\frac{dr}{r}. \qquad (25.14)$$

формулы (25.9), (25.10) существенно отличаются от формул (9.13), (9.14) плоской задачи наличием вторых членов фигурной скобки справа. Формулы (25.13), (25.14) отличаются от (9.24) наличием члена, содержащего dr/r. Это будет особенно явно в безвихревом случае, к которому и переходим.

§ 26. Безвихревое осесимметрическое движение при $v > a$. Метод Франкля. Если вихри отсутствуют, т. е. $\Omega = 0$, будет: вдоль характеристики первого семейства:

$$dv_r + \frac{1}{r_2'}\,dv_z = \frac{a^2 v_r}{r\left(v_r^2 - a^2\right)}\,r_1'\,dz, \tag{26.1}$$

вдоль характеристики второго семейства:

$$dv_r + \frac{1}{r_1'}\,dv_z = \frac{a^2 v_r}{r\left(v_r^2 - a^2\right)}\,r_2'\,dz. \tag{26.2}$$

Задача об исследовании такого движения была решена впервые Франклем.

Наряду с плоскостью (z, r) рассмотрим плоскость (v_z, v_r). Совершенно аналогично тому, как это было в плоской задаче, нашему движению отвечают точки плоскости (v_z, v_r), лежащие между кругом $v^2 = v_z^2 + v_r^2 = a^2$ и кругом $v^2 = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\,a_*^2$; это объясняется тем, что уравнение Бернулли

$$\frac{v_z^2 + v_r^2}{2} + \frac{a^2}{\varkappa - 1} = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\,\frac{a_*^2}{2}$$

пишется здесь так же, как и в плоской задаче. Однако характеристики в плоскости (v_z, v_r) не будут теперь эпициклоидами и даже более того, они аналогично характеристикам в плоскости (z, r) не могут быть найдены до тех пор, пока движение не определено. Происходит это вследствие наличия в (26.1) и (26.2) правых частей. Легко видеть, что наша задача представляет формальную аналогию с рассмотренным нами в § 8 случаем плоского вихревого движения. В самом деле, соотношения вдоль характеристик в плоскости (v_x, v_y) в вихревой задаче представлялись в виде неинтегрируемых комбинаций (9.18) и (9.19), заменяемых при практических расчётах уравнениями типа (13.4), (13.6). Но (26.1), (26.2) отличаются от (9.18), (9.19), кроме того, что вместо x и y в них стоят z и r, только видом коэффициента при dz; при этом коэффициент при dz в (26.1) и (26.2) даже проще, чем коэффициент при dx в плоской задаче (последний содержит подлежащую сложному определению величину Ω). Что же касается до характеристик плоскости (z, r), то они определяются по формулам (25.8), т. е. совершенно так же, как

характеристики в плоскости (x, y); уравнения (25.8) по-прежнему эквивалентны соотношению

$$|V_n| = a$$

(n — нормаль к характеристике); уравнение Бернулли справедливо в прежней форме; можем легко провести характеристики в плоскости (z, r).

Обращаясь к задачам типа 1, 2, 3 и 4, рассмотренным в § 11, заметим, что для приближённого (графического) решения их здесь, как и там, достаточно научиться следующим трём операциям:

1) находить скорость в точке пересечения характеристик разных семейств, выходящих из двух различных, близко расположенных точек, в которых скорости уже известны;

2) находить скорость в точке пересечения с заданным элементом стенки характеристики, выходящей из близкой к стенке точки, в которой скорость известна;

3) находить скорость в точке пересечения характеристики, выходящей из точки, близкой к некоторой свободной поверхности, с заданным элементом этой свободной поверхности.

Научимся сперва операции 1.

Операция 1. Пусть в близких точках M_1 и M_2 плоскости (z, r) (рис. 77) известны скорости; отметим в плоскости (v_z, v_r) точки M_1' и M_2', координаты которых суть компоненты скоростей в точках M_1 и M_2 соответственно. Через точки M_1 и M_2 проведём элементы характеристик разных семейств до их пересечения в N_1 (пусть для конкретности $\overset{\frown}{M_1N_1}$ — элемент дуги характеристики первого семейства, а $\overset{\frown}{M_2N_1}$ — второго семейства). Это построение можно выполнить, вычисляя $r'_{1,2}$ по (25.8). При этом, как и в плоской задаче, элементы характеристик следует заменять элементами касательных к характеристикам. Чтобы найти скорость в точке N_1, рассуждаем так. Перемещаясь по элементу $\overset{\frown}{M_1N_1}$ в плоскости (z, r), мы будем, вследствие (26.1), перемещаться в плоскости (v_z, v_r) по элементу прямой

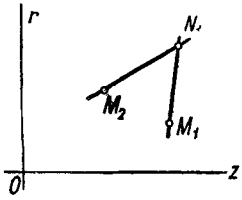

Рис. 77.

$$v_r - (v_r)_{M_1} + \frac{1}{(r_2')_{M_1}}\left[v_z - (v_z)_{M_1}\right] = \left[\frac{a^2 v_r r_1'}{r\left(v_r^2 - a^2\right)}\right]_{M_1}\left[(z)_{N_1} - (z)_{M_1}\right], \quad (26.3)$$

где постановка значка M_1 при скобке означает, что выражение в скобке вычисляется в точке M_1. С другой стороны, перемещаясь

по $\overset{\frown}{M_2N_1}$, будем двигаться по прямой

$$v_r-(v_r)_{M_2}+\frac{1}{(r_1')_{M_2}}[v_z-(v_z)_{M_2}]=\left[\frac{a^2v_rr_2'}{r(v_r^2-a^2)}\right]_{M_2}[(z)_{N_1}-(z)_{M_2}]. \quad (26.4)$$

Точка N_1' плоскости (v_z, v_r), лежащая на пересечении прямых (26.3) и (26.4), даст компоненты скорости точки N_1.

Операция 2. Известна скорость в точке M_1, и дан элемент твёрдой стенки, близкий к M_1, но не проходящий через M_1 (рис. 78). Через M_1 проведём характеристику, например, первого семейства

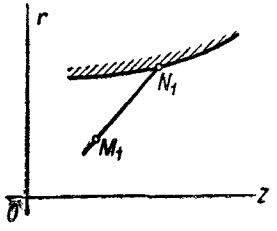

Рис. 78.

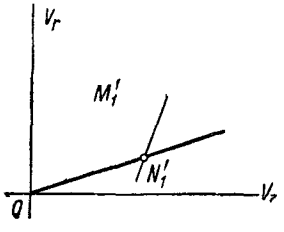

Рис. 79.

до пересечения со стенкой в точке N_1. Скорость точки N_1 находится в плоскости (v_z, v_r) на пересечении прямой (26.3) с радиусом-вектором, параллельным направлению касательной к стенке в точке N_1 (рис. 79).

Операция 3. Известна скорость в точке M_1 и дан элемент свободной поверхности, близкий к M_1, но не проходящий через M_1. Проведём через M_1 характеристику, например, первого семейства до пересечения со свободной поверхностью в точке N_1. Скорость в N_1 найдётся в плоскости (v_z, v_r) на пересечении прямой (26.3) с кругом $v=v_1$, где v_1 есть скорость, отвечающая, по уравнению Бернулли, давлению, имеющемуся на свободной поверхности.

В практических приложениях построение прямых (26.3) и (26.4) можно проводить графически, используя то их свойство, что каждая из них ортогональна соответствующей характеристике другого номера, проведённой в плоскости (z, r) (тангенсы наклона наших прямых суть $-1/(r_2')_{M_1}$ и $1/(r_1')_{M_2}$). Но если мы знаем направление элементов (26.3), (26.4), то, чтобы уметь их провести, достаточно найти ещё, например, их расстояние от точек M_1' и M_2' соответственно.

Приводя уравнения наших прямых к нормальной форме, получим для этих расстояний δ следующие выражения:

$$\delta_1=\left|\frac{a^2v_r}{r(v_r^2-a^2)}\frac{r_1'r_2'}{\sqrt{1+r_2'^2}}dz\right|; \quad \delta_2=\left|\frac{a^2v_r}{r(v_r^2-a^2)}\frac{r_1'r_2'}{\sqrt{1+r_1'^2}}dz\right|.$$

Заменяя в случае первой характеристики $|dz|$ на $|dz| = \frac{ds_1}{\sqrt{1+r_1'^2}}$, где ds_1 — длина дуги вдоль характеристики (например, отрезок $\overline{M_1N_1}$ рис. 77), а для δ_2: $|dz| = \frac{ds_2}{\sqrt{1+r_2'^2}}$ и замечая, что

$$\frac{r_1'r_2'}{\sqrt{1+r_1'^2}\sqrt{1+r_2'^2}} = \frac{v_r^2-a^2}{v^2}$$

(см. вывод для плоской вихревой задачи § 13), получим:

$$\delta_1 = \left|\frac{a^2v_r}{rv^2}\right| |ds_1|; \quad \delta_2 = \left|\frac{a^2v_r}{rv^2}\right| |ds_2|. \tag{26.5}$$

Остаётся только найти, с какой стороны от той или иной точки плоскости (v_z, v_r) надо проводить на расстоянии δ_1 или δ_2 наши характеристики, иначе говоря, надо знать знак проекции δ_1 и δ_2 на какую-либо ось, например, на ось Oz. Из элементарных геометрических соображений получим, что

$$\operatorname{sign} \operatorname{пр}_z \delta_{1,2} = \operatorname{sign}\left(v_r \frac{r_1'r_2'}{v_r^2-a^2}\, dz\right) = \operatorname{sign}\left[v_r(v_z^2-a^2)\, dz\right]. \tag{26.6}$$

В качестве примера рассмотрим движение внутри трубы заданной формы, обладающей осевой симметрией по отношению к оси Oz.

Предположим, что в некотором произвольном сечении трубы $\overset{\smile}{AB}$ (рис. 80, рассматриваем одну только полуплоскость) скорость движения превышает звуковую и нам известна. Нанесём на отрезке $\overset{\smile}{AB}$ ряд точек A, M_1, M_2, ... и через все эти точки проведём элементы характеристик первого семейства. Характеристику, выходящую из M_1, доведём до пересечения с контуром в точке N_1 и, пользуясь операцией 2, найдём скорость в N_1; проводя затем из N_1 элемент характеристики второго семейства до пересечения в точке N_2 с характеристикой первого семейства, идущей из M_2, найдём с помощью операции 1 скорость в точке N_2 и т. д. Заметим, что скорости точек, лежащих на оси Oz, должны находиться из условия $v_r = 0$ (скорость направлена там вдоль оси Oz); при этом, желая найти δ для точек оси Oz, мы должны будем вычислять там выражение $v_r/r = 0/0$. Последнее надо заменить на $\partial v_r/\partial r$, так что при

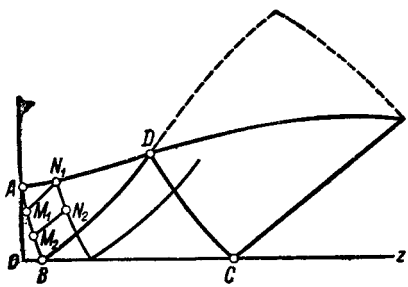

Рис. 80.

вычислении δ в точках оси трубы придётся брать значение v_r/r для соседних точек, которые не лежат на оси, и в которых скорости уже известны.

Решим задачу о получении плавного потока (сопло Лаваля). Пусть в точке C мы имеем нужную нам сверхзвуковую скорость, и $\overset{\smile}{CD}$ (рис. 80) есть характеристика второго семейства, проходящая через C. Так как в осесимметрических задачах нет интегрируемых комбинаций характеристик, то здесь не будет, вообще говоря, и прямолинейных характеристик, а потому применить метод, данный в § 12, нам здесь не удастся. Но всё же одна прямолинейная характеристика (след в меридиональной плоскости характеристического конуса с осью, совпадающей с осью Oz) может существовать и здесь, а именно, она получится для потока, параллельного оси Oz и обладающего всюду постоянной скоростью. Как раз такой поток мы и хотим получить «вправо» от точки C; проведём же через C заранее прямолинейную характеристику первого семейства. Чтобы подобрать вид стенки, начиная от точки D «вправо», нанесем на прямолинейной характеристике (так же, как и на кривой $\overset{\smile}{CD}$) ряд точек и, пользуясь операцией 1, начнём узнавать скорости в криволинейном четырёхугольнике, рассмотренном в задаче 2 (§ 11). Если мы возьмём крайнюю точку на прямолинейной характеристике достаточно далеко, нам надо будет затем лишь построить (путём интерполяции) линию тока, проходящую через D. Её мы и можем принять за искомую стенку.

Переходим к внешним задачам и прежде всего к вопросу об обтекании конического острия. Случай этот не поддаётся нашему методу, ибо на таком острие $r = 0$, а $v_r \neq 0$ и δ обращается в ∞.

§ 27. Осесимметрическое обтекание круглого конуса. Конические течения. Обтекание осесимметричных тел. Пусть поток, обладающий постоянной сверхзвуковой скоростью $v_1 > a_1$, набегает на круговой конус с вершиной в точке P и с осью вдоль оси Oz. Перед конусом образуется коническая поверхность разрыва (рис. 81) с вершиной в P; на этой поверхности линии тока претерпят, как всегда, излом, а затем начнётся обтекание конуса. В противоположность тому, что мы имели в плоской задаче при обтекании угла (§ 13 и рис. 32), линии тока, после прохождения разрыва, станут здесь кривыми. Простота задачи обтекания конуса заключается, однако, в том, что скорости будут иметь одну и ту же величину и направление во всех точках какого-либо конуса с осью Oz и с вершиной в P. Таким образом, наш поток не только не будет

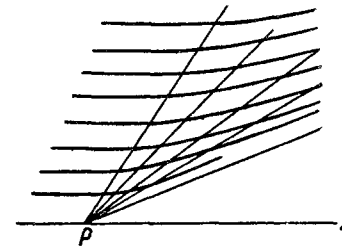

Рис. 81.

зависеть от полярного угла θ плоскости, перпендикулярной к оси Oz, но также не будет зависеть от расстояния s от точки P. Вводя в меридиональной плоскости (z, r) (плоскости, проходящей через ось Oz) полярные координаты (с полюсом в P) s и φ, будем таким образом считать, что скорости v_r и v_z зависят лишь от φ:

$$v_z = v_z(\varphi); \quad v_r = v_r(\varphi). \tag{27.1}$$

В плоскости (v_z, v_r) мы получим, исключая φ из (27.1), некоторую кривую

$$v_r = f(v_z),$$

отвечающую обтеканию нашего конуса. Построим эту кривую. Для этого обратимся к уравнениям (25.5) и (25.6) ($\Omega=0$) и, перейдя в них к переменным s и φ, положим $\partial v_r/\partial s = \partial v_z/\partial s = 0$. Получим вместо (25.5) после простых преобразований:

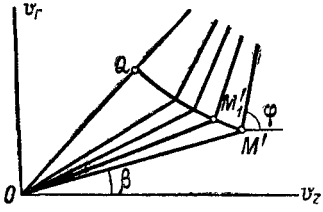

Рис. 82.

$$\frac{dv_r}{d\varphi} + \operatorname{ctg}\varphi \frac{dv_z}{d\varphi} = 0$$

или

$$\frac{dv_r}{dv_z} = \frac{df}{dv_z} = f' = -\operatorname{ctg}\varphi. \tag{27.2}$$

Отсюда заключаем, что направление нормали в некоторой точке M' нашей кривой $f(v_z)$ в плоскости (v_z, v_r) будет совпадать с направлением того радиуса-вектора в плоскости (z, r) (угол φ), скорость точек которого изображается точкой M' в плоскости (v_z, v_r) (оси Oz и Ov_z совпадают; рис. 82).

Обратимся теперь к уравнению (25.6). Оно примет в полярных координатах вид:

$$\left[(a^2 - v_z^2)\sin^2\varphi + v_r v_z \sin\varphi\cos\varphi\right]\frac{dv_z}{d\varphi} -$$

$$- \left[v_r v_z \sin^2\varphi + (a^2 - v_r^2)\sin\varphi\cos\varphi\right]\frac{dv_r}{d\varphi} = a^2 v_r,$$

и если заменить $dv_r/d\varphi$ на $dv_r/dv_z \cdot dv_z/d\varphi = f'\, dv_z/d\varphi$, то можно найти выражение для $d\varphi/dv_z$:

$$\frac{d\varphi}{dv_z} = \frac{(a^2 - v_z^2)\sin^2\varphi + v_r v_z \sin\varphi\cos\varphi - v_r v_z \sin^2\varphi f' - (a^2 - v_r^2)\sin\varphi\cos\varphi f'}{a^2 v_r}.$$

Наконец, заменяя f' по (27.2), мы получим:

$$\frac{d\varphi}{dv_z} = \frac{a^2 - (v_z\sin\varphi - v_r\cos\varphi)^2}{a^2 v_r}.$$

Вставляя сюда φ, выраженное по (27.2) через f, беря $v_r = f(v_z)$ и a^2 по уравнению Бернулли, получим дифференциальное уравнение

второго порядка для определения $f(v_z)$. Найдём теперь радиус кривизны R кривой $v_r = f(v_z)$ в точке M'. Очевидно, что

$$R = \frac{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''} = \frac{1}{\sin^3\varphi}\,\frac{1}{\frac{d}{dv_z}f'} = \frac{1}{\sin^3\varphi}\,\frac{1}{\frac{d\varphi}{dv_z}}\,\frac{1}{\frac{d}{d\varphi}f'} =$$

$$= \frac{\sin^2\varphi}{\sin^3\varphi}\,\frac{a^2 v_r}{a^2-(v_z\sin\varphi - v_r\cos\varphi)^2}$$

или

$$R = \frac{v_r}{\sin\varphi}\,\frac{1}{1-\left(\frac{v_z\sin\varphi - v_r\cos\varphi}{a}\right)^2}. \tag{27.3}$$

Выпишем ещё дифференциальное уравнение второго порядка, которому удовлетворяет $f(v_z)$. Это будет

$$f\frac{d^2f}{dv_2^2} = 1+\left(\frac{df}{dv_z}\right)^2 - \frac{\left(v_z + f\frac{df}{dv_z}\right)^2}{a^2}, \tag{27.4}$$

где

$$a^2 = \frac{\varkappa+1}{2}a_*^2 - \frac{\varkappa-1}{2}(v_z^2+f^2)\,^{1}).$$

Предположим теперь, что в какой-то точке M' нашей кривой нам известно φ, т. е. предположим, что мы знаем для нашего движения величину и направление скорости на каком-нибудь определённом конусе с вершиной в P. На основании (27.2) и (27.3) мы можем тогда дать графический способ приближённого построения кривой $v_r = f(v_z)$ для нашего движения. Зная φ, v_z, v_r, можем вычислить R по (27.3); откладывая это R по нормали в M' (направление её известно, ибо φ известно), найдём центр кривизны N для M' и проведём малую дугу круга радиуса R с центром в N. Взяв точку M_1' этой дуги, близкую к M', найдём угол наклона φ_1 в точке M_1' радиуса проведённого нами круга и снимем v_{r_1} и v_{z_1} как координаты точки M_1'. Мы можем теперь, вновь обратившись к (27.3), найти R_1 — радиус кривизны в точке M_1', построить центр кривизны N_1 и т. д.

Рассмотрим теперь вопрос об обтекании конуса с углом раствора $2\beta_0$. Пусть нам заранее известно, что угол раствора конуса

---

[1]) В пространстве (v_x, v_y, v_z) уравнение $v_r = f(v_z)$ представляет собой поверхность вращения вокруг оси v_z. А. А. Никольский исследовал также движения, в которых пространство годографа вырождается в любую поверхность или же, наконец, в линию. В последнем случае получается обобщение тех случаев плоских течений, в которых годографом служили эпициклоиды (см. ниже § 31).

Аналогичные результаты получили С. В. Валландер и Жермен (Jermain).

сильного разрыва, расположенного перед нашим конусом, будет $2\nu_0$. Построим гипоциссоиду, отвечающую скорости набегания $v_z = v_1$, $v_r = 0$, и при помощи угла ν_0 найдём величину скорости (v_z, v_r) (опуская перпендикуляр из точки $(v_1, 0)$ на прямую, наклонённую под углом ν_0 к оси v_z и отыскивая пересечение этого перпендикуляра с гипоциссоидой) после прохождения разрыва. Примем теперь наше ν_0 за отправной угол φ (рис. 82), а нашу скорость отметим в плоскости (v_z, v_r), и будем строить линию $v_r = f(v_z)$ до той её точки Q, где направление нормали к нашей кривой пойдёт в точности по направлению радиуса-вектора OQ этой точки; точка Q даст величину скорости в том месте, где скорость будет направлена вдоль конуса, на котором она измеряется, т. е. даст скорость на поверхности обтекаемого твёрдого конуса (угол OQ с осью z равен β_0).

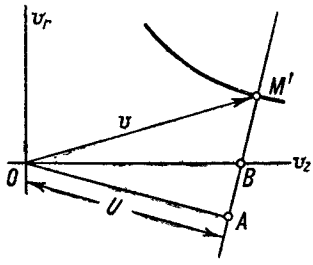

Рис. 83.

При построении, на основании (27.3), кривой $f(v_z)$ полезно заметить, что (27.3) может быть записано в виде

$$R = R_u \frac{1}{1 - \frac{U^2}{a^2}},$$

где $R_u = \overline{BM'}$ (рис. 83) есть отрезок нормали от точки M' до пересечения с осью v_z, а U есть проекция скорости V в точке M' на направление касательной к кривой $v_r = f(v_z)$ в этой точке.

Совершенно очевидно, что, зная кривую $v_r = f(v_z)$, мы будем знать всё движение, ибо, чтобы найти скорость на радиусе-векторе полярного угла φ (конус с углом раствора 2φ) достаточно будет найти на нашей кривой такую точку, чтобы нормаль в ней пошла под углом φ к оси z. Трудность состоит только в том, что в задачах на обтекание острия бывает задан угол острия, а не угол поверхности разрыва.

В работе Хантше и Вендта [1]) даются кривые, связывающие при различных значениях v_1/a_* величины β_0 и ν_0. Эти авторы взяли сперва ряд значений v_1/a_* ($v_1/a_* = 1{,}17$; $1{,}25$; $1{,}37$ и т. д.), построили для каждого из них гипоциссоиду, взяли на каждой такой гипоциссоиде по нескольку точек (8 или 9) и построили линии $f(v_z)$, выходящие из этих точек. Пример такого построения дан на рис. 84. Здесь $v_1/a_* = 1{,}6582$ ($v_1/a_1 = 2{,}0636$). «Концы» наших линий (т. е. те места, где нормаль к этим линиям совпадает с продолжением радиуса-вектора) соединены в свою очередь кривой (авторы упомянутой работы назвали эту кривую «яблоковидной»); числа, стоящие у концов линии $f(v_z)$,

[1]) Hantsche W., Wendt H., Mit Ueberschallgeschwindigkeit angeblasene Kegelspitzen. Jahrbuch deutschen Luftfahrtforschung, 1942.

означают отношение p_{0+}/p_{0-}, отвечающее тому или иному случаю. На рис. 85 изображено семейство яблоковидных кривых (верхняя полуплоскость) вместе с соответствующим семейством гипоциссоид (нижняя полуплоскость). На рис. 86 по горизонтальной оси отложены углы ν_0, по вертикали — углы β_0 и дано семейство кривых, зависящих от параметра v_1/a_*. Тут же дан рис. 87, где по оси абсцисс отложены $M_1 = v_1/a_1$, по оси ординат отложены ν_0, а кривые зависят от параметра β_0. Наконец, рис. 88 даёт величину $(p - p_1)/{}^1/_2\rho_1 v_1^2$, где p — давление на конусе, в функциях от угла β_0 для разных v_1/a_* [1]).

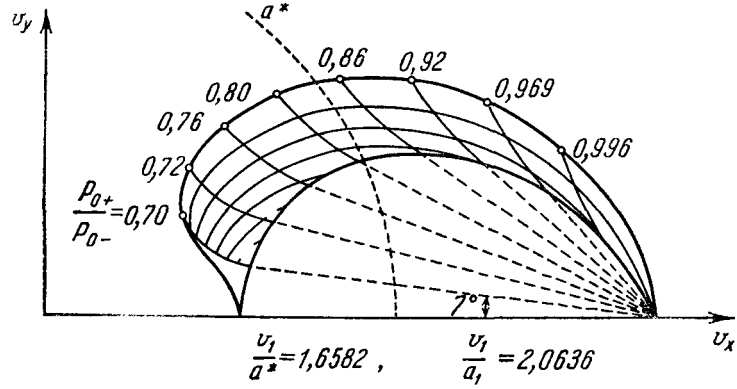

Рис. 84.

В решении рассмотренного типа «концы» линий $v_r = f(v_z)$ лежат на яблоковидной кривой, а «начинаются» эти линии на гипоциссоиде. Другой тип движения, описываемого уравнениями (27.2), (27.3), может быть получен в виде конического течения сжатия в сопле специального вида, в котором прямолинейный поток $v_z = v_1$, $v_r = 0$, начиная от некоторого конуса BPB (рис. 89), плавно переходит в коническое течение, а затем, после прохождения конической поверхности сильного разрыва APA, опять становится прямолинейным, но уже с новой скоростью $v_z = v_2$, $v_r = 0$ (Буземан).

Чтобы найти это движение (а заодно и форму стенки), можно задать скорость $v_2 (< a_*)$ после прохождения разрыва и угол φ_0 конуса разрыва. Тем самым мы можем определить значения v_z', v_r' скоростей перед прохождением разрыва, а затем, используя (27.3), построить соответствующую кривую $v_r = f(v_z)(L)$, подобно тому как мы это делали в случае обтекания конуса.

---

[1]) «Левые» ветви кривых на рис. 86 и 88 отвечают режиму обтекания со сверхзвуковыми скоростями на поверхности конуса, «правые» — с дозвуковыми (две точки пересечения гипоциссоид с радиусом-вектором).

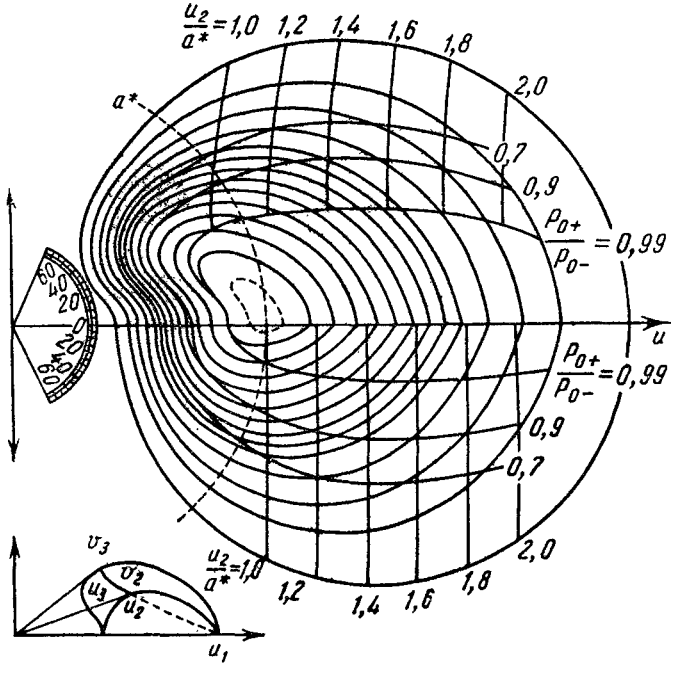
$\frac{u_2}{a^*}$=1,0 1,2 1,4 1,6 1,8 2,0
a*
0,7
0,9
$\frac{\rho_{0+}}{\rho_{0-}}$ = 0,99
u
$\frac{\rho_{0+}}{\rho_{0-}}$=0,99
0,9
0,7
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
$\frac{u_2}{a^*}$=1,0
v_3
v_2
u_3
u_2
u_1
20
40
20
0
20
40
60

Рис. 85.

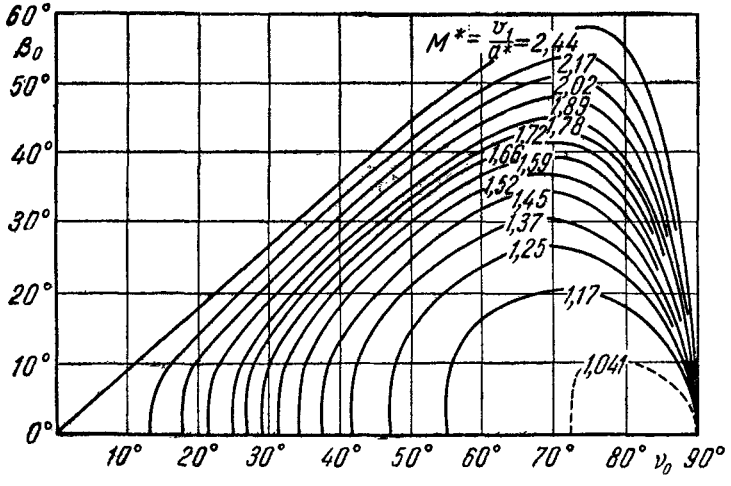
60°
β_0
50°
40°
30°
20°
10°
0°
$M^*=\frac{v_1}{a^*}$=2,44
2,17
2,02
1,89
1,78
1,72
1,66
1,59
1,52
1,45
1,37
1,25
1,17
1,041
10° 20° 30° 40° 50° 60° 70° 80° ν_0 90°

Рис. 86.

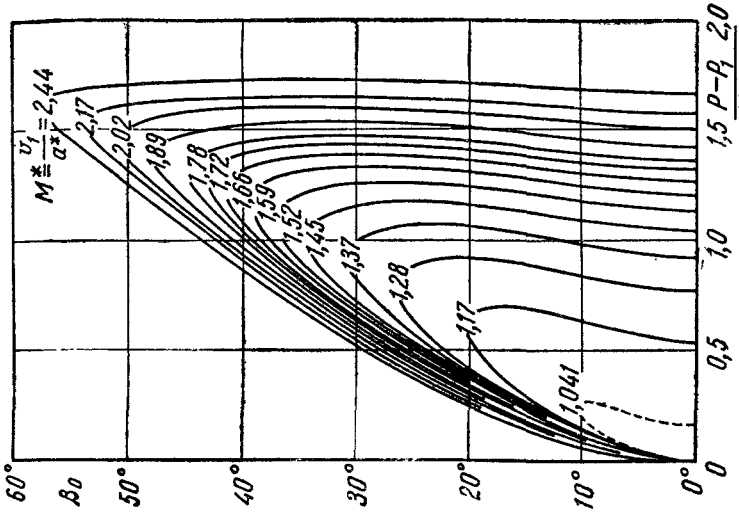
$M \equiv \frac{v_1}{a^*} = 2{,}44$
2,17
2,02
1,89
1,78
1,72
1,66
1,59
1,52
1,45
1,37
1,28
1,17
1,041
β_0
60°
50°
40°
30°
20°
10°
0°
0
0,5
1,0
1,5
$\frac{p-p_1}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2}$ 2,0

Рис. 88.

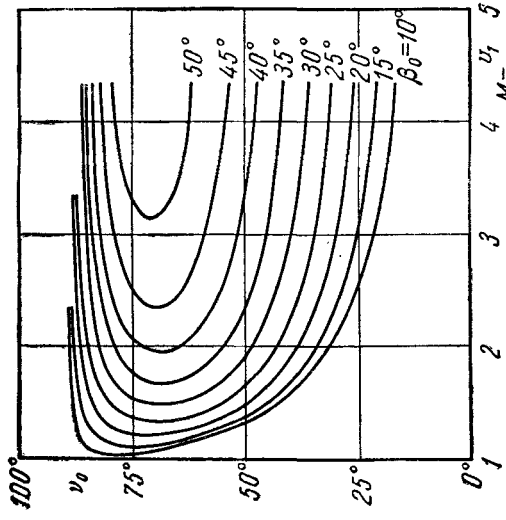
$\beta_0 = 10°$
15°
20°
25°
30°
35°
40°
45°
50°
$M = \frac{v_1}{a_1}$
1
2
3
4
5
v_0
100°
75°
50°
25°
0°

Рис. 87.

Для удобства можно вновь обратиться к гипоциссоиде (7.14), но теперь вместо v_1 следует подставить в эту формулу v_2 — скорость, возникающую после прохождения разрыва[1]). Уравнение для (v_z', v_r') примет вид (аналог (13.3)):

$$v_r^2 = (v_z - v_2)^2 \frac{v_z - \dfrac{a_*^2}{v_2}}{\dfrac{2}{\varkappa+1} v_2 + \dfrac{a_*^2}{v_2^2} - v_z}. \tag{27.5}$$

Так как теперь $v_2 < a_*$, то гипоциссоида (27.5) будет иметь иной вид, чем рассматривавшиеся до сих пор. Именно, кривая (27.5) состоит из изолированной точки $v_z = v_2$, $v_r = 0$ и из линии, располагающейся в полосе $2v_2/(\varkappa+1) + a_*^2/v_2 > v_z \geqslant a_*^2/v_2$ (см. рис. 90),

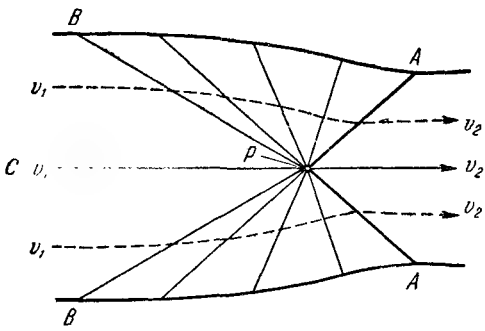

Рис. 89.

пересекающей ось v_z в точке a_*^2/v_z и имеющей асимптоту $v_z = 2v_2(\varkappa+1) + a_*^2/v_2$.

Кривая L будет теперь «начинаться» на гипоциссоиде, а «заканчиваться» на оси z (в точке B), где и определится скорость v_1.

Оба типа течений, рассмотренных нами, реализуются только при наличии конической поверхности сильного разрыва и являются течениями сжатия. Следующим образом доказывается, что движение 2-го типа не может существовать без поверхности сильного разрыва. Пусть наша кривая L может быть продолжена до пересечения с осью симметрии (пунктир на рис. 90) в точке D. Дифференцируя уравнение (27.4) по v_z и полагая $f = 0$, получим

$$f'f'' = 2\frac{v_z}{a^2}\left(1 + f'^2 + \frac{v_z^2}{a^2}\frac{\varkappa-1}{2}\right). \tag{27.6}$$

Равенство это показывает, что $f'f''$ должно быть положительным. С другой стороны, из рисунка видно, что $f' < 0$ около точки D, что же до f'', то, в силу (27.2), мы можем написать $f'' = -d(\operatorname{tg}\varphi)/dv_z$. Так как (см. рис. 89) $\operatorname{ctg}\varphi$ по мере продвижения слева направо все время растёт, переходя от отрицательных значений через нуль к положительным, а v_z уменьшается (течение сжатия), мы имеем $f'' > 0$; но тогда $f'f'' < 0$, и мы получим противоречие с (27.6). Это про-

[1]) См. аналогичное рассуждение в § 7.

тиворечие не имеет места в случае, отвечающем точке B, где $f' > 0$. Третий тип движений, удовлетворяющих (27.2), (27.3), был найден А. А. Никольским (1949). Это осесимметрическое коническое течение, при котором невозмущённый поток со скоростью v_1, начиная с некоторого характеристического конуса (с вершиной на оси симметрии), непрерывно разряжается. Течение это можно рассматривать как *внешнее* обтекание невозмущённым сверхзвуковым потоком некоего тела вращения — полубесконечного цилиндра, который после некоторого сечения начинает постепенно сужаться (см. рис. 89). Возможность существования такого течения видна из следующего рассуждения.

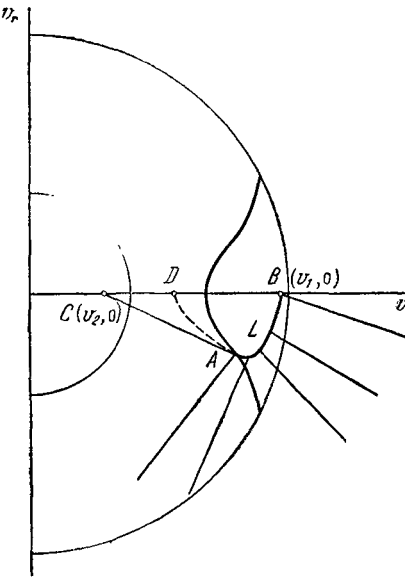

Рис. 90.

Возьмём в плоскости годографа скорости (рис. 91) некоторую точку $B_1(v_z', v_r')$. Через эту точку проходит бесконечное множество интегральных кривых уравнения (27.4). Среди этих кривых найдутся такие, которые будут обращены выпуклостью к оси v_2. В самом деле, по (27.3), если проекция U на касательную к нашей кривой скорости в точке B_1 будет меньше чем a, то радиус R будет отрицательным ($v_r < 0$), что и означает выпуклость соответствующей кривой L. Между тем всегда можно выделить такой угол с вершиной в точке B_1, что проекция скорости на любую прямую, проходящую через B_1 внутри этого угла, окажется меньше чем a. Итак, через B_1 проходит бесконечное множество интегральных кривых L, выпуклых по отношению к оси v_z. Если мы будем двигаться по одной из таких кривых по направлению к оси v_z, то, как легко видеть, выпуклость нарушаться не будет (точки перегиба не встретятся), и мы сможем

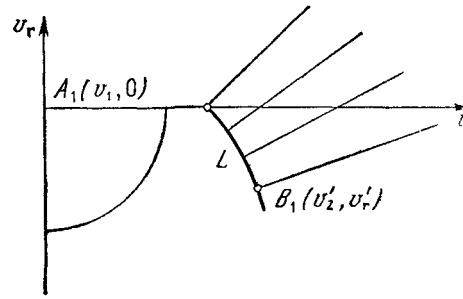

Рис. 91.

пройти по нашей линии L до оси v_z. Пусть мы попадём при этом в точку $A_1(v_1, 0)$. Наклон нормали к линии L в точке A_1 легко определить. Для этого достаточно положить в уравнении (27.4) $v_r = 0$, $v_z = v_1$. Получим

$$(f')_{A_1} = \pm \sqrt{M_1^2 - 1}, \tag{27.7}$$

где

$$M_1 = \frac{v_1}{a_1}, \quad a_1^2 = \frac{\varkappa+1}{2} a_*^2 - \frac{\varkappa-1}{2} v_1^2.$$

Соответствующий (в смысле равенства (27.2)) конус K_1 (рис. 92) будет иметь наклон φ_1, определяемый равенством

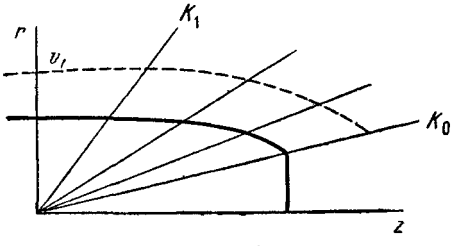

Рис. 92.

$$\sin \varphi_1 = \frac{1}{M_1}.$$

Следовательно, конус K_1 будет характеристическим конусом. Таким образом, движение, определяемое нашей линией L, можно представить в виде прямолинейного потока со скоростью v_1, который после прохождения характеристического конуса K_1 начинает плавно поворачиваться, расширяясь.

Точка B_1 нашей кривой не может быть расположена сколь угодно далеко от оси v_z. Двигаясь по L, начиная от A_1, мы рано или поздно дойдём до точки перегиба ($f'' = 0$) этой кривой, после чего кривая L станет обращаться вогнутостью к оси v_z. При движении от A_1 по L нормаль к L вращается по часовой стрелке; после прохождения точки перегиба нормаль начнёт вращаться против часовой стрелки, т. е. мы вынуждены будем возвращаться в область течения, уже описанную кривой $\overset{\frown}{A_1B_1}$, и это решение не имеет смысла. Поэтому движение наше может быть доведено только до точки перегиба кривой L. Приравнивая нулю f'' в уравнении (27.4), мы можем найти значение f_0' на месте точки перегиба:

$$f_0' = \frac{v_r v_z + a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_z^2 - a^2}.$$

Наклон f_0' отвечает некоторому конусу K_0 (рис. 92) (он также есть конус характеристик). Раствор продольного конуса K_0 будет различен для различных интегральных кривых (различных точек B_1). Течение этого типа можно построить (и параллельно построить соответствующую обтекаемую поверхность), отправляясь от оси $v_r = 0$ и задавая скорость v_1. Затруднением, однако, является то, что линия $v_r = 0$ является особой линией для уравнения (27.4) и такой, что через каждую точку A_1 оси $v_r = 0$ проходит бесконечное множество интегральных линий L и кривизны

всех этих линий будут одни и те же[1]). Окончательно можно остановиться на следующем способе построения течений Никольского. Задаёмся значением v_1; по этому значению определим M_1 и построим f_1' по формуле (27.5)

$$f_1' = -\sqrt{M_1^2 - 1}.$$

Отойдём теперь в плоскости годографа от оси v_z на небольшое расстояние $f_2 \approx 0{,}01 a_*$ по нормали ($f_2 = v_r$). Соответствующее значение $(v_z)_2$ находится по приближённой формуле (замена производной конечной разностью):

$$(v_z)_2 - v_1 \approx \frac{1}{f_1'} f_2.$$

Мы получили точку $A_2((v_z)_2, f_2)$, в которой можем найти a_2 по уравнению Бернулли:

$$a_2^2 = \frac{\varkappa+1}{2} a_*^2 - \frac{\varkappa-1}{2}\left[(v_z^2)_2 - f_2^2\right].$$

В точке A_2 зададим теперь значение f_2'. Так как, по определению нашей кривой L, проекция скорости на касательную к L должна быть меньше скорости звука ($U < a$), и так как проекция на характеристическое направление будет всегда в точности равна скорости звука, мы должны выбрать f_2' так, чтобы наклон L оказался бо́льшим, чем наклон, отвечающий (27.2). В остальном f_2' может быть произвольной, и от выбора этой величины зависит, какую именно интегральную кривую мы получим в конце расчёта.

---

[1]) Действительно, по формуле (27.4) мы получим для $(f'')_1$ неопределённость типа 0/0, которую надо раскрыть по правилу Лопиталя:

$$\lim_{f\to 0} f'' = \lim_{f\to 0} \frac{1 + f'^2 - \frac{(v_z + ff')^2}{a^2}}{f} =$$

$$= \lim_{f\to 0} \frac{1}{f_1}\left\{2f'f'' - \frac{2}{a^2}(v_z + ff')\left[1 + ff'' + f'^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (v_z + ff')\frac{\varkappa-1}{2}\frac{v_z + ff'}{a^2}\right]\right\} = 2(f'')_{f\to 0} - \frac{2}{a_1^2} v_1 \left(1 + f_1^2 + \frac{\varkappa-1}{2}\frac{v_1^2}{a_*^2}\right)\frac{1}{f_1'}.$$

Отсюда, принимая во внимание (27.7) найдём

$$f_1'' = \frac{\varkappa+1}{a_1}\frac{M_1^3}{\sqrt{M_1^2 - 1}}.$$

После того как f_2' известно, мы можем найти f_2'' по формуле (27.4):

$$f_2''=\frac{1}{f_2}\left\{1+f_2'^2-\frac{[(v_z)_2+f_2f_2']^2}{a_2^2}\right\}.$$

Дальнейшее построение можно проводить шаг за шагом, задавшись близкими друг к другу значениями $(v_z)_3$, $(v_z)_4$, ..., $(v_z)_n$ величины v_z. Если f_{n-1}, f'_{n-1}, f''_{n-1} известны, то величины f_n, f'_n найдутся по формуле

$$f_n=f_{n-1}+f'_{n-1}[(v_z)_n-(v_z)_{n-1}];\quad f'_n=f'_{n-1}+f''_{n-1}[(v_z)_n-(v_z)_{n-1}],$$

величина a_n найдётся затем из уравнения Бернулли:

$$a_n^2=\frac{\varkappa+1}{2}a_*^2-\frac{\varkappa-1}{2}[(v_z^2)_n+f_n^2],$$

а f''_n из соотношения

$$f''_n=\frac{1}{f_n}\left\{1+f_n'^2-\frac{[(v_z)_n+f_nf'_n]^2}{a_n^2}\right\}.$$

Вычисление надо вести до тех пор, пока f'' не станет нулём. Расчёты ведутся практически, конечно, в безразмерных величинах (v_z/a_*, v_r/a_* и т. д.). На рис. 93 даны примеры, взятые из работы

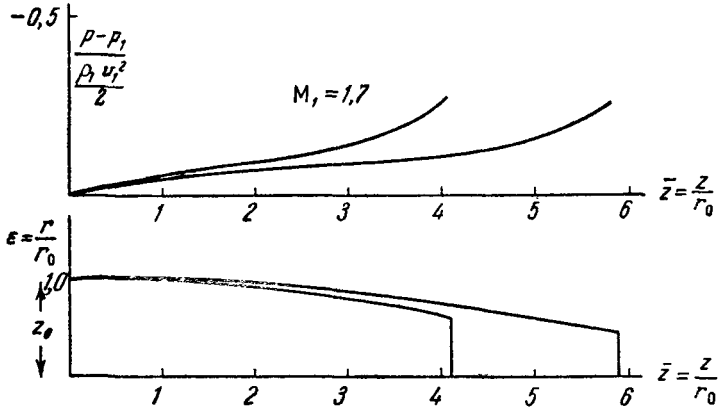

Рис. 93.

Никольского, двух профилей рассматриваемого типа, отвечающих одному и тому же значению $M_1=1,7$. Здесь же показано распределение давления вдоль профиля Никольского.

Задача обтекания произвольного тела вращения, имеющего впереди остриё, и с осью вращения, расположенной вдоль потока, была

исследована впервые Ф. Франклем. Угол острия должен быть, как и в плоском случае, не слишком велик, чтобы не образовалось дозвуковых скоростей. Если это условие выполнено, то задача обтекания решается без труда. В меридиональной плоскости имеем контур с остриём в P (рис. 94). Пусть обтекаемое тело представляется близ P в виде конуса, а затем контур его начинает плавно переходить в криволинейный. Перед конической частью (отрезок контура $\overline{PA}$) образуется коническая поверхность разрыва (линия $\overline{PB}$), и мы можем найти движение в области между $\overline{PA}$ и $\overline{PB}$ по методу, изложенному выше; проведём при этом через A характеристику $\overset{\smile}{AB}$ первого семейства, отметим на ней ряд точек: M_1, M_2, ... (рис. 94) и построим элементы характеристик второго семейства, проходящие через эти точки. Пусть M_1 — самая близкая к A точка, $\overset{\smile}{M_1C}$ — проведённый через неё элемент характеристики второго семейства, C — точка контура. При помощи операции 2 (§ 26) найдём скорости в точке C и проведём через C характеристику первого семейства до пересечения в точке N_1 с характеристикой второго семейства, идущей из M_2. Скорости в N_1 найдутся при помощи операции 1 (§ 26) и т. д. Так мы заполним всю область между линией $\overset{\smile}{AB}$, контуром $\overset{\smile}{AE}$ и характеристикой второго семейства $\overset{\smile}{BE}$, выходящей из B. Из близкой к B точки N_n характеристики $\overset{\smile}{BE}$ проведём элемент характеристики первого семейства до пересечения D с продолжением прямой $\overline{PB}$. Точка D лежит на поверхности разрыва; чтобы найти скорость в D, мы должны поступить так же, как в операциях 2 и 3, только вместо пересечения соответствующего отрезка характеристики плоскости (v_z, v_r) с радиусом-вектором (или с кругом) нам придётся искать пересечение с гипоциссоидой. Определив в D скорость (при помощи гипоциссоиды) и направление поверхности разрыва, проведём из D характеристику второго семейства до пересечения Q с характеристикой $\overset{\smile}{P_nQ}$ первого семейства (P_n — точка, близкая к N_n и лежащая на $\overset{\smile}{BE}$).

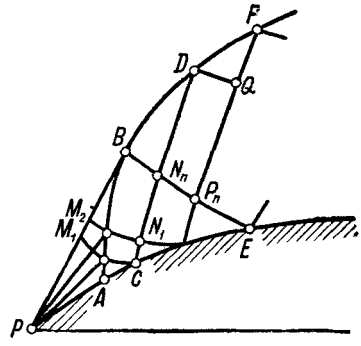

Рис. 94.

Ход решения дальше был бы ясен (определение скорости в Q, проведение характеристики $\overset{\smile}{QF}$ до пересечения с отрезком $\overset{\smile}{DF}$ линии разрыва и. т. д.), если бы не пришлось учесть появления вихрей. Последние не появлялись при обтекании конуса, ибо поверхность

разрыва там пересекала меридиональную плоскость по прямой; но теперь линия разрыва есть кривая, после прохождения возникнут вихри, и придётся воспользоваться формулами (25.9), (25.10). «Расстояние» δ из § 26 найдётся теперь по более сложной, чем (26.5), формуле, содержащей ϑ и $d\vartheta/d\psi$. Впрочем, вычисления $d\vartheta/d\psi$ и ϑ совершенно аналогичны вычислениям этих величин для плоской задачи (§ 13).

Изложенный здесь графический приём решения задачи на обтекание при всей его простоте отличается громоздкостью. Могут быть предложены другие методы использования соотношения на характеристиках (даже если по-прежнему говорить о ручном счёте). А. А. Дородницын предлагает использовать формулы (25.13) и (25.14) (при движении вдоль характеристик), выполняя в них интегрирование (вдоль той или иной характеристики) с попутной аппроксимацией самих характеристик в виде кривых второго порядка по r; при этом подынтегральные функции там, где они остаются, также аппроксимируются тем или иным способом.

Применение этого приёма иллюстрируем на случае наличия при обтекании криволинейного скачка уплотнения.

Пусть обтекаемое тело вращения имеет с самого начала кривизну, отличную от нуля (рис. 95). Надо определить форму скачка уплотнения и течение позади него.

Возьмём на поверхности обтекаемого тела вращения вблизи носика P точку A. Пусть через эту точку проходит характеристика 2-го семейства $\overset{\frown}{AC}$ и характеристика первого семейства $\overset{\smile}{AB}$; точки C, B лежат на поверхности разрыва. Форма этих обеих характеристик, так же, как и форма поверхности разрыва, неизвестна. Мы будем их аппроксимировать с помощью трёх парабол.

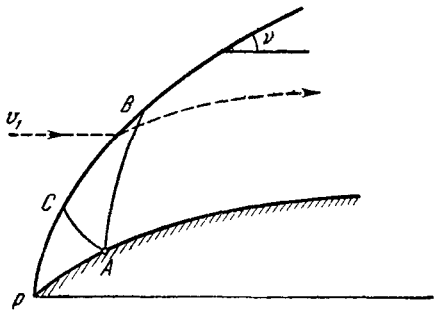

Рис. 95.

Для поверхности разрыва примем

$$z = c_1 r + c_2 r^2, \qquad (27.8)$$

где c_1, c_2 подлежат определению.

Для характеристики 1-го семейства $\overset{\smile}{AB}$ напишем

$$z = z_a + a_1 (r - r_a) + b_1 (r - r_a)^2, \qquad (27.9)$$

где (z_a, r_a) — координаты (известные) точки A, a_1 и a_2 — постоянные, подлежащие определению.

Наконец, для характеристики 2-го семейства $\overset{\frown}{AC}$ напишем

$$z = z_a + a_2 (r - r_a) + b_2 (r - r_a)^2, \qquad (27.10)$$

где a_2 и b_2 заранее неизвестны.

Обозначим через ν угол касательной к поверхности разрыва с осью z. Дифференцируя (27.8), получим

$$\operatorname{ctg} \nu_P = c_1, \quad \operatorname{ctg} \nu_B = \operatorname{ctg} \nu_P + 2c_2 r_b,$$

где ν_P, ν_B — углы наклона поверхности разрыва в точках P и B соответственно, r_b — ордината (неизвестная) точки B. Таким образом, вместо (27.8) можем написать

$$z = \operatorname{ctg} \nu_P r + \frac{\operatorname{ctg} \nu_B - \operatorname{ctg} \nu_P}{2r_b} r^2. \tag{27.11}$$

В частности, в точке B

$$z_b = \frac{1}{2} r_b (\operatorname{ctg} \nu_B + \operatorname{ctg} \nu_P). \tag{27.12}$$

Угол ν_P можно считать известным и равным углу скачка для конуса, касательного к телу в точке P. Три известных велнчины: ν_B, z_b, r_b связаны одним соотношением (27.12). Далее, дифференцируя уравнение (27.9) и учитывая (27.12), мы можем написать

$$\operatorname{ctg} (\beta_A - \alpha_A) = a_1, \quad \operatorname{ctg} (\beta_B + \alpha_B) = \operatorname{ctg} (\beta_A + \alpha_A) + 2b_1 (r_b - r_a),$$

так что для точки B по (27.9) имеем

$$z_b - z_a = \frac{r_b - r_a}{2} [\operatorname{ctg} (\beta_A + \alpha_A) + \operatorname{ctg} (\beta_B + \alpha_B)]. \tag{27.13}$$

В этом соотношении β_A — угол касательной к контуру в точке A — известеи, но неизвестны величины α_A, β_B, α_B, z_b, r_b. Так как точка B лежит на поверхности разрыва, то значения β_B и α_B могут быть выражены через ν_B. Именно, из условия непрерывности скорости, касательной к поверхности разрыва, имеем

$$v_b = v_1 \cos \nu_B \sec (\nu_B - \beta_B). \tag{27.14}$$

Здесь v_1 — скорость набегающего потока, скорость v_b выражается через угол Маха α_B как всегда с помощью соотношения (9.22). Кроме того, деля (7.17) на (7.16), можем получить

$$\operatorname{tg} \beta_B = \operatorname{ctg} \nu_B - \frac{\operatorname{ctg} \nu_B}{1 + \dfrac{2}{\varkappa + 1} \left(\dfrac{a_1^2}{v_1^2} - \sin^2 \nu_B \right)}. \tag{27.15}$$

Таким образом, в качестве неизвестных остаются четыре величины: ν_B, α_A, r_b, z_b.

Воспользуемся теперь соотношением (25.13). Проинтегрируем его вдоль линии $\widetilde{AB}$

$$\beta_B - \beta_A = \zeta\left(\frac{v_b}{a_*}\right) - \zeta\left(\frac{v_a}{a_*}\right) + \int_A^B \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\varkappa - 1} d \ln \vartheta - \int_A^B \frac{\sin \beta \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} \frac{dr}{r} \tag{27.16}$$

(функция ζ определена по формуле (10.8)).

Вклад первого интеграла правой части (27.16) незначителен, приближённо можно принять, в качестве подынтегрального выражения этого интеграла,

значение его в одной какой-то точке, например до прохождения поверхности разрыва. Выражение, входящее во второй интеграл, можно аппроксимировать в виде

$$\frac{\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}\approx M+\frac{N}{r},$$

определяя M и N так, чтобы соотношение это выполнялось в точках A и B:

$$\frac{\sin\beta_A\sin\alpha_A}{\sin(\beta_A-\alpha_A)}=M+\frac{N}{r_a},\quad \frac{\sin\beta_B\sin\alpha_B}{\sin(\beta_B-\alpha_B)}=M+\frac{N}{r_b}.$$

Тогда соотношение (27.16) примет вид

$$\beta_B-\beta_A=\zeta\left(\frac{v_b}{a_*}\right)-\zeta\left(\frac{v_a}{a_*}\right)+\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{\varkappa-1}\ln\frac{\vartheta_b}{\vartheta_a}-$$
$$-\frac{\sin\beta_A\sin\alpha_A}{\sin(\beta_A+\alpha_A)}\left(1+\frac{r_a}{r_a-r_b}\ln\frac{r_b}{r_a}\right)+\frac{\sin\beta_B\sin\alpha_B}{\sin(\alpha_B+\beta_B)}\left(1+\frac{r_b}{r_a-r_b}\ln\frac{r_b}{r_a}\right). \tag{27.17}$$

Здесь β_A, r_a известны, β_B и r_b выражаются через ϑ_B, ϑ_B найдётся по ν_B с помощью (7.2), (7.10); что же до ϑ_A, то оно известно и определяется через ν_P, ибо вдоль линии тока (обтекаемой поверхности) ϑ не меняется. Неизвестными являются по-прежнему ν_B, r_b, z_b, α_A.

Таким образом, мы имеем три соотношения (27.12), (27.13) и (27.17), содержащие четыре неизвестных. Чтобы замкнуть задачу, используем соотношение вдоль характеристики $\overset{\smile}{AC}$. Точка C находится на поверхности разрыва (27.11); значит, во-первых, можно написать

$$z_c=\operatorname{ctg}\nu_P r_c+\frac{\operatorname{ctg}\nu_B-\operatorname{ctg}\nu_P}{2r_b}r_c^2 \tag{27.18}$$

и, во-вторых (как результат дифференцирования),

$$\operatorname{ctg}\nu_c=\operatorname{ctg}\nu_P+\frac{\operatorname{ctg}\nu_B-\operatorname{ctg}\nu_P}{r_b}r_c. \tag{27.19}$$

В последних двух равенствах содержатся новые три неизвестные величины: z_c, r_c, ν_c.

Запишем, наконец, условия на характеристике (27.10)

$$z_c=z_a+\frac{1}{2}(r_c-r_a)[\operatorname{ctg}(\beta_A-\alpha_A)+\operatorname{ctg}(\beta_c-\alpha_c)] \tag{27.20}$$

и соотношение (25.14), проинтегрированное вдоль $\overset{\smile}{AC}$

$$\beta_c-\beta_A=\zeta\left(\frac{v_a}{a_*}\right)-\zeta\left(\frac{v_c}{a_*}\right)-\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{\varkappa-1}\ln\frac{\vartheta_c}{\vartheta_a}+$$
$$+\frac{\sin\beta_A\sin\alpha_A}{\sin(\beta_A-\alpha_A)}\left(1+\frac{r_a}{r_a-r_c}\ln\frac{r_c}{r_a}\right)-\frac{\sin\beta_c\sin\alpha_c}{\sin(\beta_c-\alpha_c)}\left(1+\frac{r_c}{r_a-r_c}\ln\frac{r_c}{r_a}\right). \tag{27.21}$$

В равенстве (27.20) величины β_c, v_c и ϑ_c находятся через ν_c, а остальные величины введены были выше. Таким образом, мы имеем семь трансцендент-

ных уравнений: (27.12), (27.13), (27.17) — (27.21) с семью неизвестными r_b, z_b, r_c, z_c, α_A, ν_B, ν_c. Практически решение этих уравнений облегчается тем, что r_c будет значительно меньше, чем r_b, так что ν_c очень близко к ν_p. Положив в первом приближении $\nu_c = \nu_p$, мы получим

$$z_c \approx r_c \operatorname{ctg} \nu_p, \quad \vartheta_c \approx \vartheta_p.$$

Подставляя эти величины в (27.20), определим r_c и z_c через известные величины r_a, z_a, β_A, β_c, α_c и неизвестную величину α_A. Затем, вставляя найденные r_c, z_c в (27.21), найдём и α_A. После того как α_A получено, сразу можно найти из системы (27.12), (27.13) величины z_b, r_b через ν_B и затем из уравнения (27.17) найти ν_B. Теперь подставим найденные значения ν_B и r_b в (27.18), (27.19). При этом мы получим новые значения z_c и ν_c в функциях от r_c, а используя (27.20), (27.21), определим исправленное значение α_A. Переходя снова к системе (27.12), (27.13), (27.17), найдём исправленные значения ν_B и r_b и т. д.

Наконец заметим, что при решении осесимметрических задач на электронных быстродействующих машинах удобно использовать переменные, аналогичные тем, что были введены в § 11 (по Элерсу). Этот вопрос подробно рассмотрен в упомянутой выше статье Элерса (стр. 68), а также в работе П. И. Чушкина [1]).

§ 28. Пространственная задача. Линеаризация уравнений. Снаряд, движущийся под углом к оси симметрии. Обращаясь к общему пространственному случаю установившегося движения, напишем уравнения движения:

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{V} = \operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V}}{2} - \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\Omega} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \tag{28.1}$$

($\boldsymbol{\Omega}$ — вектор вихря), уравнение неразрывности:

$$\operatorname{grad} \ln \rho \cdot \boldsymbol{V} + \operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0 \tag{28.2}$$

и уравнение притока энергии:

$$\boldsymbol{V} \cdot \operatorname{grad} \frac{p^{1/\varkappa}}{\rho} = 0. \tag{28.3}$$

Уравнение (28.3) равносильно тому условию, что величина

$$\frac{p^{1/\varkappa}}{\rho} = \vartheta$$

сохраняется в частице, т. е., вследствие стационарности движения, на каждой линии тока. Умножая (28.1) скалярно на $\boldsymbol{V}$, получим, так как

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \vartheta p^{-1/\varkappa} \operatorname{grad} p = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \vartheta \operatorname{grad} p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}},$$

[1]) Чушкин П. И., Затупленные тела простой формы в сверхзвуковом потоке газа, ПММ, т. XXIV, в. 5, 1960.

для величины i_0:

$$\frac{V \cdot V}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \vartheta p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = i_0 \tag{28.4}$$

сохраняется на каждой линии тока. Мы примем, как и раньше, что вообще

$$i_0 = \text{const}.$$

Тогда (28.2) после преобразований, аналогичных тем, что были сделаны в § 9, даст:

$$(v_x^2 - a^2)\frac{\partial v_x}{\partial x} + (v_y^2 - a^2)\frac{\partial v_y}{\partial y} + (v_z^2 - a^2)\frac{\partial v_z}{\partial z} +$$
$$+ v_x v_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + v_x v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + v_y v_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) = 0, \tag{28.5}$$

где, как раньше,

$$a^2 = \frac{\varkappa p}{\rho} = \varkappa \vartheta p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \varkappa \vartheta^{\varkappa} \rho^{\varkappa-1}.$$

Предположим, что поле скоростей в нашем движении может быть представлено в виде:

$$v_x = v_1 + v_x'; \quad v_y = v_y'; \quad v_z = v_z',$$

где v_x', v_y', v_z' — бесконечно малые, зависящие от x, y, z функции, а v_1 — постоянная величина. Такое движение получится, например, если поток скорости v_1, параллельный оси x, набегает на бесконечно тонкое, наклонённое под бесконечно малым углом атаки к оси x крыло, или же на бесконечно тонкий и бесконечно мало отклонённый от своей оси симметрии снаряд и т. п.

В свою очередь, давление p и плотность ρ будем искать в виде:

$$p = p_1 + p'; \quad \rho = \rho_1 + \rho',$$

где p_1 и ρ_1 — постоянные; при этом

$$p_1 = \vartheta_1^{\varkappa} \rho_1^{\varkappa} \tag{28.6}$$

и

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \vartheta_1 p_1^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = i_0. \tag{28.7}$$

По аналогии с тем, что было в подобных случаях в плоской задаче (приближение Аккерета и Буземана для тонких крыльев), мы и здесь вправе считать, что, с точностью до малых второго порядка,

вихри будут отсутствовать, если на бесконечности поток был потенциальным. Будем же считать, что существует потенциал скоростей Φ:

$$V = \operatorname{grad} \Phi, \tag{28.8}$$

причём

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi', \tag{28.9}$$

где

$$\Phi_1 = v_1 x,$$

а Φ' — бесконечно малая функция от x, y, z такая, что

$$v'_x = \frac{\partial \Phi'}{\partial x}; \quad v'_y = \frac{\partial \Phi'}{\partial y}; \quad v'_z = \frac{\partial \Phi'}{\partial z}. \tag{28.10}$$

Теперь уравнения (28.1) могут быть заменены одним уравнением Бернулли (28.4) и уравнением (28.5), причём будет

$$\vartheta = \vartheta_1 = \text{const}.$$

Уравнение Бернулли даст, если ограничиваться малыми первого порядка:

$$\frac{v_1^2 + 2v_1 v'_x}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \vartheta_1 p_1^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \left(1 + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{p'}{p_1}\right) = i_0,$$

или вследствие (28.7) и (28.6):

$$v_1 v'_x + \frac{p'}{\rho_1} = 0. \tag{28.11}$$

Вводя потенциал скоростей, напишем ещё

$$v_1 \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \frac{p'}{\rho_1} = 0. \tag{28.12}$$

Уравнение (28.5) примет вид, если ограничиться малыми первого порядка:

$$(v_1^2 - a_1^2) \frac{\partial v'_x}{\partial x} - a_1^2 \frac{\partial v'_y}{\partial y} - a_1^2 \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0,$$

где $a_1^2 = \varkappa p_1 / \rho_1$ или, если разделить на a_1^2 и ввести Φ':

$$\left(1 - \frac{v_1^2}{a_1^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z^2} = 0. \tag{28.13}$$

Прежде чем идти дальше, заметим, что линеаризация, которую мы только что произвели, не будет точной в двух случаях: когда $v_1 \approx a_1$ (околозвуковые течения) и когда $v_1 \gg a_1$ (гиперзвуковые случаи). В обоих случаях мы можем провести частичную линеаризацию. В первом случае мы можем построить уравнение, заменяющее

уравнение (28.13), следующим образом. Пусть для простоты $v_1 = a_1$. Тогда обе эти величины равны a_* и мы можем написать

$$v_x = a_* + \frac{\partial \varphi'}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi'}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi'}{\partial z}, \tag{28.14}$$

где $\frac{\partial \varphi'}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi'}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi'}{\partial z}$ малы по сравнению с a_*. Запишем теперь уравнение (28.5) в виде:

$$\left[(\varkappa+1)\left(a_*^2 - \varphi_x^2\right) - (\varkappa-1)\left(\varphi_y^2 + \varphi_z^2\right)\right]\varphi_{xx} + \left[(\varkappa+1)\left(a_*^2 - \varphi_y^2\right) - \right.$$
$$\left. - (\varkappa-1)\left(\varphi_x^2 + \varphi_z^2\right)\right]\varphi_{yy} + \left[(\varkappa+1)\left(a_*^2 - \varphi_z^2\right) - (\varkappa-1)\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right)\right]\varphi_{zz} -$$
$$- 4\left(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + \varphi_y\varphi_z\varphi_{yz} + \varphi_z\varphi_x\varphi_{zx}\right) = 0 \tag{28.15}$$

(это аналог уравнения (15.1)) и оставим лишь главные члены в квадратных скобках. Именно, в первой скобке мы получим, пренебрегая $\varphi_y^2 + \varphi_z^2$, $2(\varkappa+1)a_*\varphi_x'$; во второй и третьей квадратных скобках оставим только $2a_*^2$, заменим в остальных членах φ_x на a_* и отбросим член, содержащий произведение трёх малых величин: $\varphi_y'\varphi_z'\varphi_{yz}'$. Мы получим вместо (28.13):

$$(\varkappa+1)\varphi_x'\varphi_{xx}' + a_*\left(\varphi_{yy}' + \varphi_{zz}'\right) - 2\varphi_y'\varphi_{xy}' - 2\varphi_z'\varphi_{xz}' = 0. \tag{28.16}$$

Заметим далее, что если $O(\varphi_x') = \varepsilon$, то порядок v_y' будет $\varepsilon^{3/2}$. Действительно, пусть порядок v_y' будет ε^α; сопоставляя 1-й и 2-й члены уравнения (28.16), замечаем, что $O(\varphi_{yy}') = O\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right) = \varepsilon^2$, значит дифференцирование по y имеет порядок $\varepsilon^{2-\alpha}$; но тогда по (28.14), так как $O(\varphi') = O\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\right) = \varepsilon$, имеем $O(v_y) = O\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y}\right) = \varepsilon^{3-\alpha}$. Итак, $\varepsilon^{3-\alpha} = \varepsilon^2$, т. е. $\alpha = 3/2$. Аналогичным путём докажем, что $O(\varphi_z') = \varepsilon^{3/2}$. Но тогда $O\left(\varphi_y'\varphi_{xy}'\right) = O\left(\varphi_z'\varphi_{xz}'\right) = \varepsilon^3$ и мы можем пренебречь двумя последними членами уравнения (28.16). Получим окончательно взамен (28.13)

$$(\varkappa+1)\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + a_*^2\left(\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2}\right) = 0. \tag{28.17}$$

Во втором случае — в случае гиперзвуковых движений — мы получим уравнения, совершенно аналогичные уравнениям (23.21) — (23.23) плоского случая. Вывод их очевиден и мы на нём не останавливаемся.

Вернёмся к детальному исследованию случаев, описываемых уравнением (28.13).

Решение нашей задачи сводится к определению функции Φ' из линейного уравнения (28.13) с постоянными коэффициентами; при

этом давление определится из уравнения (28.12). В качестве краевых условий надо принять:

$$\frac{\partial(\Phi_1+\Phi')}{\partial n}=0 \tag{28.18}$$

на обтекаемых твёрдых стенках, или

$$p_1+p'=\text{const.}$$

на свободной поверхности.

Можно указать сразу же ряд замечательных частных решений уравнения (28.13). Именно, если формально перейти от переменных x, y, z к переменным $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, так что

$$\bar{x}=x;\quad \bar{y}=\sqrt{1-\frac{v_1^2}{a_1^2}}\,y;\quad \bar{z}=\sqrt{1-\frac{v_1^2}{a_1^2}}\,z, \tag{28.19}$$

то уравнение (28.13) перейдёт в уравнение Лапласа, и мы можем в качестве решения взять, например, потенциал источника, находящегося в точке (0, 0, 0):

$$\Phi'=\frac{\text{const.}}{\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2}}.$$

Возвращаясь к старым переменным, получим в качестве решения уравнения (28.13):

$$\Phi'=\frac{\text{const.}}{\sqrt{x^2+\left(1-\frac{v_1^2}{a_1^2}\right)(y^2+z^2)}}. \tag{28.20}$$

Если $v_1\ll a_1$, то приближённо (28.19) будет иметь тот же вид, что и потенциал, в несжимаемой жидкости источника, помещённого в точке (0, 0, 0). Мы можем, таким образом, считать, что потенциал вида

$$\Phi(x,\ y,\ z)=v_1x+\frac{c}{\sqrt{(x-x')^2+\left(1-\frac{v_1^2}{a_1^2}\right)[(y-y')^2+(z-z')^2]}}$$

представляет в сжимаемой жидкости результат наложения потока v_1, параллельного оси x, на источник бесконечно малой интенсивности, помещённый в точке $(x',\ y',\ z')$. Так как уравнение (28.13) линейно, то сумма выражений вида

$$\Phi_Q=\frac{c}{\sqrt{(x-x')^2+\left(1-\frac{v_1^2}{a_1^2}\right)[(y-y')^2+(z-z')^2]}} \tag{28.21}$$

для разных (x', y', z') и c будет также решением (28.13). Кроме того, решениями будут функции, получающиеся путём дифференцирования правой части (28.21).

Потенциалы вида Φ_Q мы можем теперь использовать для краевой задачи газовой динамики. Пусть для конкретности речь идёт об обтекании крыла конечного размаха, бесконечно тонкого и бесконечно мало отклонённого к оси x. Поместим во всех точках $M'(x', y', z')$ поверхности крыла источники с потенциалами Φ_Q вида (28.21), считая, что c есть функция от x', y', z', а затем возьмём Φ' в виде интеграла от Φ_Q, распространённого по поверхности крыла:

$$\Phi'(x, y, z) = \int\int \frac{c(M')\, d\sigma}{\sqrt{(x-x')^2 + \left(1 - \frac{v_1^2}{a_1^2}\right)[(y-y')^2 + (z-z')^2]}}. \quad (28.22)$$

Вид функции c останется определить из краевого условия (28.18), которое, если ограничиться малыми первого порядка, может быть записано в виде

$$v_1 \cos(n, x) + \frac{\partial \Phi'}{\partial z} = 0 \text{ на поверхности крыла} \quad (28.23)$$

(так как $\cos(n, x) =$ б. м., $\cos(n, y) =$ б. м., $\cos(n, z) = 1 +$ б. м.), и, таким образом, даст интегральное уравнение для c. Если $v_1 < a_1$, то подкоренное выражение в Φ_Q положительно во всём пространстве, и мы можем действительно распространить интеграл (28.22) на все точки поверхности крыла. Качественно движение будет происходить здесь так же, как в несжимаемой жидкости.

Принципиально иначе будет обстоять дело при $v_1 > a_1$. Теперь Φ_Q будет иметь смысл лишь до тех пор, пока

$$(x-x')^2 \geqslant \left(\frac{v_1^2}{a_1^2} - 1\right)[(y-y')^2 + (z-z')^2].$$

Это значит, во-первых, что если мы имеем единственный источник, помещённый в точке $M'(x', y', z')$, то он будет поставлять потенциал Φ' лишь в точки $M(x, y, z)$, расположенные внутри прямого круглого конуса, вершина которого находится в M', ось параллельна оси x, а котангенс половины угла раствора равен $\sqrt{v_1^2/a_1^2 - 1}$, ибо уравнение такого конуса в пространстве (x, y, z) будет

$$(x-x')^2 = \left(\frac{v_1^2}{a_1^2} - 1\right)[(y-y')^2 + (z-z')^2]. \quad (28.24)$$

Во-вторых, это значит, что если мы имеем ряд источников, помещённых в различных точках $M'(x', y', z')$, то в какой-нибудь точке

$M(x, y, z)$ пространства (x, y, z) будут проявляться лишь те источники $M'(x', y', z')$, которые попадут внутрь конуса

$$(x' - x)^2 = \left(\frac{v_1^2}{a_1^2} - 1\right)[(y' - y)^2 + (z' - z)^2], \qquad (28.25)$$

вершина которого находится в M, ось параллельна оси x, а котангенс половины угла раствора равен $\sqrt{v_1^2/a_1^2 - 1}$. Но если это так, то при вычислении потенциала Φ' в точке $M(x, y, z)$ мы должны, при выполнении интегрирования (28.22), распространять интеграл лишь на ту часть поверхности крыла, которая отсекается конусом (28.25) и лежит внутри этого конуса.

Легко видеть, что угол раствора нашего конуса есть в точности двойной угол Маха, отвечающий невозмущённому потоку: если $\sin\alpha_1 = a_1/v_1$, то

$$\sqrt{\frac{v_1^2}{a_1^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha_1} - 1} = \operatorname{ctg}\alpha_1.$$

Конусы (28.24) — это характеристики наших линеаризированных дифференциальных уравнений гиперболического типа.

Прежде чем переходить к конкретным случаям, отметим ещё, что с точки зрения нашего первого приближения безразлично, интегрировать ли в (28.22) по поверхности крыла, или же по площадке, получающейся как проекция нашего крыла на плоскость (x, y).

Это происходит от того, что c само бесконечно мало и, заменяя интегрирование (28.22) на интегрирование по бесконечно близкой поверхности $z' = 0$, мы совершаем ошибку второго порядка малости. То же относится и к условию (28.23), каковое можно написать при $z' = 0$.

Итак, чтобы найти потенциал Φ', вызываемый в точке $M(x, y, z)$ заданными источниками, расположенными на поверхности бесконечно тонкого и бесконечно мало наклонённого крыла, бегущего со сверхзвуковой скоростью, надо: 1) построить проекцию (F) крыла на плоскость (x, y), 2) построить конус, вершина которого находится в точке M, ось параллельна оси x, угол раствора равен $2\alpha_1$, 3) рассчитать интеграл (28.22), распространяя его на ту часть площади (F), назовём её (F'), которая находится внутри построенного конуса.

В качестве примера рассмотрим сперва уже разобранное нами выше крыло бесконечного размаха. Пусть передняя кромка его совпадает с осью y, а «глубина» его равна T (рис. 96). Очевидно, что Φ' не будет зависеть от y, и можно искать Φ', например, в точках $M(x, 0, z)$; естественно, далее, считать, что c также не зависит от y':

$$c = c(x').$$

Тогда имеем ($z' = 0$):

$$\Phi'(x, 0, z) = \int\limits_{(F')}\int \frac{c(x')\,dx'\,dy'}{\sqrt{(x-x')^2 - k^2(y'^2+z^2)}}, \qquad (28.26)$$

где $k^2 = \operatorname{ctg}^2 \alpha_1$.

Желая выбрать (F'), мы должны рассмотреть отдельно три случая, в зависимости от того, как расположена точка M. Конус характеристик, выходящий из M, всегда пересекает плоскость (x, y) по гиперболе [1]), ибо плоскость (x, y) параллельна оси конуса; однако эта гипербола либо:

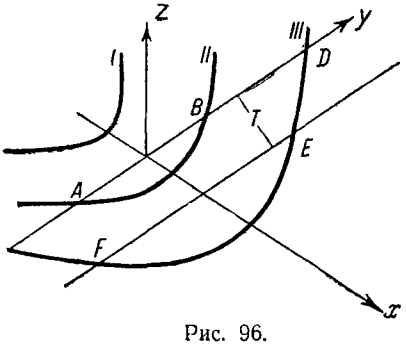

Рис. 96.

1) целиком лежит вне полосы

$$0 \leqslant x \leqslant T, \quad z = 0,$$

занимаемой крылом (кривая I на рис. 96), либо

2) пересекает наше крыло так, что вершина гиперболы лежит внутри этой полосы (кривая II), либо

3) гипербола пересекает крыло, но вершина её лежит вне нашей полосы.

В первом случае крыло не попадает внутрь конуса вовсе, и мы должны положить там

$$\Phi' \equiv 0.$$

Так как уравнение нашей ветви гиперболы будет

$$x' - x = -k\sqrt{y'^2 + z^2}$$

(x' и y' — текущие координаты), то первый случай мы получим, когда

$$x < k|z|, \quad \text{т. е.} \quad |z| > \operatorname{tg}\alpha_1 x,$$

результат, уже известный нам по плоской задаче.

Во втором случае мы должны принять за (F') сегмент, отсекаемый от нашей гиперболы отрезком AB (рис. 96), т. е. написать

$$\Phi' = \int\limits_{x'=0}^{x'=x-k|z|} \left\{ \int\limits_{ky' = -\sqrt{(x-x')^2 - k^2z^2}}^{ky' = +\sqrt{(x-x')^2 - k^2z^2}} \frac{c(x')}{\sqrt{(x-x')^2 - k^2z^2 - k^2y'^2}}\, dy' \right\} dx'.$$

[1]) Мы берём лишь ту ветвь гиперболы, которая уходит на $-\infty$.

Выполняя интегрирование по y', получим:

$$\Phi' = \int_{x'=0}^{x'=x-k|z|} c(x') \left\{ \frac{1}{k} \arcsin \frac{ky'}{\sqrt{(x-x')^2 - k^2z^2}} \right\}_{ky'=-\sqrt{(x-x')^2-k^2z^2}}^{ky'=+\sqrt{(x-x')^2-k^2z^2}} dx' =$$

$$= \frac{\pi}{k} \int_0^{x-k|z|} c(x')\, dx'. \qquad (28.27)$$

Наконец, в третьем случае имеем:

$$\Phi' = \int_{x'=0}^{x'=T} c(x') \left[\int_{ky'=-\sqrt{(x-x')^2-k^2z^2}}^{ky'=+\sqrt{(x-x')^2-k^2z^2}} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 - k^2y'^2 - k^2z^2}}\, dy' \right] dx' =$$

$$= \frac{\pi}{k} \int_{x'=0}^{x'=T} c(x')\, dx' = \text{const}.$$

Этот последний потенциал будет существовать везде, где

$$x - k|z| > T, \quad \text{т. е.} \quad |z| < \operatorname{tg} \alpha_1 (x - T).$$

Краевое условие (28.23) позволит определить вид функции $c(x')$ в (28.27), если известен вид сечения нашего бесконечного крыла. Так как в (28.27) входит $|z|$, то удобно отдельно произвести выкладки для верхней ($z > 0$) и для нижней ($z < 0$) части пространства. Пусть уравнение верхней части крыла будет

$$z' = \zeta_в (x').$$

Тогда по (28.23) должны написать

$$v_1 \frac{d\zeta_в}{dx} = \frac{\pi}{k} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \int_{x'=0}^{x'=x-kz} c_в (x')\, dx' \right\}_{z=0} = -\pi c_в (x).$$

Итак,

$$c_в (x') = -\frac{v_1}{\pi} \frac{d\zeta_в (x')}{dx'}.$$

Аналогично получим для $c_н(x')$:

$$c_н (x') = +\frac{v_1}{\pi} \frac{d\zeta_н (x')}{dx'}.$$

Итак, для $z > 0$:

$$\Phi'_в (x,\ 0,\ z) = -\frac{v_1}{k} \zeta_в (x - kz),$$

для $z < 0$:

$$\Phi'_н (x,\ 0,\ z) = +\frac{v_1}{k} \zeta_н (x + kz).$$

По уравнению Бернулли мы получим при этом

$$p'_{\text{в}} = +v_1^2\rho_1\frac{1}{k}\frac{\partial\zeta_{\text{в}}(x-kz)}{\partial x}; \quad p'_{\text{н}} = -v_1^2\rho_1\frac{1}{k}\frac{\partial\zeta_{\text{н}}(x+kz)}{\partial x}.$$

Так, для пластинки бесконечного размаха, бегущей под углом $\overline{\beta}$ к плоскости (x, y), получим:

$$p'_{\text{в}} = +\frac{\rho_1 v_1^2}{k}\overline{\beta}; \quad p'_{\text{н}} = -\frac{\rho_1 v_1^2}{k}\overline{\beta},$$

так что будет

$$C_z = -\frac{4}{k}\overline{\beta} = -4\operatorname{tg}\alpha_1\overline{\beta},$$

что совпадает с первым приближением Аккерета (см. § 14). При этом получится

$$v'_z = v_1\overline{\beta}.$$

В областях 1 и 3 мы имеем

$$v'_z = v'_x = 0.$$

В качестве второго примера рассмотрим уже изученный в § 27 случай обтекания снаряда, ось симметрии которого параллельна на этот раз оси x. Предположим, чтобы можно было применить наш метод линеаризации, что снаряд сильно вытянут, так что его меридиональное сечение имеет вид:

$$r = R(x),$$

где R вместе с dR/dx — бесконечно малы (r — расстояние от оси x). Здесь удобно воспользоваться уравнением (28.13), записанным в цилиндрических координатах:

$$\left(1-\frac{v_1^2}{a_1^2}\right)\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi'}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi'}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi'}{\partial\theta^2}=0. \qquad (28.28)$$

Потенциал Φ', не зависящий от θ (осевая симметрия) и удовлетворяющий этому уравнению, возьмём в виде

$$\Phi' = \frac{c}{\sqrt{(x-x')^2-k^2r^2}}$$

(источники расположены на оси снаряда).

Мы можем теперь написать потенциал Φ' в точке (x, r) меридиональной плоскости в виде

$$\Phi' = \int_{x'=0}^{x'=x-kr} \frac{c(x')\,dx'}{\sqrt{(x-x')^2-k^2r^2}}.$$

Вычисления с этим потенциалом удобно делать после замены переменных, перейдя от x' к u по формуле

$$\frac{x-x'}{kr}=\operatorname{ch} u.$$

Тогда

$$\Phi'=-\int\limits_{u=\operatorname{ar\,ch} x/kr}^{u=0} c\,(x-kr\operatorname{ch} u)\,du \tag{28.29}$$

$[\operatorname{ar\,ch}\alpha=\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})]$, и если предположить, что $c(0)=0$, то

$$v_x'=\frac{\partial\Phi'}{\partial x}=-\int\limits_{u=\operatorname{ar\,ch} x/kr}^{u=0}\frac{\partial}{\partial x}c\,(x-kr\operatorname{ch} u)\,du=$$

$$=\int\limits_{x'=0}^{x'=x-kr}\frac{dc(x')}{dx'}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2-k^2r^2}}\,dx'.$$

$$v_r'=\frac{\partial\Phi'}{\partial r}=\int\limits_{u=\operatorname{ar\,ch} x/kr}^{u=0}k\operatorname{ch} u\,\frac{\partial}{\partial x}c\,(x-kr\operatorname{ch} u)\,du=$$

$$=-\frac{1}{r}\int\limits_{x'=0}^{x'=x-kr}\frac{dc(x')}{dx'}\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2-k^2r^2}}\,dx'.$$

Для определения c будем иметь интегральное уравнение

$$v_1R\frac{dR}{dx}+\left\{\int\limits_{x'=0}^{x'=x-kr}\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2-k^2r^2}}\frac{dc}{dx'}\,dx'\right\}_{r=R(x)}=0. \tag{28.30}$$

Зная c, можем найти p' по уравнению Бернулли, а затем и силу W, действующую на снаряд. Последняя будет, очевидно,

$$W=2\pi\int\limits_{x=0}^{x=T}(p')_{r=R(x)}R\frac{dR}{dx}\,dx=$$

$$=-2\pi\rho_1v_1\int\limits_{x=0}^{x=T}\left[\int\limits_{x'=0}^{x'=x-kr}\frac{dc}{dx'}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2-k^2r^2}}\,dx'\right]R\frac{dR}{dx}\,dx, \tag{28.31}$$

где T — длина снаряда.

Если обтекаемое тело есть конус, т. е.

$$R(x)=\operatorname{tg}\beta_0x,$$

то можно считать, что

$$\frac{dc}{dx'} = v_1 K = \text{const}.$$

При этом уравнение (28.30) действительно удовлетворится, и надо будет лишь найти K из условия

$$K = -\frac{\operatorname{tg}^2 \beta_0}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{tg}^2 \beta_0}} \approx -\beta_0^2. \tag{28.32}$$

Сопротивление такого конуса, рассчитанное по (28.31), делённое на $\rho_1 v_1^2/2$ и на площадь $\pi \operatorname{tg}^2 \beta_0 T^2$ основания конуса, будет

$$C_x = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \beta_0 \operatorname{ar\,ch} \dfrac{1}{k \operatorname{tg} \beta_0}}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{tg}^2 \beta_0}}.$$

В случае снаряда произвольной формы рассмотрим на линии его меридионального сечения густой ряд точек $O(0, 0)$, $M_1(x_1, R_1)$, ..., ..., $M_N(x_N, R_N)$. Равенство (28.30) должно быть справедливо для любого x; запишем же его N раз, вставляя вместо x последовательно значения x_1, x_2, ..., x_N. Будем теперь считать все дуги $\overset{\frown}{OM_1}$, $\overset{\frown}{M_1M_2}$, ..., $\overset{\frown}{M_{N-1}M_N}$ за отрезки прямых линий, т. е. представим себе, что снаряд построен из отрезков конусов, имеющих каждый свой угол раствора; тогда в пределах каждой из упомянутых дуг величина dc/dx' будет сохранять постоянное значение (на дуге $\overset{\frown}{OM_1}$ это будет $v_1 K_1$, ..., а на дуге $\overset{\frown}{M_{N-1}M_N}$ будет $v_1 K_N$). Теперь для какой-нибудь точки x_n, R_n мы можем написать вместо (28.30):

$$R_n \frac{R_n - R_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + K_1 \int_{x'=0}^{x'=x_1-kR_1} \frac{x_n - x'}{\sqrt{(x_n - x')^2 - k^2 R_n^2}}\, dx' + \ldots$$

$$\ldots + K_n \int_{x'=x_{n-1}-kR_{n-1}}^{x'=x_n-kR_n} \frac{x_n - x'}{\sqrt{(x_n - x')^2 - k^2 R_n^2}}\, dx' = 0,$$

что даст после выполнения квадратур и простых преобразований ($x_0 = R_0 = 0$):

$$\frac{1}{k} \frac{R_n - R_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ K_i \sqrt{\left(\frac{x_n - x_i + kR_i}{kR_n}\right)^2 - 1} - \sqrt{\left(\frac{x_n - x_{i-1} + kR_{i-1}}{kR_n}\right)^2 - 1} \right\}. \tag{28.33}$$

Придавая n последовательный ряд значений $n=1, 2, \ldots, N$, мы получим систему N линейных уравнений для определения N величин $K_1, K_2, \ldots, K_N$. Заметим, что система наша такова, что в первое (при $n=1$) уравнение входит только K_1, во второе — только K_1 и K_2, в n-е — $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Таким образом мы можем сперва найти K_1 из уравнения первой степени ($n=1$), затем вставить K_1 в уравнение при $n=2$ и найти K_2 из этого уравнения и т. д. После того как K_i найдены, давление p'_n в точке (x_n, R_n) найдётся в виде

$$p'_n = -\rho_1 v_1 v'_x =$$

$$= \rho_1 v_1^2 \sum_{i=1}^{n} K_i \left(\operatorname{ar\,ch} \frac{x_n - x_i + kR_i}{kR_n} - \operatorname{ar\,ch} \frac{x_n - x_{i-1} + kR_{i-1}}{kR_n} \right),$$

а поделённое на $\rho_1 v_1^2/2$ и на площадь основания πR_N^2 сопротивление C_x снаряда может быть вычислено по формуле (28.31):

$$C_x = 2 \sum_{n=1}^{n-N} \frac{R_n^2 - R_{n-1}^2}{R_N^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} K_i \left(\operatorname{ar\,ch} \frac{x_n - x_i + kR_i}{kR_n} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \operatorname{ar\,ch} \frac{x_n - x_{i-1} + kR_{i-1}}{kR_n} \right) \right\}. \qquad (28.34)$$

Отметим, что наши формулы пригодны лишь до тех пор, пока v_1/a (а значит, и k) не слишком велико. Так, например, формула (28.32) теряет смысл, если, несмотря на малость β_0, $k \operatorname{tg} \beta_0$ будет близко к единице.

В качестве третьего примера рассмотрим случай вытянутого симметричного снаряда, помещённого в поток со скоростью v_1, направление которого составляет малый угол $|\bar{\beta}|$ с осью симметрии снаряда (рис. 97).

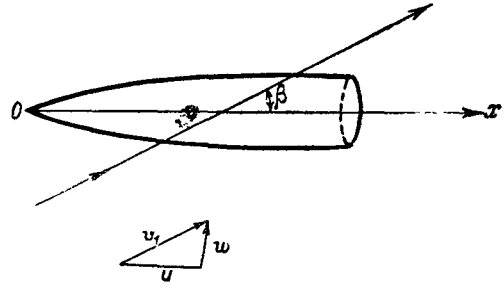

Рис. 97.

Разложим скорость потока v_1 на две составляющие: u — параллельную оси симметрии снаряда и w — перпендикулярную к этой оси; тогда

$$u = v_1 \cos \bar{\beta} \approx v_1, \quad w = -v_1 \sin \bar{\beta} \approx -v_1 \bar{\beta},$$

причём u будет величиной конечной, а w — в силу малости угла $\bar{\beta}$ — бесконечно мало. Поместим начало координат по-прежнему в вершине

снаряда и направим ось x цилиндрической системы координат r, θ, x вдоль оси симметрии (рис. 97). Будем теперь искать потенциал Φ' в виде суммы трёх потенциалов Φ_1', Φ_2' и Φ_3':

$$\Phi' = \Phi_1' + \Phi_2' + \Phi_3', \tag{28.35}$$

из коих

$$\Phi_1' = -wr\cos\theta \approx v_1\bar{\beta}r\cos\theta,$$

и представляет плоско-параллельный поток скорости (бесконечно малой величины w), бегущий параллельно плоскости, проходящей через направление v_1 и через ось снаряда; Φ_2' представляет уже разобранный нами потенциал осесимметрического обтекания, получающегося от того, что снаряд помещён в поток скорости u (она же приближённо равна v_1), а Φ_3' — не обладающий осевой симметрией потенциал, получающийся из-за наличия, кроме скорости u, ещё и боковой скорости w. В силу линейности задачи, такую суперпозицию трёх решений строить совершенно законно.

Чтобы найти Φ_2' достаточно, как мы это уже и делали, отправляться от обладающего осевой симметрией решения уравнения (28.28) ($u \approx v_1$), т. е. искать Φ_2' не зависящим от θ. Чтобы найти Φ_3', нам надо обратиться к полному уравнению (28.28).

Феррари и Цзянь предлагают искать Φ_3' в виде

$$\Phi_3' = \cos\theta F(x, r). \tag{28.36}$$

Тогда (28.28) даст

$$\left(1 - \frac{v_1^2}{a_1^2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{F}{r^2} = 0. \tag{28.37}$$

Но теперь легко видеть, что в качестве F можно принять

$$F = \frac{\partial \Phi'}{\partial r}, \tag{28.38}$$

где Φ' — выражение вида (28.29). Действительно, продифференцировав по r уравнение

$$\left(1 - \frac{v_1^2}{a_1^2}\right)\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi'}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial r^2} = 0,$$

получим

$$\left(1 - \frac{v_1^2}{a_1^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial \Phi'}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \Phi'}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{\partial \Phi'}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi'}{\partial r} = 0,$$

что совпадает с (28.37), если заменить $\partial\Phi'/\partial r$ на F.

Используя подстановку, употреблённую в (28.29), мы можем таким образом окончательно написать:

$$\Phi_3'(x, r, \theta) = k\cos\theta \int\limits_{u=\operatorname{ar\,ch} x/kr}^{u=0} c_2(x - kr\operatorname{ch} u)\operatorname{ch} u\, du = \\ = -\frac{\cos\theta}{r}\int\limits_{x'=0}^{x'=x-kr} c_2(x')\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 - k^2r^2}}\,dx',$$

где $c_2(x')$ — функция, подлежащая определению.

Что же касается $\Phi_2'(x, r)$, то его мы ищем по-прежнему в виде

$$\Phi_2'(x, r) = -\int\limits_{u=\operatorname{ar\,ch} x/kr}^{u=0} c_1(x - kr\operatorname{ch} u)\,du = \\ = \int\limits_{x'=0}^{x'=x-kr} \frac{c_1(x')}{\sqrt{(x-x')^2 - k^2r^2}}\,dx',$$

где $c_1(x')$ — функция, определяемая, как это уже было проделано выше, из интегрального уравнения (28.30), где вместо c стоит c_1.

Краевое условие задачи (28.18) напишется теперь так:

$$\cos(n, x)\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1 + \Phi_1' + \Phi_2' + \Phi_3') + \cos(n, r)\frac{\partial}{\partial r}(\Phi_1' + \Phi_2' + \Phi_3') + \\ + \cos(n, \theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\Phi_1' + \Phi_3') = 0$$

при $r = R(x)$ (уравнение контура снаряда). Но

$$\cos(n, x) = \text{б. м.}; \quad \cos(n, r) = 1 + \text{б.м.}, \quad \cos(n, \theta) = 0,$$

так что, оставляя малые первого порядка, получим:

$$\cos(n, x)\,v_1 + v_1\bar{\beta}\cos\theta + \left(\frac{\partial\Phi_2'}{\partial r}\right)_{r=R} + \left(\frac{\partial\Phi_3'}{\partial r}\right)_{r=R} = 0,$$

или, если разделить члены, содержащие θ и свободные от θ:

$$\cos(n, x)\,v_1 + \left(\frac{\partial\Phi_2'}{\partial r}\right)_{r=R} = 0; \quad v_1\bar{\beta}\cos\theta + \left(\frac{\partial\Phi_3'}{\partial r}\right)_{r=R} = 0.$$

Первое из этих уравнений даст

$$R\frac{dR}{dx}v_1 + \left\{\int\limits_{x'=0}^{x'=x-kr} \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 - k^2r^2}}\frac{dc_1(x')}{dx'}\,dx'\right\}_{r=R} = 0,$$

что в точности совпадает с уравнением (28.30) уже решённой нами задачи (надо только заменить c на c_1). Второе уравнение даст

$$v_1\bar{\beta} = -\left(\frac{\partial}{\partial r}k\int\limits_{u=\operatorname{ar\,ch} x/kr}^{u=0} c_2(x-kr\operatorname{ch}u)\operatorname{ch}u\,du\right)_{r=R} =$$

$$=\left(k^2\int\limits_{u=\operatorname{ar\,ch} x/kr}^{u=0}\frac{\partial c_2}{\partial x}\operatorname{ch}^2 u\,du\right)_{r=R} =$$

$$=-\left\{\frac{1}{r^2}\int\limits_{x'=0}^{x'=x-kr}\frac{dc_2}{dx'}\frac{(x-x')^2}{\sqrt{(x-x')^2-k^2r^2}}\,dx'\right\}_{r=R}. \qquad (28.39)$$

Это интегральное уравнение и следует решить, чтобы найти c_2 и, значит, Φ_3'. Избыток давления p' определится по уравнению Бернулли [см. (28.12)]

$$p' = -\rho_1 v_1\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1'+\Phi_2'+\Phi_3') = -\rho_1 v_1\left(\frac{\partial\Phi_2'}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_3'}{\partial x}\right) =$$

$$=\rho_1 v_1\left\{\int\limits_{u=\operatorname{ar\,ch} x/kr}^{u=0} c_1'(x-kr\operatorname{ch}u)\,du -\right.$$

$$\left.-k\cos\theta\int\limits_{u=\operatorname{ar\,ch} x/kr}^{u=0} c_2'(x-kr\operatorname{ch}u)\operatorname{ch}u\,du\right\} = p_1'+\cos\theta\,p_2'. \qquad (28.40)$$

Сила A, действующая на снаряд перпендикулярно оси x, будет теперь

$$A = 2\int\limits_{x=0}^{x=T}\int\limits_{\theta=0}^{\theta=\pi}(p_1'+\cos\theta\,p_2')_{r=R}R\cos\theta\,d\theta\,dx =$$

$$=\pi\int\limits_{x=0}^{x=T}(p_2')_{r=R}R\,dx = -\rho_1 v_1\pi k\int\limits_{x=0}^{x=T}R(x)\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{u=\operatorname{ar\,ch} x/kr}^{u=0} c_2'(x-kr\operatorname{ch}u)\operatorname{ch}u\,du\right\}_{r=R(x)}dx. \qquad (28.41)$$

Сила W, действующая вдоль оси x, будет:

$$W = 2\int_{x=0}^{x=T}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left(p_1' + p_2'\cos\theta\right)_{r=R} R\frac{dR}{dx}\,d\theta\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{x=0}^{x=T}\left(p_1'\right)_{r=R} R\frac{dR}{dx}\,dx =$$

$$= 2\pi\rho_1 v_1\int_{x=0}^{x=T} R\frac{dR}{dx}\left\{\int_{u=\operatorname{ar\,ch} x/kr}^{u=0} c_1'(x - kr\operatorname{ch} u)\,du\right\}_{r=R} dx, \qquad (28.42)$$

т. е. имеет в точности тот же вид, что и для осевой симметрии.

Можно ещё подсчитать момент M относительно вершины O снаряда:

$$M = 2\int_{x=0}^{x=T}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left(p_1' + p_2'\cos\theta\right)_{r=R} R\cos\theta\,d\theta x\,dx =$$

$$= -k\rho_1 v_1\pi\int_{x=0}^{x=T} xR(x)\left(\int_{u=\operatorname{ar\,ch} x/kr}^{u=0} c_2'\operatorname{ch} u\,du\right)_{r=R} dx. \qquad (28.43)$$

Для конуса

$$R(x) = \operatorname{tg}\beta_0 x; \qquad c_2' = \frac{dc_2}{dx'} = \text{const.} = v_1\bar{\beta}L,$$

причём по (28.39)

$$L = -\frac{1}{k_2}\frac{2}{\zeta\sqrt{\zeta^2-1} + \operatorname{ar\,ch}\zeta}, \quad \text{где} \quad \zeta = \frac{1}{k\operatorname{tg}\beta_0}. \qquad (28.44)$$

По (28.41) мы получим для конуса силу A, делённую на $\rho_1 v_1^2/2$ и на площадь основания, в виде

$$\frac{A}{\frac{\rho_1 v_1^2}{2}\pi T^2\operatorname{tg}^2\beta_0} = C_r = -\frac{2\zeta\sqrt{\zeta^2-1}\,\bar{\beta}}{\zeta\sqrt{\zeta^2-1} + \operatorname{ar\,ch}\zeta}. \qquad (28.45)$$

Коэффициент момента C_M будет:

$$C_M = \frac{M}{\frac{\rho_1 v_1^2}{2}\pi\operatorname{tg}^2\beta_0\,T^2 T} = \frac{2}{3}C_r = -\frac{4\zeta\sqrt{\zeta^2-1}\,\bar{\beta}}{3(\zeta\sqrt{\zeta^2-1} + \operatorname{ar\,ch}\zeta)}. \qquad (28.46)$$

Мы видим, что C_r и C_M оба пропорциональны углу $\bar{\beta}$, который ось симметрии конуса составляет с направлением скорости.

Для снаряда произвольной формы, как и в случае осевой симметрии, нанесём на поверхности снаряда ряд точек $O(0, 0)$,

$M_1(x_1, R_1)$, ..., $M_N(x_N, R_N)$ $(x_N = T)$ и будем считать, что дуги $\overset{\frown}{OM_1}$, $\overset{\frown}{M_1M_2}$, ... могут быть заменены отрезками прямых. Теперь в пределах каждой из упомянутых дуг величины dc_2/dx' будут сохранять постоянные значения, и нам надо будет лишь найти N неизвестных L_1, L_2, ..., L_N из N раз написанного (для точек M_1, M_2, ..., M_N соответственно) уравнения (28.39):

$$1 = \frac{k^2}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i \left\{\operatorname{ar\,ch}\xi_{n,i} - \operatorname{ar\,ch}\xi_{n,i-1} + \xi_{n,i}\sqrt{\xi_{n,i}^2 - 1} - \right.$$
$$\left. - \xi_{n,i-1}\sqrt{\xi_{n,i-1}^2 - 1}\right\}, \quad (28.47)$$

где

$$\xi_{n,i} = \frac{x_n - x_i + kR_i}{kR_n}; \quad x_0 = R_0 = 0.$$

Определив L_1, L_2, ..., L_N последовательно из N уравнений первой степени (28.47) с одним неизвестным каждое, мы можем затем написать p_2' в точке M_n в виде:

$$p_2' = -k\bar{\beta}\rho_1 v_1^2 \sum_{i=1}^{n} L_i\left(\sqrt{\xi_{n,i}^2 - 1} - \sqrt{\xi_{n,i-1}^2 - 1}\right), \quad (28.48)$$

так что C_r и C_M могут быть записаны в виде:

$$C_r = -k\bar{\beta}\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{R_n + R_{n-1}}{R_N}\,\frac{x_n - x_{n-1}}{R_N}\left[\sum_{i=1}^{n} L_i\left(\sqrt{\xi_{n,i}^2 - 1} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \sqrt{\xi_{n,i-1}^2 - 1}\right)\right]\right\},$$

$$C_M = -\frac{k\beta}{3T}\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{R_n + R_{n-1}}{R_N}\,\frac{x_n - x_{n-1}}{R_N}\left[x_n + 2x_{n-1} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (x_n - x_{n-1})\frac{R_n}{R_n + R_{n-1}}\right]\left[\sum_{i=1}^{n} L_i\left(\sqrt{\xi_{n,i}^2 - 1} - \sqrt{\xi_{n,i-1}^2 - 1}\right)\right]\right\}.$$

Как C_r, так и C_M пропорциональны углу $\bar{\beta}$.

§ 29. Потенциал ускорения. Теорема Прандтля—Глауэрта. Крыло конечного размаха в сверхзвуковом потоке. В предыдущем параграфе отправным пунктом является проведение для получения решения уравнения (28.13) операции вида (28.22) над потенциалом вида (28.21). Однако функция с (M'), участвующая в этом методе, не имеет наглядного аэродинамического смысла. Прандтль предлагает подвергнуть (28.21), с целью получения решения, операциям, отличным от (28.22); он отправляется при этом от понятия потенциала

ускорения. Последний существует всегда, коль скоро существует потенциал скорости, ибо тогда

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\nabla\frac{v\cdot v}{2}-v\times\Omega=\nabla\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{V\cdot V}{2}\right\},$$

и мы можем назвать величину

$$\varphi=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]$$

потенциалом ускорения.

При линеаризации, проводимой как в предыдущем пункте, получим (в стационарном случае):

$$\varphi=v_1\frac{\partial\Phi'}{\partial x}=v_1v_x', \tag{29.1}$$

причём по уравнению Бернулли (28.11):

$$\varphi=\frac{p'}{\rho_1}. \tag{29.2}$$

Уравнение (29.1) показывает, что φ удовлетворяет уравнению (28.13) так же, как и Φ'. Если крыло обладает подъёмной силой, то давления $p'_в$ в какой-либо верхней точке M' крыла и $p'_н$ — в нижней точке с теми же координатами x, y будут различны. Это значит, что, с принятой нами точностью, мы можем сказать, что p' терпит скачок при переходе через горизонтальную площадку (F), на которую проектируется крыло. Но тогда по (29.2) φ терпит скачок при переходе через (F). В несжимаемой жидкости φ удовлетворяло бы уравнению Лапласа (так же как и Φ'), и мы могли бы искать φ в виде потенциала двойного слоя:

$$\varphi(x,y,z)=\int\limits_{(F)}\int\frac{\varphi_н-\varphi_в}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\,dx'\,dy'=$$

$$=\int\limits_{(F)}\int\frac{p'_в-p'_н}{4\pi\rho_1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\,dx'\,dy'=\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(F)}\int\frac{p'_в-p'_н}{4\pi\rho_1}\frac{1}{r}\,dx'\,dy',$$

где $\varphi_н$ и $\varphi_в$ — значения φ в точках M' площадки (F), а

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

В сжимаемой жидкости φ удовлетворяет уравнению (28.13), а его решением, имеющим характер потенциала источника, будет, как мы знаем, не $1/r$, а (28.21). Прандтль предлагает по аналогии с несжи-

маемой жидкостью, искать φ для сжимаемой жидкости в виде

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(F)}\int \frac{p'_{\text{н}} - p'_{\text{в}}}{4\pi\rho_1} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + \left(1-\frac{v_1^2}{a_1^2}\right)[(y-y')^2 + z^2]}}\, dx'\, dy'.$$

Так как разность $p'_{\text{н}} - p'_{\text{в}}$ представляет подъёмную силу, отнесённую к единице площади крыла, то удобно её обозначить, ориентируясь на теорему Жуковского, так:

$$p'_{\text{н}} - p'_{\text{в}} = \rho_1 v_1 \gamma(x', y') \tag{29.3}$$

и назвать γ «циркуляцией». Тогда φ запишется в виде:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{v_1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(F)}\int \gamma(x', y') \frac{dx'\, dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + \left(1-\frac{v_1^2}{a_1^2}\right)[(y-y')^2 + z^2]}}. \tag{29.4}$$

Зная φ, найдём Φ' путём квадратур по (29.1):

$$\Phi' = \frac{1}{v'}\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(x, y, z)\, dx, \tag{29.5}$$

а скорости будем иметь в виде:

$$v'_x = \frac{\varphi}{v_1}; \quad v'_y = \frac{1}{v_1}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(x, y, z)\, dx; \quad v'_z = \frac{1}{v_1}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi\, dx. \tag{29.6}$$

Запишем ещё краевые условия задачи определения φ. На поверхности крыла $V_n = 0$, т. е.

$$\cos(n, x)\, v_1 + (v'_z) = 0 \quad \text{на} \quad (F). \tag{29.7}$$

Это последнее уравнение и должно служить для определения циркуляции $\gamma(x', y')$.

Для дозвуковых скоростей уравнение (29.4) позволяет сделать одно важное заключение. Замена переменных

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{a_1^2}}}\, x, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z$$

приведёт (29.4) к виду:

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = -\frac{v_1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(F)}\int \frac{\gamma(x', y')\,d\bar{x}'\,d\bar{y}'}{\sqrt{(\bar{x}-\bar{x}')^2+(\bar{y}-\bar{y}')^2+\bar{z}^2}},$$

но это в точности совпадает с потенциалом φ для жидкости несжимаемой. Отсюда выводится следствие: подъёмная сила тонкого крыла, помещённого в поток сжимаемой жидкости, имеющей на бесконечности скорость v_1 и плотность ρ_1, будет в $\dfrac{1}{\sqrt{1-(v_1/a_1)^2}}$ раз больше подъёмной силы того же крыла, помещённого в поток несжимаемой жидкости плотности ρ_1 и скорости v_1 на бесконечности. Эта теорема была доказана Прандтлем и Глауэртом.

Обратимся к сверхзвуковым скоростям и напишем (29.4) в виде [1]):

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{v_1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{(F)}\int \frac{\gamma(x', y')\,dx'\,dy'}{\sqrt{(x-x')^2-k^2[(y-y')^2+z^2]}}, \quad (29.8)$$

причём, как и прежде, будем считать

$$\varphi \equiv 0,$$

если $(x-x')^2 < k^2[(y-y')^2+z^2]$, так что площадь (F') будет выбираться, как в предыдущем пункте.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда крыло есть трапециевидная пластинка, наклонённая под углом $\bar{\beta}$ к плоскости (x, y); пусть в проекции на плоскость (x, y) крыло даёт трапецию $ABDC$ (рис. 98), так что передняя кромка расположена по стороне AB (она лежит на оси y), и крыло имеет размах $AB = b$, а ширину $OE = t$. Пусть

$$\angle OBD = \angle OAC = \frac{\pi}{2} - \theta_0.$$

Начало координат — в середине передней кромки.

Из точек A, B, C, D проведём конусы характеристик, т. е. прямые круглые конусы с вершинами в этих точках, с осями, параллельными оси x, и с углами раствора $2\alpha_1$, где

$$\sin\alpha_1 = \frac{a_1}{v_1}.$$

Линии пересечения этих конусов с плоскостью (x, y) изображены на рис. 98 [2]). Чтобы найти поля скоростей и давления, вызываемые наличием этого крыла в некоторой точке $M(x, y, z)$ пространства

[1]) φ берётся удвоенным против (26.3), чтобы сохранить за γ смысл циркуляции (см. ниже).

[2]) Предполагается, что $\alpha_1 > \theta_0 > 0$.

(x, y, z), нам надо (аналогично тому, как мы это делали в предыдущем параграфе) при пользовании формулой (29.8) выбрать за площадку (F') часть трапеции $ABDC$, попадающую внутрь конуса характеристик, вершина которого находится в точке M. Ветвь гиперболы, по которой этот последний конус пересекает плоскость (xy),

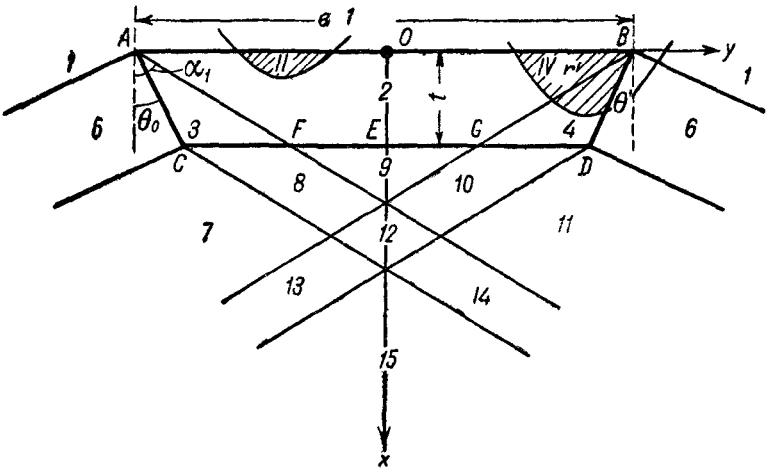

Рис. 98.

будет в зависимости от расположения M отсекать разные части трапеции $ABDC$. Так, например, для точек M, расположенных «над» плоскостью

$$z = \operatorname{tg} \alpha_1 x$$

или «под» плоскостью

$$z = -\operatorname{tg} \alpha_1 x,$$

эта гипербола вовсе не встретит прямоугольника $ABDC$, и для этих точек надо считать

$$\varphi = 0.$$

Число всех возможных случаев равно здесь 15, в то время как для крыла бесконечного размаха их было только 3 (см. предыдущий параграф).

Метод Прандтля позволяет найти скорости и давления в любой из этих областей. Мы остановимся подробно *лишь на отыскании* γ и на вычислении сил, действующих на наше крыло; для этого необходимо найти скорость v_z' и давление p' в точках крыла. Если вспомнить, что в краевое условие (29.7), служащее для нахождения γ, входят только точки крыла, станет ясно, что из всех пятнадцати областей нам достаточно теперь рассмотреть лишь те, пересечения

которых с плоскостью (x, y) не выходят за пределы трапеции $ABDC$, Области эти, пересекающиеся с $ABDC$ по площадкам: $AFGB$ (обозначена цифрой *2*), ACF (цифра *3*) и BGD (цифра *4*), назовём областями *II*, *III*, *IV* соответственно.

Начнём с области *II*. Область, отсекаемая от крыла нашей гиперболой, будет здесь совершенно такая же, как если бы мы решили задачу о крыле бесконечного размаха. Если бы речь шла о движении трапеции $ABGF$, то силы, на неё действующие, были бы поэтому в точности те же, что и в случае крыла бесконечного размаха.

Желая подсчитать γ для области *2*, мы можем заранее считать его постоянным, и условие

$$\left(v'_z\right)_{z=0} = v_1\bar{\beta} \tag{29.9}$$

при постоянном γ удовлетворится. Действительно, здесь будет (для верха):

$$\varphi = -\frac{v_1\gamma}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{x'=0}^{x'=x-kz}\int\limits_{y'=y-A}^{y'=y+A}\frac{dy'\,dx'}{\sqrt{(x-x')^2-k^2(y-y')^2-k^2z^2}} =$$

$$= -\frac{v_1\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{x-kz}{k} = \frac{v_1\gamma}{2},$$

где $A = \frac{1}{k}\sqrt{(x-x')^2-k^2z^2}$. Для области *1* (лежащей над плоскостью $z = x/k$ или под плоскостью $z = -x/k$) имеем просто

$$\varphi \equiv 0.$$

Поэтому в выражении

$$\Phi' = \frac{1}{v_1}\int\limits_{\xi=-\infty}^{\xi=x}\varphi(\xi, y, z)\,d\xi$$

нам достаточно распространить интегрирование от $\xi = kz$ (или от $\xi = -kz$ при $z < 0$) до $\xi = x$. Итак:

$$\Phi'(x, y, z) = \frac{\gamma}{2}(x-kz),$$

так что

$$v'_z = \frac{\partial\Phi'}{\partial z} = -\frac{\gamma k}{2}, \tag{29.10}$$

мы действительно можем удовлетворить (29.9), если положим [1])

$$\gamma = -\frac{2v_1\bar{\beta}}{k}. \tag{29.11}$$

Обратимся к области *IV* (для области *III* вычисление можно будет провести по аналогии). Здесь мы имеем переменное $\gamma = \gamma(x', y')$, причём, так как возмущение, происходящее в углу GBD, обусловлено наличием точки B, можно искать γ как функцию от комбинации

$$\frac{\frac{1}{2}b - y'}{x'},$$

т. е. считать γ одинаковым во всех точках одного луча, выходящего из B, и меняющимся от луча к лучу. Можно считать, что γ обращается в нуль на луче BD и обращается в γ_0:

$$\gamma_0 = -\frac{2v_1\bar{\beta}}{k} \tag{29.12}$$

на луче BG. Но тогда в интеграле (29.8) удобно перейти к цилиндрическим координатам z, r', θ' по формулам:

$$x' = r'\cos\theta'; \quad y' = \frac{1}{2}b - r'\sin\theta';$$

и для области *IV* получим:

$$\varphi_{IV}(x, y, z) = -\frac{v_1}{2\pi} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial z} \int_{\theta'=\theta_0}^{\theta'=\pi/2} \int_{r'=0}^{r'=r_1} \frac{\gamma(\theta')\, r'\, dr'\, d\theta'}{\left\{(x - r'\cos\theta')^2 - k^2\left[\left(y - \frac{b}{2} + r'\sin\theta'\right)^2 + z^2\right]\right\}^{1/2}}. \tag{29.13}$$

---

[1]) Мы видим, что γ действительно похоже на циркуляцию, ибо

$$\rho_1 v_1 \gamma = -\frac{2v_1^2\bar{\beta}\rho_1}{k},$$

так что C_z будет

$$C_z = -\frac{2v_1^2\bar{\beta}\rho_1}{\frac{k\rho_1 v_1^2}{2}} = -\frac{4\bar{\beta}}{k},$$

что отвечает формуле Аккерета.

Здесь r_1 — наименьшее из тех двух значений r_1 и r_2, которые обращают подкоренное выражение в формуле (29.13) в нуль. Эти значения суть

$$r_{1,2} = \frac{x\cos\theta' - k^2\left(y-\frac{b}{2}\right)\sin\theta'}{\cos^2\theta' - k^2\sin^2\theta'} \mp \frac{k\sqrt{\left[x\sin\theta' - \left(\frac{b}{2}-y\right)\cos\theta'\right]^2 + z^2(\cos^2\theta' - k^2\sin^2\theta')}}{\cos^2\theta' - k^2\sin^2\theta'}, \quad (29.14)$$

причём верхний знак отвечает случаю r_1, а нижний — случаю r_2. Для того чтобы выполнить дифференцирование по z в (29.13), удобно перейти к новому переменному ξ из соотношения

$$\xi = \sqrt{\frac{r_1 - r'}{r_2 - r'}}.$$

Мы получим сперва:

$$\varphi_{IV}(x, y, z) = -\frac{v_1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\theta'=\theta_0}^{\theta'=\pi/2}\gamma(\theta')\int_{\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}}^{0}\frac{r_2\xi^2 - r_1}{(1-\xi^2)^2}\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta' - k^2\sin^2\theta'}}\,d\xi\,d\theta'.$$

Теперь мы можем выполнить дифференцирование по z; используя (29.14) и выполняя квадратуры по ξ, получим:

$$\varphi_{IV}(x, y, z) = \frac{v_1}{2\pi}z\int_{\theta'=\theta_0}^{\theta'=\pi/2}\frac{\gamma(\theta')\sqrt{x^2 - k^2\left[\left(\frac{b}{2}-y\right)^2 + z^2\right]}\,d\theta'}{\left[x\sin\theta' - \left(\frac{b}{2}-y\right)\cos\theta'\right]^2 + z^2(\cos^2\theta' - k^2\sin^2\theta')}. \quad (29.15)$$

Заметим, далее, что [1])

$$\frac{d\theta'}{\left[x\sin\theta' - \left(\frac{b}{2}-y\right)\cos\theta'\right]^2 + z^2(\cos^2\theta' - k^2\sin^2\theta')} = \frac{1}{z\sqrt{x^2 - k^2z^2 - k^2\left(\frac{b}{2}-y\right)^2}}\,d\operatorname{arc\,tg}\frac{(x^2 - k^2z^2)\operatorname{tg}\theta' - x\left(\frac{b}{2}-y\right)}{z\sqrt{x^2 - k^2z^2 - k^2\left(\frac{b}{2}-y\right)^2}}.$$

[1]) Это преобразование было дано Фальковичем. Первое применение теории Прандтля принадлежало Шлихтингу, но его рассуждения оказались неточными. Дальнейший подсчет ведётся здесь по Фальковичу.

Вставляя это выражение в (29.15) и производя интегрирование по частям, получим:

$$\varphi_{IV}(x, y, z) = \frac{v_1}{2\pi}\left\{\int_{\theta'=\theta_0}^{\theta'=\pi/2} \gamma(\theta') \operatorname{arc\,tg} \frac{(x^2 - k^2z^2)\operatorname{tg}\theta' - x\left(\frac{b}{2} - y\right)}{z\sqrt{x^2 - k^2z^2 - k^2\left(\frac{b}{2} - y\right)^2}} - \right.$$

$$\left. - \int_{\theta'=\theta_0}^{\theta'=\pi/2} \frac{d\gamma(\theta')}{d\theta'} \operatorname{arc\,tg} \frac{(x^2 - k^2z^2)\operatorname{tg}\theta' - x\left(\frac{b}{2} - y\right)}{z\sqrt{(x^2 - k^2z^2) - k^2\left(\frac{b}{2} - y\right)^2}} d\theta' \right\}.$$

Нам надо положить $\gamma(\theta_0) = 0$. Кроме того, во всём интервале от $\theta' = \alpha_1$ до $\theta' = \pi/2$ мы должны принять $\gamma = \text{const.} = \gamma_0$. Таким образом мы получим:

$$\varphi_{IV}(x, y, z) =$$

$$= \frac{v_1}{2\pi}\left\{\gamma_0 \frac{\pi}{2} - \int_{\theta'=\theta_0}^{\theta'=\alpha_1} \frac{d\gamma(\theta')}{d\theta'} \operatorname{arc\,tg} \frac{(x^2 - k^2z^2)\operatorname{tg}\theta' - x\left(\frac{b}{2} - y\right)}{z\sqrt{x^2 - k^2z^2 - k^2\left(\frac{b}{2} - y\right)^2}} d\theta' \right\}. \tag{29.16}$$

Чтобы найти γ, нам достаточно теперь использовать краевое условие (29.9). Предварительно заметим, что согласно (29.6) мы должны иметь:

$$\frac{\partial v_z'}{\partial x} = \frac{1}{v_1}\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{29.17}$$

Но дифференцируя (29.9) по x, мы получим ($\bar{\beta}$=const.)

$$\left(\frac{\partial v_z'}{\partial x}\right)_{z=0} = 0$$

и, значит, вследствие (29.17),

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0.$$

Таким образом, нам достаточно продифференцировать (29.16) по z, подставить $z = 0$ и приравнять полученное выражение нулю. Производя эти несложные выкладки, получим после сокращения:

$$\int_{\theta'=\theta_0}^{\theta'=\alpha_1} \frac{d\gamma(\theta')}{d\theta'} \frac{1}{k\operatorname{tg}\theta' - k\dfrac{\left(\frac{b}{2} - y\right)}{x}} d\theta' = 0.$$

Это однородное интегральное уравнение для определения $d\gamma(\theta)/d\theta$ примет особенно простой вид, если ввести в качестве переменной интегрирования величину

$$\vartheta = k \operatorname{tg} \theta' \tag{29.18}$$

и обозначить

$$\frac{k\left(\frac{b}{2} - y\right)}{x} = \eta. \tag{29.19}$$

Мы получим тогда

$$\int\limits_{\vartheta=\vartheta_0}^{\vartheta=1} \frac{\gamma'}{\vartheta - \eta}\, d\vartheta = 0, \tag{29.20}$$

где γ' означает дифференцирование по аргументу ϑ, а $\vartheta_0 = k \operatorname{tg} \theta_0$. Это уравнение имеет решение [1])

$$\frac{d\gamma(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{c_1}{\sqrt{(1-\vartheta)(\vartheta - \vartheta_0)}}, \tag{29.21}$$

где c_1 — произвольная постоянная.

Производя интегрирование, получим:

$$\gamma(\vartheta) = c_1 \arcsin \frac{2\vartheta - (1 + \vartheta_0)}{1 - \vartheta_0} + c_2, \tag{29.22}$$

где c_2 — новая постоянная интегрирования. Для определения c_1 и c_2 вспомним ещё раз, что

$$\gamma(\vartheta_0) = 0, \quad \gamma(1) = \gamma_0.$$

Тогда получим окончательно:

$$\gamma(\theta') = \frac{\gamma_0}{\pi} \arccos \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \theta_0 - 2 \operatorname{tg} \theta'}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \theta_0}. \tag{29.23}$$

Зная γ, мы можем без труда подсчитать силы, действующие на наше крыло. Подъёмная сила Z складывается из трёх частей: Z_2 (в области 2), Z_3 и Z_4 ($Z_3 = Z_4$); при этом

$$Z_2 = \rho_1 v_1 \gamma_0 \times \text{площадь } ABGF = \rho_1 v_1 \gamma_0 bt \left(1 - \frac{t}{kb}\right),$$

$$Z_3 = \rho_1 v_1 \int\limits_{\theta'=\theta_0}^{\theta'=\alpha_1} \int\limits_{r'=0}^{r'=t/\cos\theta'} \gamma r'\, dr'\, d\theta' =$$

$$= \rho_1 v_1 \int\limits_{\theta'=\theta_0}^{\theta_1=\alpha_1} \gamma \frac{t^2}{2\cos^2\theta'}\, d\theta' = \frac{\rho_1 v_1 t^2}{2k} \int\limits_{\vartheta=\vartheta_0}^{\vartheta=1} \gamma(\vartheta)\, d\vartheta.$$

---

[1]) Если $\int\limits_a^b \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - x} = 0$, то $f(\xi) = \frac{\text{const.}}{\sqrt{(b-\xi)(\xi - a)}}$.

Если обозначить

$$\frac{1}{\gamma_0}\int_{\vartheta=\vartheta_0}^{\vartheta=1}\gamma(\vartheta)\,d\vartheta = K, \tag{29.24}$$

то

$$Z = Z_2 + Z_3 + Z_4 = \rho_1 v_1 \gamma_0 bt\left\{1-(1-K)\frac{t}{kb}\right\}.$$

Если вспомнить определение (29.12) для γ_0, поделить Z на $\rho_1 v_1^2/2$ и на площадь $t(b - t\operatorname{tg}\theta_0)$ крыла, получим для коэффициента C_z:

$$C_z = -\frac{4}{k}\bar{\beta}\,\frac{1-(1-K)\frac{t}{kb}}{1-\operatorname{tg}\theta_0\frac{t}{b}}. \tag{29.25}$$

Остаётся только определить K. Вставляя (29.23) в (29.24), можно написать по (29.18):

$$K = \frac{1}{\pi}\int_{\vartheta=\vartheta_0}^{\vartheta=1}\arccos\frac{1+\vartheta_0-2\vartheta}{1-\vartheta_0}\,d\vartheta.$$

Этот интеграл сразу же вычисляется и даёт:

$$K = \frac{1-\vartheta_0}{2}. \tag{29.26}$$

Таким образом, окончательно мы получаем C_z в виде:

$$C_z = -\frac{4}{k}\bar{\beta}\,\frac{1-\frac{1+k\operatorname{tg}\theta_0}{2}\frac{t}{kb}}{1-\operatorname{tg}\theta_0\frac{t}{b}}. \tag{29.27}$$

Что же касается сопротивления X, то его можно рассчитать, как интеграл, распространённый на всю площадь крыла от выражения $\rho_1 v_1 \gamma\bar{\beta}$, т. е. это будет:

$$X = -\rho_1 v_1 \gamma_0 \bar{\beta} bt\left\{1-(1-K)\frac{t}{kb}\right\},$$

так что

$$C_x = \frac{4}{k}\bar{\beta}^2\,\frac{1-(1-K)\frac{t}{kb}}{1-\operatorname{tg}\theta_0\frac{t}{b}}.$$

Связь между C_x и C_z получится при этом в виде

$$C_x = \frac{1}{4\operatorname{tg}\alpha_1}\,\frac{1-\operatorname{tg}\theta_0\frac{t}{b}}{1-(1-K)\frac{tb}{}\operatorname{tg}\alpha_1}\,C_z^2,$$

где K по-прежнему даётся при помощи (29.16).

Поляры, отвечающие $\theta_0 = 0$ (прямоугольная пластинка) при значениях $t/b = 0$; $1/5$ и $1/2$ для $v_1/a_1 = 1{,}2$; 2,0; 3,0, нанесены на рис. 99.

В этом и предыдущем параграфах мы рассмотрели лишь простейшие случаи решения линеаризованной задачи.

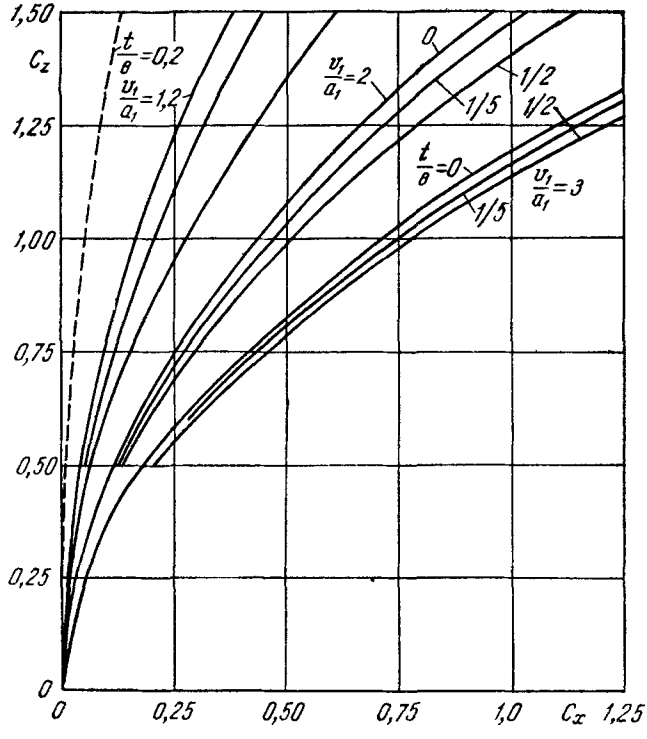

Рис. 99.

В следующем параграфе мы изложим общий метод получения решения для произвольного тонкого крыла.

§ 30. Сверхзвуковое обтекание тонкого крыла конечного размаха произвольной формы в плане. Концевой эффект и вихревая пелена. Обратимся теперь к общему случаю сверхзвукового обтекания тонкого крыла с острыми кромками. Как и в предыдущих параграфах, считаем крыло мало наклонённым к основному сверхзвуковому потоку и рассматриваем линейную задачу. Исследование этой задачи для случая произвольной формы крыла в плане дано в работах Е. А. Красильщиковой, а также в работах К. И. Бабенко, Уорда (Ward) и др. Дадим изложение, следуя Красильщиковой.

Для простоты изложения остановимся на случае, когда угол наклона касательной к контуру крыла меняется монотонно как для передней, так и для задней кромки крыла (рис. 100). Пусть уравнение передней кромки крыла (снесённого на плоскость $z=0$) будет $x=\Psi(y)$ (уравнение дуги $\overset{\frown}{BOD}$, рис. 100). Уравнение задней кромки пусть имеет вид $x=\Psi'(y)$. Перемещаясь вдоль передней кромки от 0 к B (или от 0 к D), мы будем встречать все значения $\left|\frac{d\Psi}{dy}\right|$ от 0 до ∞. Пусть в точке A (C) окажется $\left|\frac{d\Psi}{dy}\right|=\operatorname{ctg}\alpha_1$.

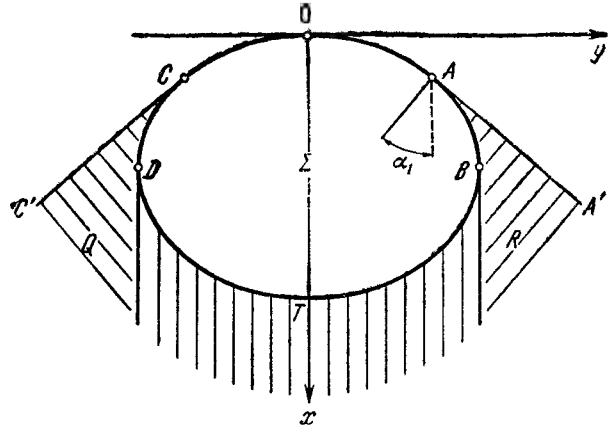

Рис. 100.

Проведём касательные к передней кромке в точках A и C. Обозначим через Σ область плоскости (x, y), занятую крылом; обозначим через T область «вихревой пелены» сзади крыла, т. е. область, ограниченную задней кромкой крыла и параллельными оси x полупрямыми, выходящими из точек B и D соответственно (см. рис. 100). Обозначим ещё через $R(Q)$ область «концевого эффекта» крыла, т. е. часть плоскости, расположенную между касательными в точках A и B (C и D) (рис. 100).

Так же как в § 28, ищем решение для потенциала $\Phi'(x, y, z)$. Представим его в виде:

$$\Phi'(x, y, z)=\int\int \frac{c(x', y')\,dx'\,dy'}{\sqrt{(x-x')^2-k^2[(y-y')^2+z^2]}}, \qquad (30.1)$$

причём интегрирование распространяется на ту часть плоскости (x', y'), для которой подкоренное выражение в (30.1) положительно (рис. 101). Так же как и в § 28, нам придётся, таким образом, иметь дело с областями, отсекаемыми ветвями гиперболы

$$(x-x')^2-k^2(y-y')^2=k^2z^2;$$

как и в § 28, мы берём лишь ту ветвь гиперболы, для которой $x' < x - k\sqrt{(y-y')^2+z^2}$.

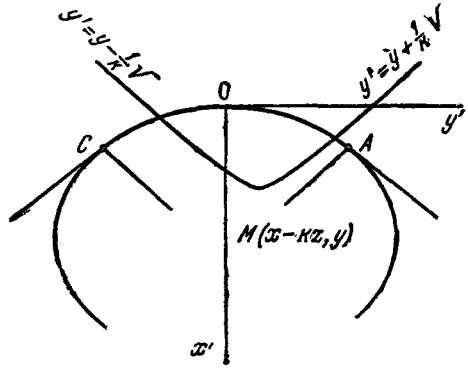

Рис. 101.

Заметим теперь, что $c(x', y')$ в (30.1) имеет простой гидродинамический смысл:

$$c(x, y) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right)_{z=0}. \tag{30.2}$$

Чтобы убедиться в этом, запишем сперва (30.1) в виде

$$\Phi(x, y, z) = \int\limits_{x'=-\infty}^{x'=x-kz} \int\limits_{y'=y-\frac{1}{k}\sqrt{(x-x')^2-k^2z^2}}^{y'=y+\frac{1}{k}\sqrt{(x-x')^2-k^2z^2}} \frac{c(x', y')\,dx'\,dy'}{\sqrt{(x-x')^2-k^2[(y-y')^2+z^2]}} \tag{30.3}$$

и введём вместо y' независимую переменную θ из равенства

$$y' = y - \frac{1}{k}\sqrt{(x-x')^2-k^2z^2}\cos\theta.$$

Так как

$$dy' = \frac{1}{k}\sqrt{(x-x')^2-k^2z^2}\sin\theta\,d\theta$$

и

$$(x-x')^2 - k^2[(y-y')^2+z^2] = \sin^2\theta\,[(x-x')^2-k^2z^2],$$

получим:

$$\Phi'(x, y, z) = \int\limits_{x'=-\infty}^{x'=x-kz} \int\limits_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{c\left(x', y-\frac{1}{k}\sqrt{(x-x')^2-k^2z^2}\cos\theta\right)}{k}\,d\theta\,dx'. \tag{30.4}$$

Дифференцируя (30.4) по параметру z и полагая затем $z=0$, придём к соотношению (30.2).

Можно отметить четыре характерных положения ветви гиперболы, составляющей границу области интегрирования в выражении (30.1): 1) ветвь гиперболы лежит целиком вне крыла (кривая I, рис. 102); 2) ветвь гиперболы пересекает крыло, но так, что точки A и C остаются вне области интегрирования (кривая I); 3) ветвь гиперболы пересекает крыло, и точка A (или C) находится внутри области

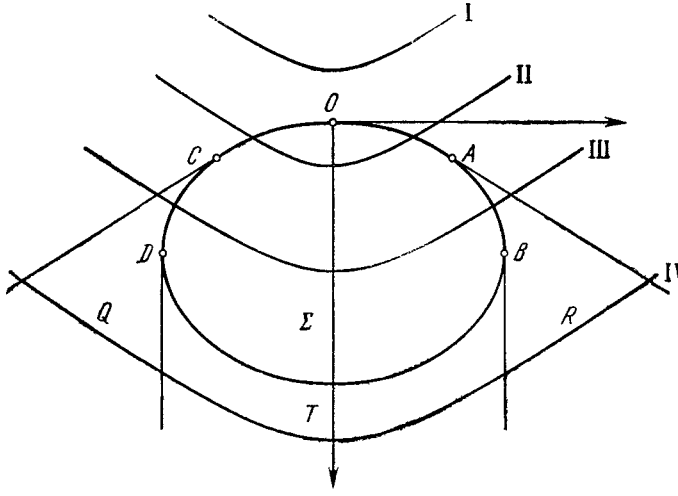

Рис. 102.

интегрирования, но точка B (и D) находится вне области интегрирования (кривая III); 4) ветвь гиперболы расположена так, что A и B (C и D) попадают внутрь области интегрирования.

В случае 1) точки области интегрирования потоком не возмущаются. Мы имеем здесь

$$\Phi'(x, y, z)=0.$$

В случае 2) подынтегральная функция из (30.1) будет известна всюду, и точки области интегрирования все лежат на крыле; если уравнение поверхности крыла

$$z=\zeta(x, y),$$

то по (28.23) и (30.2)

$$c(x, y)=-\frac{v_1}{\pi}\frac{\partial\zeta(x, y)}{\partial x}. \tag{30.5}$$

В случае 3) область интегрирования будет частично выходить за пределы крыла (часть плоскости между линией AA' и контуром крыла); здесь принято говорить о влиянии «концевого эффекта».

Функция $c(x, y)$ будет и здесь определяться с помощью (30.2), однако теперь c будет заранее неизвестна в тех точках области интегрирования, которые лежат вне поверхности крыла. В случае 4) область интегрирования заходит за пределы крыла ещё и в вихревую пелену; здесь говорят о влиянии «вихревой системы за крылом». Как и в 3), функция c будет заранее неизвестна в точках области интегрирования, находящихся вне крыла.

Чтобы решить задачу в случаях влияния концевого эффекта и вихревой системы, поставим краевые условия. Но прежде чем это делать, обратимся к описанию формы поверхности крыла.

До сих пор мы не определяли вид поверхности крыла. Предположим, что поверхность верхней ($z > 0$) части крыла представлена уравнением

$$z = \zeta_в(x, y), \tag{30.6}$$

а поверхность нижней части крыла имеет вид:

$$z = \zeta_н(x, y). \tag{30.7}$$

Рассмотрим два типовых случая: а) случай крыла, симметричного по отношению к плоскости $z = 0$; здесь $\zeta_в(x, y) = -\zeta_н(x, y)$ и б) случай крыла нулевой толщины; здесь $\zeta_в(x, y) = \zeta_н(x, y)$. Легко видеть, что общий случай может быть сведён к рассмотрению этих типовых случаев. Действительно, пусть крыло задано уравнением (30.6) и (30.7). Составим комбинации

$$\xi(x, y) = [\zeta_в(x, y) - \zeta_н(x, y)]\frac{1}{2}; \quad \eta = [\zeta_в(x, y) + \zeta_н(x, y)]\frac{1}{2} \tag{30.8}$$

и решим задачу обтекания, симметричного по отношению к плоскости $z = 0$ крыла с уравнением поверхности

$$z_в = \xi(x, y), \quad z_н = -\xi(x, y), \tag{30.9}$$

а также задачу обтекания крыла нулевой толщины с уравнениями поверхности

$$z_в = \eta(x, y), \quad z_н = \eta(x, y). \tag{30.10}$$

Так как $\xi + \eta = \zeta_в$, $\eta - \xi = \zeta_н$ и так как наша задача линейна, то, складывая решения, отвечающие крыльям (30.9) и (30.10), мы получим решение, отвечающее задаче обтекания произвольного профиля (30.6), (30.7).

Перейдём теперь к формулировке краевых условий задачи.

В случае крыла, симметричного относительно плоскости $z = 0$, естественно считать, что скорости вдоль оси z антисимметричны по отношению к плоскости $z = 0$. Тогда для всех точек плоскости $z = 0$ вне поверхности крыла мы должны будем считать

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial z} = 0. \tag{30.11}$$

Таким образом, в формуле (30.1) надо просто положить $c=0$ во всех точках вне крыла и определить c по формуле (30.5) в точках, отсекаемых на крыле гиперболами типа III или IV.

Гораздо сложнее обстоит дело в случае профиля нулевой толщины. Здесь $\partial\Phi'/\partial z$ будет симметрично относительно плоскости $z=0$. Поверхности R, Q, T являются поверхностями разрыва функции Φ'; на этих поверхностях должны выполняться условия непрерывности нормальной составляющей скорости и давления. Это означает, что вне крыла, при переходе через плоскость $z=0$, производные $\partial\Phi'/\partial z$ и $\partial\Phi'/\partial x$ по (28.12) будут непрерывны. Но так как теперь $\partial\Phi'/\partial z$ симметрично относительно плоскости $z=0$, то $\partial\Phi'/\partial x$ должно быть антисимметрично, или, так как $\partial\Phi'/\partial x$ непрерывно при переходе через плоскость $z=0$, то мы должны потребовать, чтобы было

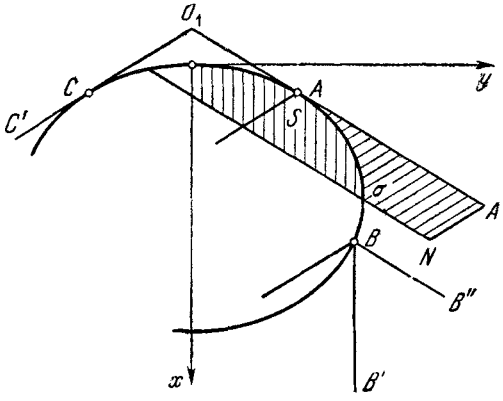

Рис. 103.

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial x}=0 \quad \text{при } z=0 \tag{30.12}$$

на вихревой пелене T, а также в областях R и Q. Заметим ещё, что на линии AA' (CC') (рис. 103) должно быть $\Phi'=0$, и тогда, по (30.12), во всей области R (Q) будет $\Phi'=0$. Таким образом, в случае крыла нулевой толщины мы должны решить следующую краевую задачу. Определить Φ' так, чтобы было при $z=0$

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial z}=v_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} \quad \text{в области } \Sigma, \tag{30.13}$$

$$\Phi'=0 \quad \text{в области } R(Q), \tag{30.14}$$

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial x}=0 \quad \text{в области } T. \tag{30.15}$$

Покажем, как можно решить эту задачу.

Начнём со случая влияния одного концевого эффекта. Итак, пусть положение гиперболы, отделяющей область интеграции в выражении (30.1), отвечает на рис. 102 кривой III. В области R функция $c(x, y)$ неизвестна. Построим интегральное уравнение для её определения. Для этого обратимся к той части области R, которая расположена между характеристикой AA' (рис. 103) и характеристикой BB'' (точка A — по-прежнему точка, в которой характеристика

касается контура, точка B — крайняя справа точка контура). Выразим по формуле (30.1) потенциал скорости Φ' какой-либо точки $N(x, y, 0)$ этой области. По (30.14) этот потенциал равен нулю. Область интегрирования разобьём на две части (как показано на рис. 103) — область $S(x, y)$ и $\sigma(x, y)$. Область S — это часть крыла, находящаяся внутри характеристического конуса с вершиной в $N(x, y, 0)$. В области S, согласно (30.2) и (30.13), функция задана. Область σ — часть области R, находящаяся внутри нашего конуса. В этой области c является неизвестной величиной. Таким образом, мы приходим к интегральному уравнению

$$0 = \iint\limits_{\sigma(x, y)} \frac{c(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 - k^2(y-y')^2}}\, dx'\, dy' + f(x, y), \quad (30.16)$$

где $f(x, y)$ — известная функция:

$$f(x, y) = -\frac{v_1}{\pi} \iint\limits_{S(x', y')} \frac{\partial \zeta(x', y')}{\partial x'} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 - k^2(y-y')^2}}\, dx'\, dy'. \quad (30.17)$$

Интегральное уравнение (30.16) существенно упрощается и может быть легко решено, если ввести вместо x и y характеристические координаты x_1, y_1 из равенств:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x - x_0 - k(y - y_0); \quad & y_1 &= x - x_0 + k(y - y_0); \\ x_1' &= x' - x_0 - k(y' - y_0); \quad & y_1' &= x' - x_0 + k(y' - y_0). \end{aligned}\right\} \quad (30.18)$$

Здесь x_0, y_0 — любые числа, например, координаты точки O_1 пересечения характеристик, проходящих через A и C соответственно (рис. 103). Так как по известному правилу

$$dx'\, dy' = \frac{D(x_1', y_1')}{D(x', y')}\, dx'\, dy' = \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ -k, & k \end{vmatrix} dx'\, dy' = 2k\, dx'\, dy',$$

то мы получим вместо (30.17):

$$\iint\limits_{\sigma} \frac{c(x_1', y_1')}{\sqrt{(x_1 - x_1')(y_1 - y_1')}}\, dx_1'\, dy_1' = -2kf. \quad (30.19)$$

В новых координатах переменные интегрирования в области σ будут меняться в пределах

$$0 \leqslant x_1' \leqslant x_1, \quad \psi_1(x_1) \leqslant y_1' \leqslant y_1,$$

где $y_1 = \psi_1(x_1)$ — уравнение в новых координатах боковой кромки крыла — дуги $\overset{\frown}{AB}$ (рис. 104), в области S переменная x_1' меняется

в тех же пределах, а переменная y_1' меняется в пределах

$$\psi(x_1) \leqslant y_1' \leqslant \psi_1(x_1),$$

где $y_1 = \psi(x_1)$ — уравнение передней кромки крыла — дуги $\overset{\smile}{CA}$.

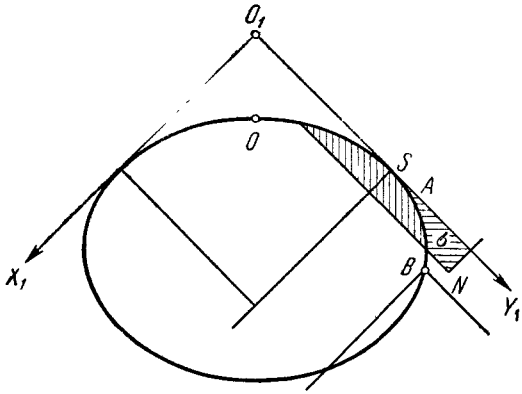

Рис. 104.

Таким образом, наше интегральное уравнение (30.19) будет иметь вид

$$\int_0^{x_1} \int_{\psi_1(x_1)}^{y_1} \frac{c(x_1', y_1')}{\sqrt{(x_1 - x_1')(y_1 - y_1')}}\, dy_1'\, dx_1' =$$

$$= -\int_0^{x_1} \int_{\psi(x_1)}^{\psi_1(x_1)} \frac{a(x_1', y_1')}{\sqrt{(x_1 - x_1')(y_1 - y_1')}}\, dy_1'\, dx_1', \qquad (30.20)$$

где

$$a = -\frac{v_1}{\pi} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \qquad (30.21)$$

(известная величина). Решение уравнения (30.20) равносильно решению двух уравнений Абеля. Собирая оба интеграла из (30.20), получим

$$\int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{x_1 - x_1'}} \left[\int_{\psi_1(x_1)}^{y_1} \frac{c(x_1', y_1')}{\sqrt{y_1 - y_1'}}\, dy_1' + \int_{\psi(x_1)}^{\psi_1(x_1)} \frac{a(x_1', y_1')}{\sqrt{y_1 - y_1'}}\, dy_1' \right] dx_1' = 0. \qquad (30.22)$$

Это — уравнение Абеля с переменным пределом и с правой частью, тождественно равной нулю. Следовательно, квадратная скобка

в (30.22) должна быть нулем при $x_1' = x$ и, таким образом,

$$\int\limits_{\psi_1(x_1)}^{y_1} \frac{c(x_1, y_1')}{\sqrt{y_1 - y_1'}}\, dy_1' = -\int\limits_{\psi(x_1)}^{\psi_1(x_1)} \frac{a(x_1, y_1')}{\sqrt{y_1 - y_1'}}\, dy_1'. \qquad (30.23)$$

Это вновь уравнение Абеля, но с правой частью.

Чтобы решить его, умножим сперва обе его части на $1/\sqrt{t - y_1}$ и проинтегрируем по y_1 от $y_1 = \psi_1(x_1)$ до $y_1 = t$. Получим

$$\int\limits_{\psi_1(x_1)}^{t} \frac{1}{\sqrt{t - y_1}} \left[\int\limits_{\psi_1(x_1)}^{y_1} \frac{c(x_1, y_1')}{\sqrt{y_1 - y_1'}}\, dy_1' \right] dy_1 =$$

$$= -\int\limits_{\psi_1(x_1)}^{t} \frac{1}{\sqrt{t - y_1}} \left[\int\limits_{\psi(x_1)}^{\psi_1(x_1)} \frac{a(x_1, y_1')}{\sqrt{y_1 - y_1'}}\, dy_1' \right] dy_1. \qquad (30.24)$$

Или, меняя порядок интегрирования справа и слева:

$$\int\limits_{\psi_1(x_1)}^{t} c(x_1, y_1') \left[\int\limits_{y_1'}^{t} \frac{dy_1}{\sqrt{(t - y_1)(y_1 - y_1')}} \right] dy_1' =$$

$$= -\int\limits_{\psi(x_1)}^{\psi_1(x_1)} a(x_1, y_1') \left[\int\limits_{\psi_1(x_1)}^{t} \frac{dy_1}{\sqrt{(t - y_1)(y_1 - y_1')}} \right] dy_1'. \qquad (30.25)$$

Но

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dy_1}{\sqrt{(t - y_1)(y_1 - y_1')}} = \Big|_{y_1 = \beta}^{y_1 = \alpha} \arcsin\left(1 - 2\frac{y_1 - y_1'}{t - y_1'}\right),$$

и мы придём к формуле:

$$\pi \int\limits_{\psi_1(x_1)}^{t} c(x_1, y_1')\, dy_1' =$$

$$= -\int\limits_{\psi(x_1)}^{\psi_1(x_1)} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left[1 - 2\frac{\psi_1(x_1) - y_1'}{t - y_1'} \right] \right\} a(x_1, y_1')\, dy_1'.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по t и заменяя затем t на y_1, получим окончательно:

$$c(x_1, y_1) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y_1 - \psi_1(x_1)}} \int\limits_{\psi(x_1)}^{\psi_1(x_1)} a(x_1, y_1') \frac{\sqrt{\psi_1(x_1) - y_1'}}{y_1 - y_1'}\, dy_1'. \qquad (30.26)$$

Заметим, что по (30.26) скорости возмущённого потока v_z' обращаются в бесконечность при приближении к дуге $\overset{\smile}{AB}$ (к линии $y_1 = \psi_1(x_1)$) извне как $1/R$, где R — расстояние от точки $N(x_1, y_1, 0)$ до дуги.

Значение функции c в области Q найдётся аналогичным образом заменой функций ψ и ψ_1 на соответствующие функции, представляющие форму кромки «левой стороны».

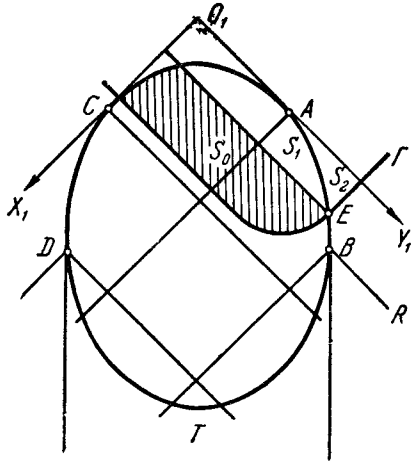

Рис. 105.

Зная c в области R, мы можем найти теперь потенциал Φ' в любой точке M, для которой область интегрирования в (30.1) распространена на поверхность крыла и область R (случай III, рис. 102); пусть эта область интегрирования отсекается гиперболой Γ (рис. 105). Для нахождения потенциала перейдём к координатам x_1, y_1, z_1:

$$x_1 = x - x_0 - k(y - y_0),$$
$$y_1 = x - x_0 + k(y - y_0),$$
$$z_1 = kz,$$

где x_0, y_0 — координаты точки O_1 пересечения касательных, проходящих через A и C (рис. 105).

В новых координатах (30.1) запишется в виде:

$$\varphi'(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2k}\left\{ \iint\limits_{S_0+S_1} \frac{a(x_1', y_1')}{\sqrt{(x_1 - x_1')(y_1 - y_1') - z_1^2}}\, dx_1'\, dy_1' + \right.$$
$$\left. + \iint\limits_{S_2} \frac{c(x_1', y_1')}{\sqrt{(x_1 - x_1')(y_1 - y_1') - z_1^2}}\, dx_1'\, dy_1' \right\}. \quad (30.27)$$

Область интегрирования разбита в этой формуле на три части $S_0 + S_1 + S_2$ (рис. 105). Здесь S_2 — часть области интегрирования, расположенная в R; S_0 — часть крыла, расположенная между гиперболой Γ и прямой, параллельной оси Y_1 и проходящей через точку E пересечения гиперболы Γ с контуром крыла; S_1 — остальная часть крыла.

Пользуясь формулой (30.26), вычислим интеграл по площадке S_2 в формуле (30.27). В пределах площадки S_2 переменная x_1' меняется от 0 до x_E, где x_E — абсцисса упомянутой точки E: $0 \leqslant x_1' \leqslant x_E$;

так как уравнение ветви Г будет $(x_1 - x_1')(y_1 - y_1') - z_1^2 = 0$, или $y_1' = y_1 - \dfrac{z_1^2}{x_1 - x_1'}$, то y_1' на площадке S_2 лежит в пределах

$$\psi_1(x_1) \leqslant y_1' \leqslant y_1 - \frac{z_1^2}{x_1 - x_1'}.$$

Таким образом, мы можем написать по (30.26):

$$J = \iint_{S_2} \frac{c(x_1', y_1')\,dx_1'\,dy_1'}{\sqrt{(x_1 - x_1')(y_1 - y_1') - z_1^2}} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{x_E} \int_{\psi_1(x_1)}^{y_1 - \frac{z_1^2}{x_1 - x_1'}} \times$$

$$\times \left\{ \int_{\psi(x_1)}^{\psi_1(x_1)} \frac{a(x_1', y_1')\sqrt{\psi_1(x_1') - y_1''}\,dy_1''}{\sqrt{y_1' - \psi(x_1')(y_1' - y_1'')}\,\sqrt{(x_1 - x_1')(y_1 - y_1') - z_1^2}} \right\} dy_1' dx_1'$$

или, меняя интегрирование по y_1'' и y_1':

$$J = -\frac{1}{\pi} \int_0^{x_E} \int_{\psi(x_1)}^{\psi_1(x_1)} \frac{a(x_1', y_1'')\sqrt{\psi(x_1') - y_1''}}{\sqrt{x_1 - x_1'}} \times$$

$$\times \left\{ \int_{\psi_1(x_1)}^{y_1 - \frac{z_1^2}{x_1 - x_1'}} \frac{dy_1'}{\sqrt{y_1' - \psi_1(x_1')}(y_1' - y_1'')\sqrt{y_1 - \dfrac{z_1^2}{x_1 - x_1'} - y_1'}} \right\} dy_1''\,dx_1'.$$

Внутренняя квадратура выполняется и даёт

$$\{\ \} = \frac{\pi}{\sqrt{y_1' - y_1'' - \dfrac{z_1^2}{x_1 - x_1'}}\,\sqrt{\psi_1(x_1') - y_1''}}\ ^{1}),$$

---

[1]) Интеграл

$$\int_\alpha^\beta \frac{dy_1'}{\sqrt{(y_1' - \alpha)(\beta - y_1')(y_1' - y_1'')}}$$

с помощью замены $\sqrt{(y_1' - \alpha)(\beta - y_1')} = (y_1' - \alpha)t$ приводится к виду

$$2\int_0^\infty \frac{dt}{\beta + \alpha t^2 - y_1''(1 + t^2)} = \frac{\pi}{\sqrt{(\alpha - y_1'')(\beta - y_1'')}}.$$

и таким образом мы получаем

$$J=-\int_0^{x_E}\int_{\psi(x_1)}^{\psi_1(x_1)}\frac{a(x_1', y_1'')\,dy_1''\,dx_1'}{\sqrt{(x_1-x_1')(y_1-y_1'')-z_1^2}}. \qquad (30.28)$$

Обращая внимание на пределы интегрирования в (30.28), заметим, что последнее распространяется на площадку S_1. По (30.27) можем теперь написать:

$$\Phi'(x_1, y_1, z_1)=$$

$$=\frac{1}{2k}\int\limits_{S_0+S_1}\int\frac{a(x_1', y_1')\,dx_1'\,dy_1'}{\sqrt{(x_1-x_1')(y_1-y_1')-z_1^2}}-\frac{1}{2k}\int\limits_{S_1}\int\frac{a(x_1', y_1')\,dx_1'\,dy_1'}{\sqrt{(x-x')(y-y')-z_1^2}}.$$

Но тогда интегралы по площадке S_1 сокращаются так, что Φ' принимает вид:

$$\Phi'(x_1, y_1, z_1)=\frac{1}{2k}\int\limits_{S_0}\int\frac{a(x_1', y_1')\,dx_1'\,dy_1'}{\sqrt{(x_1-x_1')(y_1-y_1')-z_1^2}}. \qquad (30.29)$$

Мы получили, таким образом, интересный результат: для вычисления Φ' приходится интегрировать по поверхности крыла, причём только по той его части, которая находится между гиперболой Г и прямой, параллельной характеристике и выходящей из точки E пересечения гиперболы Г с контуром крыла (заштрихована на рис. 105).

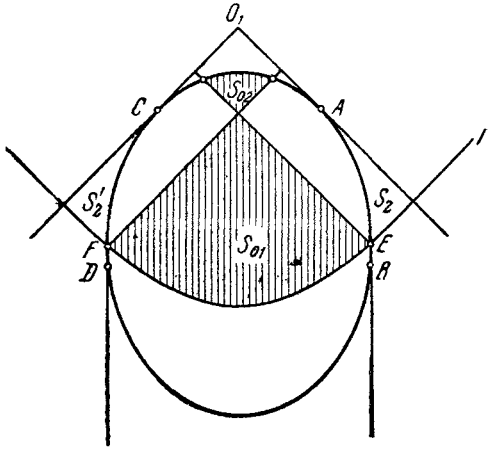

Рис. 106.

В рассматривавшемся нами случае, отвечающем рис. 105, приходилось учитывать концевой эффект только одного края крыла (AE). На рис. 106 представлен такой случай пересечения гиперболы Г с плоскостью крыла, при котором приходится учитывать концевой эффект обоих краев. Повторяя рассуждения, приведённые выше, убедимся, что достаточно будет распространить интегрирование на площадь $S_{01}+S_{02}$ (заштрихована), причём интеграл, распространённый на область S_{02}, надо взять с обратным знаком.

Простота этого случая заключается в том, что части $R(Q)$, которые здесь приходится рассматривать (области S_2, S_2'), находятся

каждая под влиянием концевого эффекта лишь своего края: влияние «левого» концевого эффекта не распространяется на область S_2, влияние «правого» края крыла не распространяется на S_2'. В общем случае может оказаться так, что для некоторых точек поверхности крыла и области $R(Q)$ будут интерферировать влияния обоих концов. Это может произойти в случае, когда крыло мало распространено вдоль оси Y и вытянуто вдоль оси X. Такое крыло называется крылом «малого удлинения» (рис. 107).

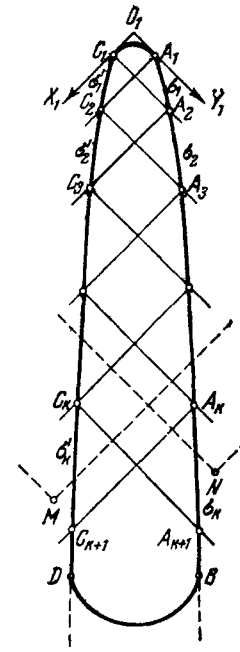

Рис. 107.

Пусть $A_1(C_1)$ точки контура крыла, в которых касательные к контуру параллельны характеристикам. Введем, как и прежде, систему осей X_1, Y_1 (аналогично случаю, изображённому на рис. 105). Через точку A_1 проведём характеристику (параллельную оси X_1) до пересечения с контуром в точке C_2. Из точки C_1 проведём характеристику (прямую, параллельную оси Y_1) до пересечения с контуром в точке A_2. Из точки A_2 проведём характеристику до пересечения с левой частью контура (C_3); из точки C_2 проведём прямую до пересечения с правой частью крыла в A_3 и т. д. Полоски области $R(Q)$, лежащие между проведёнными характеристиками, обозначим через $\sigma_1(\sigma_1')$, $\sigma_2(\sigma_2')$, ... (см. рис. 107). Пусть ещё уравнение правой концевой кромки крыла (линия $\overset{\frown}{A_1A_2\ldots B}$) записывается как и прежде в виде $y_1=\psi_1(x_1)$, а уравнение левой концевой кромки (линия $\overset{\frown}{C_1C_2\ldots D}$) имеет вид $y_1=\psi_2(x_1)$. Запишем теперь условие, что потенциал Φ' в любой точке $N(x_1, y_1)$ полоски σ_k равен нулю. Аналогично тому, как это имело место в случае рис. 104, мы получим вновь уравнение Абеля типа (30.20), откуда последует равенство типа (30.21). Это будет

$$\int\limits_{\psi_1(x_1)}^{y_N}\frac{c_k(x_N, y_1')}{\sqrt{y_N-y_1'}}dy_1'+\int\limits_{\psi_2(x_N)}^{\psi_1(x_N)}\frac{a(x_N, y_1')}{\sqrt{y_N-y_1'}}dy_1'+$$

$$+\int\limits_{y_{k-1}}^{\psi_2(y_N)}\frac{c_{k-1}'(x_N, y_1')dy_1'}{\sqrt{y_N-y_1'}}+\sum_{i=1}^{k-2}\int\limits_{y_i}^{y_{i+1}}\frac{c_i'(x_N, y_1')}{\sqrt{y_N-y_1'}}dy_1'=0. \quad (30.30)$$

Здесь $c_k = -1/\pi\, \partial\varphi'/\partial z$ в точках полоски σ_k, y_k — ордината точки пересечения через точку $y = y_N$ и прямой, параллельной оси x_1 и проходящей через точку c_{k-1}. Что же касается до функций $c_1'(x_1, y_1)$, $c_2'(x_1, y_1), \ldots, c_{k-1}'(x_1, y_1)$, то это значения величин $-1/\pi\, \partial\varphi'/\partial z$ в полосках $\sigma_1', \sigma_2', \ldots, \sigma_{k-1}'$ соответственно (член, содержащий Σ, появляется только при $k \geqslant 3$).

Если известны $c_1', c_2', \ldots, c_{k-1}'$, то функция c_k найдётся путём решения уравнения Абеля (30.30). Совершенно так же, как и в случае (30.21), мы получим

$$c_k(x_N, y_N) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{y_N - \psi_1(x_N)}}\left\{\int_{\psi_2(x_N)}^{\psi_1(x_N)} \frac{a(x_N, y_1')\sqrt{\psi_1(x_N) - y_1'}}{\sqrt{y_N - y_1'}}\, dy_1' + \right.$$
$$\left. + \int_{y_{k-1}}^{\psi_2(x_N)} \frac{c_{k-1}'(x_N, y_1')\, dy_1'}{\sqrt{y_N - y_1'}} + \sum_{i=1}^{k=2} \int_{y_i}^{y_{i-1}} \frac{c_i'(x_N, y_1')}{\sqrt{y_N - y_1'}} \sqrt{\psi_1(x_N) - y_1'}\, dy_1' \right\}. \tag{30.31}$$

С другой стороны, можем написать аналогичную формулу для $c_k'(x_M, y_M)$, где x_M и y_M — координаты любой точки $M(x_M, y_M)$ области σ_k'. Именно, если записать уравнение правой концевой кромки в виде, решённом относительно x_1 : $x_1 = \chi_1(y_1)$, а левой — $x_1 = \chi_2(y_1)$, то мы будем иметь:

$$c_k'(x_M, y_M) = -\frac{1}{\pi\sqrt{x_M - \chi_2(y_M)}}\left\{\int_{\chi_1(y_M)}^{\chi_2(y_n)} \frac{a(x_1', y_M)\sqrt{\chi_2(y_M) - x_1'}}{\sqrt{x_M - x_1'}}\, dx_1' + \right.$$
$$+ \int_{x_{k-1}}^{\chi_1(y_M)} \frac{c_{k-1}(x_1', y_M)\sqrt{\chi_2(y_M) - x_1'}}{\sqrt{x_M - x_1'}}\, dx_1' +$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{i=k-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{c_i(x_1', y_M)\sqrt{\chi_2(y_M) - x_1'}}{\sqrt{x_M - x_1'}}\, dx_1' \right\}. \tag{30.32}$$

Формулы (30.31), (30.32) позволят последовательно определить все функции c_i, c_i'. В самом деле, функции c_1, c_1' уже определены выше (формулы типа (30.26)). Зная c_1, c_1', найдём по (30.31) и (30.32) значения c_2 и c_2' и т. д.

На деталях расчёта мы не будем останавливаться. Перейдём теперь к рассмотрению влияния вихревой системы за крылом (рис. 102,

гипербола IV). Будем отправляться вновь от основной формулы потенциала (30.1). Вновь введём характеристические координаты x_1, y_1. Влияние вихревой системы за крылом будет распространяться на точки области T (рис. 105), а также на точки области $R(Q)$, расположенные внутри конуса характеристик, выходящего из точки $B(D)$. В области T должно выполняться условие (30.15), которое в переменных x_1, y_1 имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y_1} = 0. \tag{30.33}$$

Во всех точках области R выполняется условие (30.14): $\varphi' \equiv 0$. Следовательно, и в этих точках будет выполняться условие (30.33). Потенциал φ' в точках N интересующей нас области имеет вид

$$\varphi'(x_1, y_1) = \frac{1}{2k} \iint\limits_{S_0+S_1+S_2+\sigma} \frac{c(x_1', y_1')\, dx_1'\, dy_1'}{\sqrt{(x_1 - x_1')(y_1 - y_1')}}, \tag{30.34}$$

причём интегрирование распространяется на три площадки: 1) площадку $S_0 + S_1$, отсекаемую на крыле характеристикой, проходящей через N параллельно оси Y_1 (рис. 108), 2) площадку S_2 — полоску области R (вне крыла), расположенную между Y_1 и линией, параллельной Y_1 и проходящей через точку B, 3) площадку σ — область вне крыла, лежащую внутри конусов характеристик с вершинами в точках B и N.

Заметим теперь, что значение c на поверхности крыла нам известно; мы обозначили его через $a(x_1, y_1)$. Значение c в области S_2 мы уже умеем находить (формула (30.26)), причём мы знаем, что интеграл (30.34), взятый по области S_2, должен сократиться в силу (30.28) с интегралом, взятым по части S_1 (рис. 108) крыла, отсекаемой продолжением характеристики, проходящей через B параллельно оси Y_1. В области σ функция неизвестна.

Для определения c области σ воспользуемся условием (30.33). Прежде чем начать производить выкладки, связанные с дифференцированием под знаком интеграла, поставим условие непрерывности функции c на задней кромке крыла (линия $\widetilde{BB'D}$), т. е. поставим условие

$$c(x_1, \psi'(x_1)) = a(x_1, \psi'(x_1)), \tag{30.35}$$

где $y_1 = \psi'(x_1)$ — уравнение задней кромки. Это требование аналогично условию Жуковского для обтекания крыла несжимаемой жидкостью.

Если уравнение передней части кромки (дуга $\overset{\frown}{AA'C}$) будет $y_1 = \psi(x_1)$, то мы можем записать (30.33) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{x_B}^{x_1}\int_{\psi(x_1')}^{y_1}\frac{c(x_1', y_1')\,dy_1'\,dx_1'}{\sqrt{(x_1-x_1')(y_1-y_1')}} + \\ + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_{x_B}^{x_1}\int_{\psi(x_1')}^{y_1}\frac{c(x_1', y_1')\,dy_1'\,dx_1'}{\sqrt{(x_1-x_1')(y_1-y_1')}} = 0, \quad (30.36)$$

где x_B—абсцисса точки B (рис. 108). Прежде чем дифференцировать,

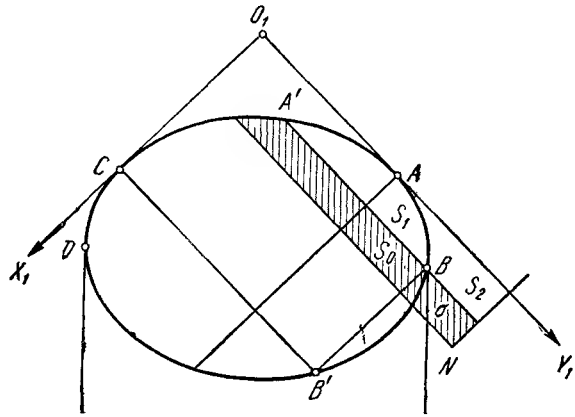

Рис. 108.

преобразуем наши интегралы путём интегрирования по частям. Именно, интегрируя по x_1', получим

$$\int_{x_B}^{x_1}\int_{\psi(x_1')}^{y_1}\frac{c(x_1', y_1')\,dy_1'\,dx_1'}{\sqrt{(x_1-x_1')(y_1-y_1')}} = \int_{x_B}^{x_1}\frac{1}{\sqrt{x_1-x_1'}}\left[\int_{\psi(x_1')}^{y_1}\frac{c(x_1', y_1')\,dy_1'}{\sqrt{y_1-y_1'}}\right]dx_1' = \\ = 2\sqrt{x_1-x_B}\int_{\psi(x_B)}^{y_1}\frac{c(x_B, y_1')\,dy_1'}{\sqrt{y_1-y_1'}} + \\ + 2\int_{x_B}^{x_1}\sqrt{x_1-x_1'}\left[\int_{\psi(x_1')}^{y_1}\frac{1}{\sqrt{y_1-y_1'}}\frac{\partial c}{\partial x_1'}\,dy_1'\right]dx_1' - \\ - 2\int_{x_B}^{x_1}\sqrt{x_1-x_1'}\,\frac{d\psi(x_1')}{dx_1'}\,\frac{c(x_1', \psi(x_1'))}{\sqrt{y_1-\psi(x_1')}}\,dx_1'. \quad (30.37)$$

Аналогично условию (30.35) примем ещё непрерывность c при переходе через линию $\overline{A'B}$ (рис. 108). Тогда первый интеграл правой части равенства (30.37) будет равен нулю (см. (30.23)), и мы получим, дифференцируя обе части (30.37) по параметру x_1:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\iint\limits_{\sigma+S_0}\frac{c(x', y')\,dy_1'\,dx_1'}{\sqrt{(x_1-x_1')(y_1-y_1')}}=\iint\limits_{\sigma+S_0}\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_1')(y_1-y_1')}}\frac{\partial c}{\partial x_1'}\,dy_1'\,dx_1'-$$

$$-\int\limits_{x_B}^{x_1}\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_1')[y_1-\psi_1(x_1')]}}\frac{\partial\psi(x_1')}{\partial x_1'}\,c(x_1', \psi(x_1'))\,dx_1'. \quad (30.38)$$

Второй интеграл в правой части (30.38) берётся вдоль линии $\overset{\frown}{A'C}$ передней части кромки крыла.

Запишем ещё раз наш интеграл, выполняя на этот раз частное интегрирование по y_1':

$$\int\limits_{x_B}^{x_1}\int\limits_{\psi(x_1')}^{y_1}\frac{c(x_1', y_1')\,dy_1'\,dx_1'}{\sqrt{(x_1-x_1')(y_1-y_1')}}=\int\limits_{x_B}^{x_1}\frac{1}{\sqrt{x_1-x_1'}}\left[\int\limits_{\psi(x_1')}^{y_1}\frac{c(x_1', y_1')}{\sqrt{y_1-y_1'}}\,dy_1'\right]dx_1'=$$

$$=\int\limits_{x_B}^{x_1}\frac{1}{\sqrt{x_1-x_1'}}\left[2\sqrt{y_1-\psi(x_1')}\,c(x', \psi(x_1'))+\right.$$

$$\left.+2\int\limits_{\psi(x_1')}^{y_1}\sqrt{y_1-\psi(x_1')}\,\frac{\partial c}{\partial y_1'}\,dy_1'\right]dx_1'. \quad (30.39)$$

Дифференцируя (30.39) по параметру y_1, получим:

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\iint\limits_{\sigma+S_0}\frac{c(x_1', y_1')}{\sqrt{(x_1-x_1')(y_1-y_1')}}\,dy_1'\,dx_1'=$$

$$=\iint\limits_{\sigma+S_0}\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_1')(y_1-y_1')}}\frac{\partial c(x_1', y_1')}{\partial y_1'}\,dx_1'\,dy_1'+$$

$$+\int\limits_{x_B}^{x_1}\frac{c(x_1', \psi(x_1'))\,dx_1'}{\sqrt{(x_1-x_1')[y_1-\psi(x_1')]}}. \quad (30.40)$$

Складывая (30.38) и (30.40) и заменяя $c(x', y')$ там, где оно известно, на $a(x', y')$, придём по (30.36) к соотношению:

$$\int_{x_B}^{x_1}\int_{\psi(x_1')}^{y_1}\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_1')(y_1-y_1')}}\left[\frac{\partial c(x_1', y_1')}{\partial x_1'}+\frac{\partial c(x_1', y_1')}{\partial y_1'}\right]dy_1'\,dx_1'=$$

$$=-\int_{x_B}^{x_1}\int_{\psi(x_1')}^{\psi'(x_1')}\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_1')(y_1-y_1')}}\left[\frac{\partial a(x_1', y_1')}{\partial x_1'}+\frac{\partial a(x_1', y_1')}{\partial y_1'}\right]dy_1'\,dx_1'-$$

$$-\int_{x_B}^{x_1}\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_1')|y_1-\psi(x_1')|}}\left[1-\frac{d\psi(x_1')}{dx_1'}\right]a(x_1', \psi(x_1'))\,dx_1'. \quad (30.41)$$

Второй интеграл справа следует брать вдоль линии дуги $\breve{CA}'$ (её уравнение: $y_1=\psi(x_1)$) передней части контура крыла. Дважды решая уравнение Абеля (30.41), мы сможем найти $\frac{\partial c}{\partial x_1}+\frac{\partial c}{\partial y_1}$, после чего, решая уравнение первого порядка в частных производных, найдём $c(x_1, y_1)$.

Собирая в (30.41) интегрирование по y_1' и приравнивая подынтегральное выражение нулю (см. наши рассуждения для уравнения (30.22)), сразу же решим одно уравнение Абеля и получим:

$$\int_{\psi'(x_1)}^{y_1}\frac{1}{\sqrt{y_1-y_1'}}\left[\frac{\partial c(x_1, y_1')}{\partial x_1}+\frac{\partial c(x_1, y_1')}{\partial y_1'}\right]dy_1'=$$

$$=-\int_{\psi(x_1)}^{\psi'(x_1)}\frac{1}{\sqrt{y_1-y_1'}}\left[\frac{\partial a(x_1, y_1')}{\partial x_1}+\frac{\partial a(x_1, y_1')}{\partial y_1'}\right]dy_1'-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{y_1-\psi(x_1)}}\left[1-\frac{d\psi(x_1)}{dx_1}\right]a(x_1, \psi(x_1)). \quad (30.42)$$

Это уравнение легко решается (см. аналогичное уравнение (30.23) и его решение с помощью формул (30.24) и далее). Мы придём к равенству:

$$\frac{\partial c}{\partial x_1}+\frac{\partial c}{\partial y_1}=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{y_1-\psi'(x_1)}}\int_{\psi(x_1)}^{\psi'(x_1)}\left(\frac{\partial a}{\partial x_1}+\frac{\partial a}{\partial y_1'}\right)\frac{\sqrt{\psi'(x_1)-y_1'}}{\sqrt{y_1-y_1'}}\,dy_1'-$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{y_1-\psi'(x_1)}}a(x_1, \psi(x_1))\left[1-\frac{d\psi(x_1)}{dx_1}\right]\frac{\sqrt{\psi'(x_1)-\psi(x_1)}}{y_1-\psi_1(x_1)}. \quad (30.43)$$

Уравнение (30.43) проинтегрируем вдоль прямой, параллельной набегающему потоку. При этом удобнее перейти к переменным ξ, η из равенств

$$\xi = x_1, \quad \eta = x_1 - y_1,$$

так что $\frac{\partial c}{\partial x_1} + \frac{\partial c}{\partial y_1} = \frac{\partial c}{\partial \xi}$, а линия $\eta = \text{const}$. представляет линию $x_1 - y_1 = \text{const}$., т. е., по (30.18), линию $y = \text{const}$., являющуюся прямой, параллельной основному потоку.

Нам остаётся выполнить одну квадратуру по ξ (заменив в правых частях (30.43) переменную x_1 на ξ, y_1 — на $\xi - \eta$). Если точка $N(x_1, y_1)$, для которой ведётся расчёт, находится в полосе T, то интегрировать по ξ надо будет от $\bar{\xi}$ до ξ, где $\bar{\xi}$ найдётся из уравнения $\bar{\xi} - \psi'(\bar{\xi}) = x_1 - y_1$ (точка контура находится на пересечении с прямой $\eta = x_1 - y_1$, выходящей из N).

Таким образом, функция $c(x_1, y_1)$ будет определена внутри вихревой полосы T.

Остановимся ещё на определении давления $p'(x, y, 0)$ на поверхности крыла.

По (28.12)

$$p' = -\rho_1 v_1 \frac{\partial \Phi'}{\partial x}. \quad (30.44)$$

В случае крыла, симметричного относительно плоскости $z = 0$, функция $\partial\Phi'/\partial x$ будет антисимметрична (см. стр. 278) и мы можем написать, например:

$$p'_н - p'_в = 2\rho_1 v_1 \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)_в.$$

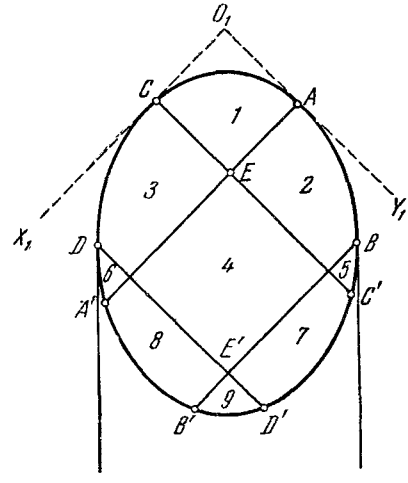

Рис. 109.

Таким образом, как для определения давления, так и для определения разности давлений достаточно будет уметь определить производную $\partial\Phi'/\partial x$ на поверхности крыла (иначе говоря — определить потенциальное ускорение $\varphi = v_1 \partial\Phi'/\partial x$; см. предыдущий параграф). Остановимся на этом подробнее.

Рассмотрим конкретный, но достаточно общий случай, отвечающий рис. 109. Пусть передняя кромка $\overset{\smile}{AC}$ крыла имеет в характеристических координатах уравнение $y_1 = \psi(x_1)$, а в решенном относительно x_1 виде $x_1 = \chi(y_1)$; пусть концевая кромка крыла задана в виде $y_1 = \psi_п(x_1)$ (дуга $\overset{\smile}{AB}$), или $x_1 = \chi_п(y_1)$ и $y_1 = \psi_л(x_1)$ (луга $\overset{\smile}{CD}$),

или $x_1 = \chi_л(y_1)$; задняя кромка дана в виде $y_1 = \psi'(x_1)$, или $x_1 = \chi'(y_1)$. Найдём давление потока на поверхность крыла.

Пусть характеристики, выходящие из точек A и C, пересекаются между собой на крыле в точке E (рис. 109) и пересекают заднюю кромку крыла в точках A' и C' соответственно.

Пусть ещё характеристики, выходящие из B и D, пересекаются между собой на поверхности крыла в точке E' и встречают кромку крыла в точках B' и D' соответственно.

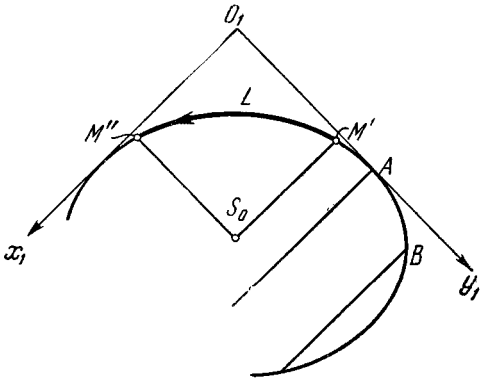

Рис. 110.

Всю поверхность крыла естественно разбить на 9 областей (см. рис. 109). В области *1* концевой эффект не сказывается. В области *2* (*3*) сказывается концевой эффект правой (левой) части, но не сказывается концевой эффект левой (правой) кромки; в области *4* сказываются оба концевых эффекта; в области *5* (*6*) сказывается влияние вихревой пелены, сбегающей с правой (левой) части крыла. В области *7* (*8*) сказывается эффект вихревой пелены, сбегающей с правой (левой) части кромки и ещё концевой эффект, отвечающий левой (правой) кромке. Наконец, в области *9* сказываются вихревые полосы, сбегающие как с правой, так и с левой стороны.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\left.\begin{aligned} a(x_1, y_1) &= -\frac{v_1}{\pi}\frac{\partial\zeta}{\partial x} = -\frac{v_1}{\pi}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial\zeta}{\partial y_1}\right); \\ b(x_1', y_1'; x_1, y_1) &= \frac{a(x_1', y_1')}{\sqrt{(x_1 - x_1')(y_1 - y_1')}}; \\ d(x_1', y_1'; x_1, y_1) &= \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_1')(y_1 - y_1')}}\left[\frac{\partial a(x_1', y_1')}{\partial x_1'} + \frac{\partial a(x_1', y_1')}{\partial y_1'}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (30.45)$$

В характеристических координатах

$$p_н' - p_в' = 2\rho_1 v_1\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi'}{\partial y_1}\right). \quad (30.46)$$

Обратимся к области *1* (рис. 110). Здесь имеем по (30.29):

$$\Phi_1' = \frac{1}{2k}\int_{\chi(y_1)}^{x_1}\int_{\psi(x_1')}^{y_1} b(x_1', y_1'; x_1, y_1)\,dy_1'\,dx_1'. \quad (30.47)$$

Выполним здесь частное интегрирование по x_1' и продифференцируем полученное выражение по x_1 (при этом мы воспользуемся преобразованием на стр. 278 и далее); выполним затем частное интегрирование по y_1' и продифференцируем результат по y_1. Складывая оба выражения, получим для области 1

$$(p_н' - p_в')_1 = \frac{\rho_1 v_1}{k}\left\{\int\limits_{S_0}\int d(x_1', y_1'; x_1, y_1)\,dx_1'\,dy_1' + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{L}\left[1 - \frac{d\psi(x_1')}{dx_1'}\right] b(x_1', \psi(x_1'); x_1, y_1)\,dx_1'\right\}, \quad (30.48)$$

где L — дуга $\overset{\frown}{M'M''}$ передней кромки крыла (при интегрировании перемещаемся от M' к M'').

В области 2 (рис. 111) отправляемся от выражения (30.29):

$$\Phi_2' = \frac{1}{2k}\int\limits_{\chi_п(y_1)}^{x_1}\int\limits_{\psi(x_1')}^{y_1} b(x_1', y_1'; x_1, y_1)\,dy_1'\,dx_1'. \quad (30.49)$$

Выполняем дифференцирование аналогично тому, как это было сделано выше [1]). Мы получим для области 2:

$$(p_н' - p_в')_2 = \frac{\rho_1 v_1}{k}\left\{\int\limits_{S_0}\int d(x_1', y_1'; x_1, y_1)\,dx_1'\,dy_1' + \right.$$
$$+ \int\limits_{L} b(x_1', \psi(x_1'); x_1, y_1)\left[1 - \frac{d\psi(x_1')}{dx_1'}\right] dx_1' +$$
$$\left. + \left[1 - \frac{d\chi_п(y_1)}{dy_1}\right]\int\limits_{L_1} b(\chi_п(y_1), y_1'; x_1, y_1)\,dy_1'\right\}, \quad (30.50)$$

---

[1]) При дифференцировании по y_1 удобно будет начать с дифференцирования по нижнему пределу:

$$\frac{\partial\Phi_2'}{\partial y_1} = \frac{1}{2k}\frac{\partial}{\partial y_1}\int\limits_{\chi_п(y_1)}^{x_1}\frac{1}{\sqrt{x_1 - x_1'}}\left[\int\limits_{\psi(x_1')}^{y_1}\frac{a(x_1', y_1')}{\sqrt{y_1 - y_1'}}\,dy_1'\right] dx_1' =$$
$$= \frac{1}{2k}\left\{-\frac{d\chi_п(y_1)}{dy_1}\int\limits_{\psi(\chi_п(y_1))}^{y_1} b(\chi_п(y_1), y_1'; x_1, y_1)\,dy_1' + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\chi_п(y_1)}^{x_1}\frac{1}{\sqrt{x_1 - x_1'}}\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int\limits_{\psi(x_1')}^{y_1}\frac{a(x_1', y_1')}{\sqrt{y_1 - y_1'}}\,dy_1'\right] dx_1'\right\};$$

где S_0 — заштрихованная на рис. 111 площадь, L — дуга $\overset{\frown}{M''M'''}$ передней части контура, L_1 — прямая линия $\overline{M''M'}$ (направление интегрирования по L и L_1 указано стрелками).

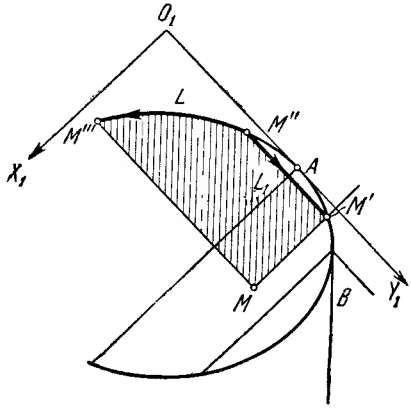

Рис. 111.

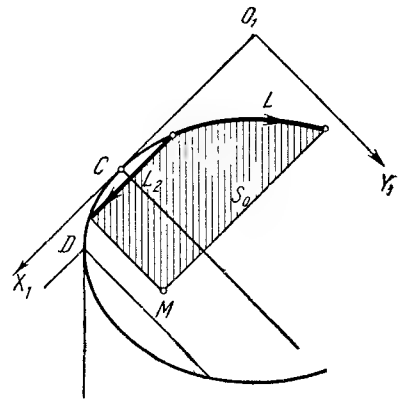

Рис. 112.

Совершенно аналогично для области 3 получим:

$$(p'_{\text{н}} - p'_{\text{в}})_3 = \frac{\rho_1 v_1}{k}\left\{ \int\limits_{S_0}\int d(x'_1, y'_1; x_1, y_1)\,dx'_1\,dy'_1 + \right.$$

$$+ \int\limits_{L} b\left(\chi(y'_1), y'_1; x_1, y_1\right)\left[1 - \frac{d\chi(y'_1)}{dy'_1}\right] dy'_1 +$$

$$\left. + \left[1 - \frac{d\psi_{\text{л}}(x_1)}{dx_1}\right] \int\limits_{L_2} b\left(x'_1, \psi_{\text{л}}(x_1); x_1, y_1\right) dx'_1 \right\}, \qquad (30.51)$$

где площадь S_0, дуга L и прямая L_2 даны на рис. 112.

при этом для вычисления квадратиой скобки удобно записать

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \int\limits_{\psi(x'_1)}^{y_1} \frac{a(x'_1, y'_1)\,dy'_1}{\sqrt{y - y'_1}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1}\left[-2 \int\limits_{\psi(x'_1)}^{y_1} \sqrt{y_1 - y'_1}\, c(x'_1, y'_1) + 2 \int\limits_{\psi(x'_1)}^{y_1} \sqrt{y_1 - y'_1}\, \frac{\partial a}{\partial y'_1}\, dy'_1 \right].$$

В области 4 при вычислении Φ' нам придётся вести интегрирование по двум площадкам (см. рис. 113): S_{01} и S_{02} или же по одной

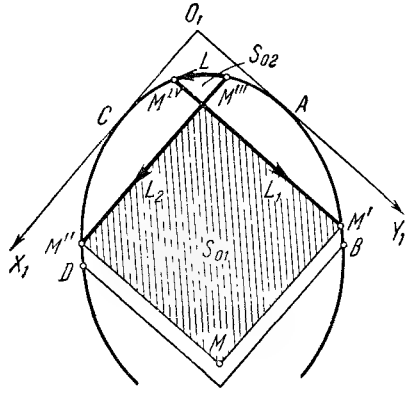

Рис. 113.

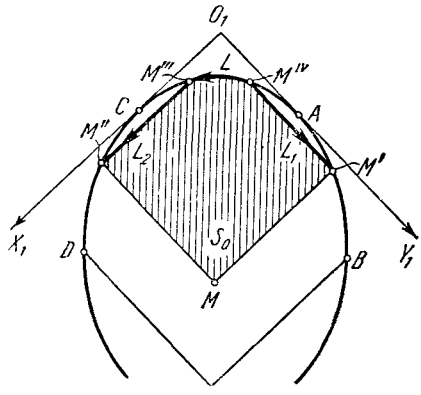

Рис. 114.

площадке S_0 (рис. 114) в зависимости от того, пересекаются ли характеристики $\overline{M'M^{IV}}$ и $\overline{M''M'''}$ на крыле или вне крыла.

В первом случае будет

$$\Phi'_4 = \int\limits_{S_{01}}\int b(x'_1,\ y'_1;\ x_1,\ y_1)\,dx'_1\,dy'_1 - \int\limits_{S_{02}}\int b(x'_1,\ y'_1;\ x_1,\ y_1)\,dx'_1\,dy'_1$$

и тогда, после преобразований, аналогичных тем, что были сделаны выше, мы получим

$$\begin{aligned}(p'_{\text{н}} - p'_{\text{в}})_4 = \frac{\rho_1 v_1}{k}\Bigg\{ &\int\limits_{S_{01}}\int d(x'_1,\ y'_1;\ x_1,\ y_1)\,dx'_1\,dy'_1 - \\ &- \int\limits_{S_{02}}\int d(x'_1,\ y'_1;\ x_1,\ y_1)\,dx'_1\,dy'_1 - \\ &- \int\limits_{L} b(x'_1,\ \psi(x'_1);\ x_1,\ y_1)\left[1 - \frac{d\psi(x'_1)}{dx'_1}\right]dx'_1 + \\ &+ \left[1 - \frac{d\chi_{\text{п}}(y_1)}{dy_1}\right]\int\limits_{L} b(\chi_{\text{п}}(y_1),\ y'_1;\ x_1,\ y_1)\,dy'_1 + \\ &+ \left[1 - \frac{d\psi_{\text{л}}(x_1)}{dx_1}\right]\int\limits_{L_2} b(x'_1,\ \psi_{\text{л}}(x_1);\ x_1,\ y_1)\,dx'_1\Bigg\}, \end{aligned} \qquad (30.52)$$

где L есть дуга $\overset{\frown}{M'''M^{IV}}$, L_1 — прямая $\overline{M^{IV}M'}$, L_2 — прямая $\overline{M'''M''}$; направление интегрирования указано на рисунке.

В случае, изображённом на рис. 114, имеем:

$$(p'_{\text{н}} - p'_{\text{в}})_4 = \frac{\rho_1 v_1}{k}\left\{\int\limits_{S_0}\int d(x'_1,\ y'_1;\ x_1,\ y_1)\,dx'_1\,dy'_1 + \right.$$
$$+\int\limits_{L} b(x'_1,\ \psi(x'_1);\ x_1,\ y_1)\,dx'_1 +$$
$$+\left[1 - \frac{d f_{\text{п}}(y_1)}{dy_1}\right]\int\limits_{L_1} b(\chi_{\text{п}}(y_1),\ y'_1;\ x_1,\ y_1)\,dy'_1 +$$
$$\left.+\left[1 - \frac{d\psi_{\text{л}}(x_1)}{dx_1}\right]\int\limits_{L_2} b(x'_1,\ \psi_{\text{л}}(x_1);\ x_1,\ y_1)\,dx'_1\right\}, \qquad (30.53)$$

где L_1, L_2, L изображены на рис. 114.

Распределение для области 5 (аналогично для 6) вычисляется проще. Для случая 5 интегрирование для Φ' мы должны распространить на область $S_0 + S_1 + S_2$ (S_2 находится вне крыла в области R), или же,

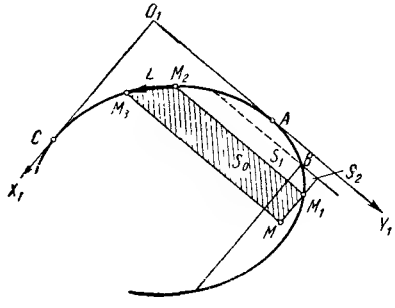

Рис. 115.

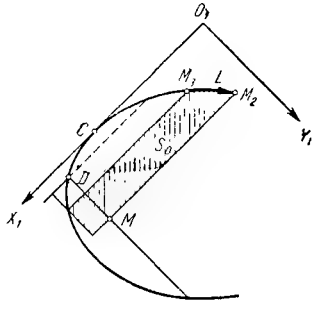

Рис. 116.

по аналогии с (30.28), на область S_0 (рис. 115). Здесь вновь мы получим простую формулу, аналогичную формуле, отвечающей области 1:

$$(p'_{\text{н}} - p'_{\text{в}})_5 = \frac{\rho_1 v_1}{k}\left[\int\limits_{S_0}\int d(x'_1,\ y'_1;\ x_1,\ y_1)\,dx'_1\,dy'_1 + \right.$$
$$\left.+\int\limits_{L}\left[1 - \frac{d\psi(x'_1)}{dx'_1}\right] b(x'_1,\ \psi(x'_1);\ x_1,\ y_1)\,dx'_1\right], \qquad (30.54)$$

где L — дуга $\overset{\frown}{M_2M_3}$ (рис. 115).

Аналогичным образом для области 6 имеем:

$$(p'_{\text{н}} - p'_{\text{в}})_6 = \frac{\rho_1 v_1}{k}\left[\int\limits_{S_0}\int d(x'_1,\ y'_1;\ x_1,\ y_1)\,dx'_1\,dy'_1 + \right.$$
$$\left.+\int\limits_{L}\left[1 - \frac{d\chi(y'_1)}{dy'_1}\right] b(\chi(y'_1),\ y'_1;\ x_1,\ y_1)\,dy'_1\right] \qquad (30.55)$$

(см. рис. 116).

Для областей 7 и 8 получим, комбинируя наши соотношения:

$$(p'_{\text{н}} - p'_{\text{в}})_7 = \frac{\rho_1 v_1}{k}\left\{\int\limits_{S_0}\int d(x'_1, y'_1; x_1, y_1)\,dx'_1\,dy'_1 - \right.$$
$$- \int\limits_{S_1}\int d(x'_1, y'_1; x_1, y_1)\,dx'_1\,dy'_1 -$$
$$- \int\limits_{L} b(x'_1, \psi(x'_1); x_1, y_1)\left[1 - \frac{d\psi(x'_1)}{dx'_1}\right]dx'_1 +$$
$$\left. + \left[1 - \frac{d\psi_л(x_1)}{dx_1}\right]\int\limits_{L_2} b(x'_1, \psi_л(x_1); x_1, y_1)\,dy'_1\right\} \quad (30.56)$$

(см. рис. 117; линия L — это дуга $\overset{\frown}{M_4M_3}$; линия L_2 — прямая $\overline{M_4M_2}$),

$$(p'_{\text{н}} - p'_{\text{в}})_8 = \frac{\rho_1 v_1}{k}\left\{\int\limits_{S_0}\int d(x'_1, y'_1; x_1, y_1)\,dx'_1\,dy'_1 - \right.$$
$$- \int\limits_{S_1}\int d(x'_1, y'_1; x_1, y_1)\,dx'_1\,dy'_1 -$$
$$- \int\limits_{L} b(\chi(y'_1), y'_1; x_1, y_1)\left[1 - \frac{d\chi(y'_1)}{dy'_1}\right]dy'_1 -$$
$$\left. - \left[1 - \frac{d\chi_п(y_1)}{dy_1}\right]\int\limits_{L_1} b(\chi_п(y_1), y'_1; x_1, y_1)\,dy'_1\right\} \quad (30.57)$$

(площадки S_0 и S_1, линии L и L_1 даны на рис. 118).

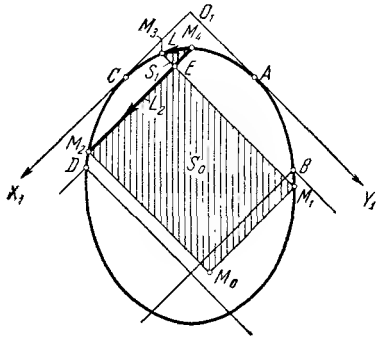

Рис. 117.

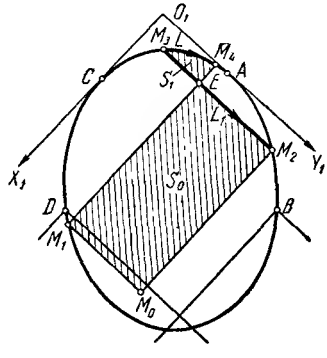

Рис. 118.

Мы не останавливаемся отдельно на случае, когда точка пересечения $\overset{\frown}{M_1M_4}$ и $\overset{\frown}{M_2M_3}$ находится вне крыла.

Наконец, в области 9, где сказывается влияние вихревой пелены, сбегающей с обеих задних кромок, имеем (см. рис. 119)

$$(p'_{\text{н}} - p'_{\text{в}})_9 = \frac{\rho_1 v_1}{k}\left\{\int\limits_{S_1}\int d(x'_1, y'_1; x_1, y_1)\,dx'_1\,dy'_1 - \right.$$
$$- \int\limits_{S_2}\int d(x'_1, y'_1; x_1, y_1)\,dx'_1\,dy'_1 -$$
$$\left. - \int\limits_{L} b(x'_1, \psi(x'_1); x_1, y_1)\left[1 - \frac{d\psi(x'_1)}{dx'_1}\right]dx'_1\right\}. \quad (30.58)$$

В заключение заметим, что для вычисления подъёмной силы или момента, действующего на крыло, не обязательно вычислять предварительно $p'_{\text{н}} - p'_{\text{в}}$; так как $p'_{\text{н}} - p'_{\text{в}} = 2\rho_1 v_1 \frac{\partial \Phi'}{\partial x}$, то для вычисления, например, подъёмной силы P имеем

$$P = 2\rho_1 v_1 \int\int \frac{\partial \Phi'}{\partial x'}\,dx'\,dy'$$

или, выполняя интегрирование по x':

$$P = 2\rho_1 v_1 \int\limits_{y_D}^{y_B} \Phi'(X(y'), y')\,dy', \quad (30.59)$$

где $x = X(y)$ — уравнение задней кромки крыла (в старых координатах), решённое относительно x, y_B и y_D — ординаты точек B и D соответственно, а интегрирование распространяется на линию задней кромки.

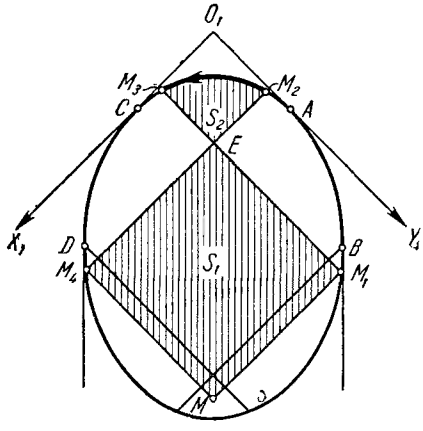

Рис. 119.

Переходя к примерам применения формул этого параграфа, отметим ряд упрощений, которые будут иметь место в отдельных случаях.

1. Если концевые кромки $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{CD}$ суть прямые, параллельные набегающему потоку, то в формулах (30.52), (30.53) $d\psi_{\text{л}}/dx_1$ и $d\chi_{\text{п}}/dy_1$ будут тождественно равны единице и последние два члена в правых частях пропадут.

2. Если поверхность крыла плоская, т. е. $a = -\frac{v_1}{\pi}\bar{\beta} = \text{const}$. ($\bar{\beta}$ — угол атаки крыла), то

$$d(x'_1, y'_1; x_1, y_1) \equiv 0 \quad (30.60)$$

и тогда поверхностные интегралы всюду пропадают, остаются только контурные интегралы и интегралы, распространённые на прямолинейные отрезки L_1, L_2.

Равенство (30.60) будет также иметь место, когда поверхность крыла есть линейчатая поверхность, с образующими, лежащими в плоскостях, параллельных плоскости XZ (в старых координатах).

3. Если выполняется (30.60) и, кроме того, концевые кромки являются прямыми, параллельными основному потоку, разность давлений представляется в любой области в виде:

$$p'_{\text{н}} - p'_{\text{в}} = \pm \frac{\rho_1 v_1}{k} \int_L \left[1 - \frac{d\psi(x'_1)}{dx'_1}\right] b\left(x'_1,\ \psi(x'_1);\ x_1,\ y_1\right) dx'_1$$

(знак плюс надо брать, если прямые $\overline{M'M^{\text{IV}}}$ и $\overline{M''M'''}$ пересекаются на крыле, и знак минус в противоположном случае).

4. Если форма крыла такова, что точка A совпадает с B, а точка C совпадает с D, то будут отсутствовать области *2*, *3*, *4*, *7*, *8*.

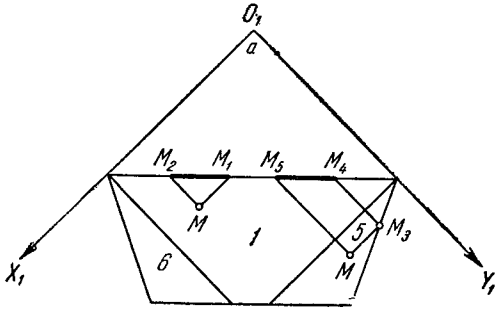

Рис. 120.

Это, в частности, будет иметь место для случая трапецевидного крыла, рассмотренного нами в предыдущем параграфе.

В качестве примера рассмотрим вновь случай трапецевидного крыла, наклонённого под углом β к плоскости X, Y, размаха b и ширины t (рис. 120). В этом случае концевые кромки вырождаются в точки, а задняя кромка состоит из трёх частей: прямой, параллельной передней кромке (находящейся на расстоянии t), и двух прямых, расположенных под углами $\pm\,\theta_0$ к направлению основного потока. Считаем, что $\theta_0 < \alpha_1$.

Уравнение передней кромки имеет вид:

$$x_1 + y_1 = kb$$

(в характеристических координатах); это значит, что

$$\psi(x_1) = kb - x_1. \tag{30.61}$$

Уравнение задней кромки даётся в трёх видах:

$$\left.\begin{aligned} &y = \frac{1}{2}b - \operatorname{tg}\theta_0 x \quad \text{или} \quad y_1 = \frac{1 - k\operatorname{tg}\theta_0}{1 + k\operatorname{tg}\theta_0} x_1 + bk \equiv \psi'(x_1), \\ &y = t \quad \text{или} \quad y_1 = x_1 + 2kt \equiv \psi'(x_1), \\ &y = -\frac{1}{2}b + \operatorname{tg}\theta_0 x \quad \text{или} \quad y_1 = \frac{1 + k\operatorname{tg}\theta_0}{1 - k\operatorname{tg}\theta_0} x_1 - bk \equiv \psi'(x_1). \end{aligned}\right\} \tag{30.62}$$

Существуют лишь области типа *1*, *5* и *6* (рис. 120). Всюду $a = -\frac{v_1}{\pi}\bar{\beta}$. Так как по (30.61) имеем $\frac{d\psi(x_1')}{dx_1'} \equiv -1$, то по (30.48) имеем

$$(p_н' - p_в')_1 = -\frac{2\rho_1 v_1^2}{k\pi}\bar{\beta}\int_{x_{M_1}}^{x_{M_2}} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_1')(y_1 + x_1' - kb)}}\,dx_1',$$

где x_{M_1}, x_{M_2} — абсциссы (в характеристических координатах) точек M_1 и M_2 соответственно (рис. 120). Ясно, что $x_{M_1} = kb - y_1$, $x_{M_2} = x_1$.

Так как

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_1')(x_1' + y_1 - kb)}}\,dx_1' = \left|\arcsin\frac{2x_1' + y_1 - x_1 - kb}{x_1 + y_1 - kb}\right|_\alpha^\beta, \quad (30.63)$$

мы получим

$$(p_н' - p_в')_1 = -\frac{2\rho_1 v_1^2\bar{\beta}}{k},$$

что совпадает с равенствами (29.12), (29.3).

Для области *5* получим по (30.54) (см. рис. 120)

$$(p_н' - p_в')_5 = -\frac{2\rho_1 v_1^2\bar{\beta}}{k}\int_{x_{M_4}}^{x_{M_5}} \frac{dx_1'}{\sqrt{(x_1 - x_1')(y_1 + x_1' - kb)}},$$

причём $x_{M_4} = \frac{1 + k\operatorname{tg}\theta_0}{1 - k\operatorname{tg}\theta_0}(y_1 - kb)$, $x_{M_5} = x_1$ (абсцисса точки M_4 будет та же, что и абсцисса точки M_3; последняя находится на прямой (30.62) и имеет, так же как и M, ординату y_1). По (30.63) мы получим теперь

$$(p_н' - p_в')_5 =$$
$$= -\frac{2\rho_1 v_1^2\bar{\beta}}{k\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2(1 + k\operatorname{tg}\theta_0)(y_1 - kb) + (1 - k\operatorname{tg}\theta_0)(y_1 - x_1 - kb)}{(1 - k\operatorname{tg}\theta_0)(x_1 + y_1 - kb)}\right\}$$

или, если вернуться к обычным координатам x, y (по формулам $x_1 = x + \frac{kb}{2} - ky$, $y_1 = x + \frac{kb}{2} + ky$), ввести θ', как и в § 29, то из равенства $\frac{b}{2} - x = y\operatorname{tg}\theta'$ найдём

$$(p_н' - p_в')_5 = -\frac{2\rho_1 v_1^2\bar{\beta}}{k\pi}\arccos\frac{1 + k\operatorname{tg}\theta_0 - 2k\operatorname{tg}\theta'}{1 - k\operatorname{tg}\theta'},$$

что находится в полном согласии с (29.23).

§ 31. Сверхзвуковые конические течения. Некоторые точные (нелинейные) решения. Обтекание прямого круглого конуса так же, как и обтекание края плоского прямоугольного крыла, являются частными случаями более общей задачи обтекания произвольного конического тела. Представим себе, что тело конической формы с вершиной в начале координат и с произвольной направляющей обтекается сверхзвуковым потоком сжимаемой жидкости. Пусть ещё наше тело расположено по отношению к потоку таким образом и имеет такую форму, что скорость обтекания получится в виде:

$$v_x = v'_x, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v_1 + v'_z,$$

где v'_x, v'_y, v'_z малы по сравнению с v_1, и их квадратами можно пренебречь, аналогично тому, как это было сделано в предыдущих параграфах. Задача о таких движениях была исследована Буземаном [1]).

Как и прежде, мы можем написать для потенциала скорости:

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y^2} - (\mathsf{M}_1^2 - 1)\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z^2} = 0$$

(где $\mathsf{M}_1 = v_1/a_1$) и совершенно такие же уравнения для v'_x, v'_y, v'_z; в частности,

$$\frac{\partial^2 v'_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'_z}{\partial y^2} - (\mathsf{M}_1^2 - 1)\frac{\partial^2 v'_z}{\partial z^2} = 0. \tag{31.1}$$

Простота решения задачи в случае, когда обтекаемое тело имеет коническую форму, заключается в том, что здесь все решения будут зависеть от

$$\xi = \frac{x}{z}, \quad \eta = \frac{y}{z}, \tag{31.2}$$

а не от x, y, z. Компоненты скорости возмущения v'_x, v'_y, v'_z—вдоль каждого луча, выходящего из O, будут постоянными, меняясь от луча к лучу.

Вводя в качестве переменных ξ, η и $\bar{z} = z$ и считая, что v'_z не зависит от $\bar{z}$, придём, после совершенно элементарных преобразований, к уравнению

$$(1 - k^2\xi^2)\frac{\partial^2 v'_z}{\partial \xi^2} - 2k^2\xi\eta\frac{\partial^2 v'_z}{\partial \xi\, \partial \eta} + (1 - k^2\eta^2)\frac{\partial^2 v'_z}{\partial \eta^2} = 2k^2\left(\xi\frac{\partial v'_z}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial v'_z}{\partial \eta}\right), \tag{31.3}$$

где, как и прежде,

$$k = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{M}_1^2 - 1}} = \operatorname{ctg}\alpha_1. \tag{31.4}$$

---

[1]) Busemann A., Infinitesimale kegelige Ueberschallströmung. Schriften der Deut. Akad. d. Luftfahrtforschung, 1943.

Плоскости (ξ, η) можно дать простой геометрический смысл: это — плоскость, параллельная плоскости (x, y) и находящаяся на расстоянии $z = 1$ от последней [$z = 1$ в (31.2)].

Нетрудно убедиться в том, что уравнение (31.3) будет смешанного типа: в одной части плоскости (ξ, η) эллиптического, в другой — гиперболического. В самом деле, вдоль характеристик, если искать уравнения последних в форме $\eta = \eta(\xi)$, будет:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-\xi\eta \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{k^2}}}{\frac{1}{k^2} - \xi^2} = \frac{-k^2\xi\eta \pm \sqrt{k^2(\xi^2+\eta^2) - 1}}{1 - k^2\xi^2}. \quad (31.5)$$

Значит, внутри круга радиуса $1/k$ наше уравнение (31.3) будет эллиптического типа; напротив, при $\xi^2 + \eta^2 > 1/k^2$ — вне круга радиуса $1/k$ — будут существовать действительные характеристики. Последние представляются в виде всевозможных прямых линий, касательных к кругу радиуса $1/k$ [1]). На рис. 121 даны некоторые из этих характеристик (одно семейство сплошными линиями, другое — пунктиром). Окружность радиуса $1/k$ в плоскости (ξ, η) является, вследствие (31.4), местом пересечения с плоскостью $z = 1$ конуса характеристик в пространстве (x, y, z). Обтекаемое тело пересечёт плоскость (ξ, η) по некоторой кривой, которая может лежать или целиком внутри круга радиуса $1/k$ или целиком вне этого круга, или, наконец, частично внутри, частично вне круга. Написав краевые условия, мы должны приступить к решению (31.3).

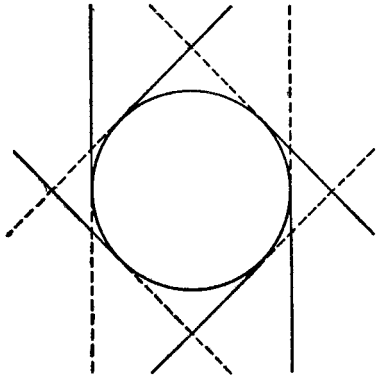

Рис. 121.

Путём геометрических преобразований переменных, заимствованных из одной работы Чаплыгина, Буземан приводит (31.3) к двумерному уравнению Лапласа [2]). Это сведение к уравнению Лапласа можно

[1]) Проще всего убедиться в этом, если перейти в (ξ, η) к полярным координатам r, φ. Уравнение (31.5) после интеграции примет тогда вид:

$$r\cos(\varphi - \varphi_0) = 1/k,$$

где φ_0 — постоянная интегрирования.

[2]) Значительно раньше, чем это было сделано Буземаном, решение рассматриваемого здесь типа было получено, в связи с другой физической задачей, в работе С. Л. Соболева и В. И. Смирнова. См., например, дополнения С. Л. Соболева в книге Франк Р. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II, ОНТИ, 1937.

проделать и другим путём. Мы остановимся на выводе, данном в работе Гуревича[1]). Чтобы это сделать, удобно вернуться к уравнению в форме (31.1) и перейти сперва формально к переменным $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$:

$$\bar{x} = i\frac{x}{k}, \quad \bar{y} = i\frac{y}{k}, \quad \bar{z} = z.$$

Мы получим в переменных $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ трёхмерное уравнение Лапласа, и, если ввести «сферические координаты» r, σ, ϑ из равенств

$$\bar{x} = r\cos\sigma\sin\vartheta, \quad \bar{y} = r\sin\sigma\sin\vartheta, \quad \bar{z} = r\cos\vartheta,$$

то можно написать:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\vartheta\frac{\partial v_z'}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial v_z'}{\partial\sigma}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial v_z'}{\partial\vartheta}\right) = 0.$$

Вспомним теперь, что v_z' зависит лишь от ξ и η; это значит, что в переменных r, σ, ϑ, v_z' не зависит от r: $v_z' = v_z'(\sigma, \vartheta)$. Тогда будет

$$\frac{\partial^2 v_z'}{\partial\sigma^2} + \sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial v_z'}{\partial\vartheta}\right) = 0.$$

Мы легко избавимся от мнимости преобразования, положив $\vartheta = i\theta$. Итак, если

$$\xi = \frac{\cos\sigma\,\mathrm{th}\,\theta}{k}, \quad \eta = \frac{\sin\sigma\,\mathrm{th}\,\theta}{k}, \tag{31.6}$$

то (31.3) примет вид:

$$\frac{\partial^2 v_z'}{\partial\sigma^2} + \mathrm{sh}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sh}\,\theta\frac{\partial v_z'}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{31.7}$$

Остаётся сделать последнюю замену переменных, вводя вместо θ величину ε так, чтобы было

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{d\theta}{\mathrm{sh}\,\theta},$$

т. е.

$$\varepsilon = \mathrm{th}\frac{\theta}{2} \tag{31.8}$$

и мы окончательно получим для v_z' уравнение Лапласа в плоскости полярных координат ε (радиус-вектор) и σ (полярный угол):

$$\frac{\partial^2 v_z'}{\partial\sigma^2} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\varepsilon\frac{\partial v_z'}{\partial\varepsilon}\right) = 0. \tag{31.9}$$

---

[1]) Гуревич М. И., Подъёмная сила стреловидного крыла в сверхзвуковом потоке, ПММ., том 10, вып. 4, 1946.

Таким образом, можно рассматривать v_z' как действительную часть некоторой функции комплексного переменного

$$\tau = \varepsilon e^{i\sigma}. \tag{31.10}$$

Обозначим мнимую часть этой функции буквой s и напишем

$$v_z' + is = \frac{1}{k} f(\tau). \tag{31.11}$$

Легко видеть, что внутренность круга радиуса $1/k$ плоскости (ξ, η) переходит на плоскости (τ) во внутренность круга радиуса 1 $(\varepsilon = 1)$. В самом деле,

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\operatorname{th}\theta}{k} = \frac{2}{k} \frac{\operatorname{th}\frac{\theta}{2}}{1 + \operatorname{th}^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2}{k} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}, \tag{31.12}$$

так что при ε, меняющемся от 0 до 1, R будет меняться от 0 до $1/k$. Так как $\eta/\xi = \operatorname{tg}\sigma$, — полярные углы при нашем преобразовании не меняются.

Прежде чем переходить к выяснению краевых условий в плоскости (τ), посмотрим, как выражаются скорости v_x', v_y' в функциях новых переменных ε и σ. Найдём полный дифференциал от

$$\omega = v_x' + iv_y'$$

при движении по радиусу-вектору (т. е. при $\sigma = \text{const.}$). Имеем

$$\frac{\partial\omega}{\partial R} = \frac{\partial\omega}{\partial\xi}\cos\sigma + \frac{\partial\omega}{\partial\eta}\sin\sigma = \frac{1}{R}\left(\xi\frac{\partial\omega}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right).$$

С другой стороны, мы можем вспомнить, что в переменных ξ, η, $\bar{z}$:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial\omega}{\partial z} = -\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\omega}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z} = -\frac{1}{z}\left(\xi\frac{\partial\omega}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\omega}{\partial R} = -\frac{z}{R}\frac{\partial\omega}{\partial z} = -\frac{z}{R}\left(\frac{\partial v_x'}{\partial z} + i\frac{\partial v_y'}{\partial z}\right).$$

Вследствие отсутствия вихрей мы имеем:

$$\frac{\partial v_x'}{\partial z} = \frac{\partial v_z'}{\partial x} = \frac{1}{z}\frac{\partial v_z'}{\partial\xi}; \quad \frac{\partial v_y'}{\partial z} = \frac{\partial v_z'}{\partial y} = \frac{1}{z}\frac{\partial v_z'}{\partial\eta},$$

так что

$$\frac{\partial\omega}{\partial R} = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + i\frac{\partial}{\partial\eta}\right)v_z'. \tag{31.13}$$

Далее, нетрудно выразить правую часть этого равенства через функции f и $\bar{f}$ (сопряжённая с f). Если ввести ζ:

$$\zeta = \xi + i\eta = Re^{i\sigma}; \quad \bar{\zeta} = Re^{-i\sigma}, \tag{31.14}$$

то, очевидно, можно написать:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} + i\frac{\partial}{\partial \eta} = 2\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}. \tag{31.15}$$

Наконец, можно связать дифференцирование по $\bar{\zeta}$ с дифференцированием по τ и $\bar{\tau}$. В самом деле, по (31.10), (31.14) и (31.12) имеем:

$$\frac{\zeta}{\tau} = \frac{R}{\varepsilon} = \frac{2}{k}\frac{1}{1+\varepsilon^2} = \frac{2}{k}\frac{1}{1+\tau\bar{\tau}}, \tag{31.16}$$

так что

$$\zeta = \frac{2}{k}\frac{\tau}{1+\tau\bar{\tau}}, \quad \bar{\zeta} = \frac{2}{k}\frac{\bar{\tau}}{1+\tau\bar{\tau}}$$

и

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = k\frac{(1+\tau\bar{\tau})^2}{1-\tau^2\bar{\tau}^2}\left(\tau^2\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}}\right) = k\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\left(\tau\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}}\right).$$

Принимая во внимание, что

$$v_z' = \frac{1}{2k}[f(\tau) + \bar{f}(\bar{\tau})],$$

можно написать теперь

$$\frac{\partial \omega}{\partial R} = -\frac{k}{4}\frac{(1+\varepsilon^2)^2}{1-\varepsilon^2}\frac{1}{\varepsilon}\left[\varepsilon^2 e^{2i\sigma}\frac{df}{d\tau} + \frac{d\bar{f}}{d\bar{\tau}}\right]. \tag{31.17}$$

Если теперь двигаться по радиусу-вектору $\sigma = \text{const}$, то будет:

$$dR = \frac{2}{k}\frac{1-\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2}d\varepsilon; \quad d\tau = e^{i\sigma}d\varepsilon, \quad d\bar{\tau} = e^{-i\sigma}d\varepsilon,$$

так что окончательно изменение ω при передвижении по радиусу-вектору будет:

$$d\omega = -\frac{1}{2}\left[\varepsilon e^{i\sigma}df + \frac{1}{\varepsilon e^{-i\sigma}}d\bar{f}\right] = -\frac{1}{2}\left(\tau df + \frac{1}{\tau}d\bar{f}\right),$$

и мы получим для ω следующую формулу:

$$\omega = v_x' + iv_y' = -\frac{1}{2}\int\left(\tau df + \frac{1}{\tau}d\bar{f}\right). \tag{31.18}$$

Произвольная постоянная интегрирования должна содержать σ, но, как показывает более подробный расчёт, может быть приравнена нулю.

При помощи функций ω и f мы можем записать краевые условия. В общем случае конуса произвольного сечения условия эти будут

иметь сложный вид. Просто они будут выглядеть в случае, когда обтекаемая поверхность состоит из отрезков плоскостей (или из продолжений плоскостей), пересекающих плоскость (ζ) по прямым (или по продолжениям прямых), проходящим бесконечно близко от начала координат. Не останавливаясь более на общих рассуждениях, перейдём к рассмотрению примеров.

В качестве первого примера рассмотрим обтекание прямого круглого бесконечно тонкого конуса с углом раствора $2\beta_0$, ось которого расположена вдоль оси z. Случай этот уже был изучен нами точно в § 27 и § 28 приближённо. На рис. 122 схематически дано расположение обтекаемого конуса, а также конуса характеристик (пунктир) и плоскости $z=1$. Обтекаемый конус пересекает плоскость (ζ) внутри круга радиуса $1/k$ по кругу бесконечно малого радиуса $\operatorname{tg}\beta_0 \approx \beta_0$. На круге радиуса 1 в плоскости (τ) v_z' должно быть равно нулю.

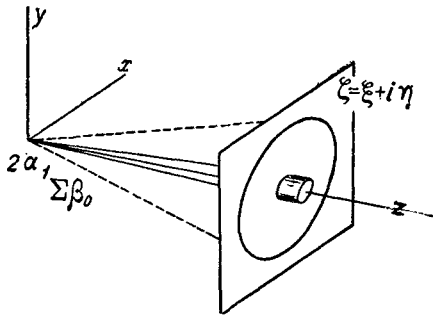

Рис. 122.

В начале координат должна быть особенность. Нетрудно проверить, что решение для f имеет вид:

$$f = c \ln \tau, \tag{31.19}$$

где c надо подобрать так, чтобы были выполнены краевые условия. Именно, так как нормали к нашему конусу с точностью до малых величин будут совпадать с радиусами-векторами нашего бесконечно малого круга в плоскости (ζ), то:

$$v_x' \cos\sigma + v_y' \sin\sigma + v_1\beta_0 = 0.$$

Это условие можно записать ещё так:

$$Re\,(\omega e^{-i\sigma}) + v_1\beta_0 = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad \text{причём} \quad \frac{2}{k}\frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0^2} = \beta_0.$$

С другой стороны, по (31.18) и (31.19) имеем:

$$\omega = -\frac{1}{2}c\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right) = -\frac{1}{2}c\left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)e^{i\sigma}.$$

Итак,

$$-\frac{c}{2}\left(\varepsilon_0 - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) + v_1\beta = 0,$$

Так как радиус ε_0 нашего круга в плоскости (τ) будет

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{k\beta_0} - \sqrt{\frac{1}{k^2\beta_0^2} - 1},$$

мы получим для c:

$$c = -\frac{v_1\beta_0^2 k}{\sqrt{1-k^2\beta_0^2}},$$

так что будет:

$$v_z' = \operatorname{Re}\frac{1}{k} f(\tau) = -\frac{v_1\beta_0^2}{\sqrt{1-k^2\beta_0^2}} \ln\varepsilon;$$

вспомнив, как выражается ε через величину $R = \sqrt{\xi^2+\eta^2} = \sqrt{x^2+y^2}/z$ [формула (31.12)], мы придём в точности к результатам, полученным в § 28 [1]).

В качестве второго примера рассмотрим обтекание края прямоугольной пластинки, наклонённой под бесконечно малым углом атаки $\bar{\beta}$ (передняя кромка совпадает с отрицательной осью x). Пересечение крыла с плоскостью (ξ, η) даст отрицательную ось x (см. рис. 123). Край крыла действует лишь внутри конуса характеристик. За пределами этого конуса, т. е. в плоскости (ξ, η) за пределами круга радиуса $1/k$, крыло будет действовать либо как бесконечная полоса [в левой части плоскости (ξ, η) вне круга радиуса $1/k$], либо не будет совсем вызывать скоростей [правая часть плоскости (ξ, η) вне круга радиуса $1/k$]. Таким образом, на круге радиуса $1/k$ мы будем иметь $v_z' = +v_1\bar{\beta}/k$ (формула Аккерета) для левого верхнего квадранта, $v_z' = -v_1\bar{\beta}/k$ — для левого нижнего квадранта и $v_z' = 0$ на всей правой полуокружности. Эти же условия надо написать на круге $\varepsilon = 1$ в плоскости (τ). Посмотрим теперь, какое краевое условие получится внутри круга $\varepsilon = 1$ из-за наличия там крыла. В том случае, когда крыло рассекает плоскость (ξ, η) по любому радиусу-вектору (или по продолжению радиуса-вектора), мы должны в качестве краевого условия ($V_n = 0$) записать:

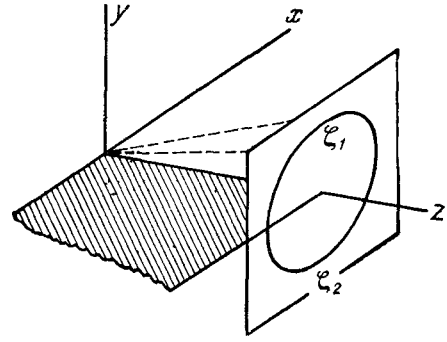

Рис. 123.

$$-v_x' \sin\sigma + v_y' \cos\sigma - v_1\bar{\beta} = 0.$$

[1]) Мы должны лишь изменить название осей.

Это означает, что здесь будет

$$\operatorname{Im}(\omega e^{-i\sigma}) = 0,$$

т. е., как легко видеть из (31.18) и (31.11), на нашем радиусе-векторе $ds = 0$.

Итак, мы должны найти аналитическую функцию $f(\tau)$, удовлетворяющую следующим условиям: 1) на дуге $\overset{\smile}{AB}$ (рис. 124) круга радиуса, равного единице, $\operatorname{Re} f = -\bar{v}_1\beta$; 2) на дуге $\overset{\smile}{AC}$ круга $\operatorname{Re} f = +v_1\bar{\beta}$; 3) на полуокружности $\overset{\smile}{BDC}$ $\operatorname{Re} f = 0$; 4) на отрезке $\overline{OA}$ действительной оси $\operatorname{Im} f = \text{const.} = 0$.

Таким образом мы имеем разрез вдоль действительной оси и особенности в точках B и C. Преобразуя плоскость τ в плоскость $\nu = \sqrt{\tau}$, мы получим 4 особенности — в точках:

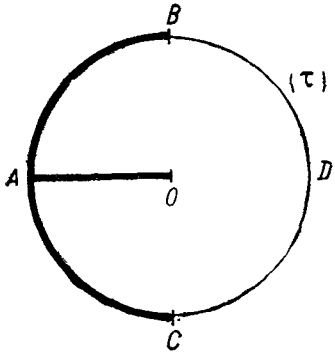

Рис. 124.

$$\nu_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad \nu_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

$$\nu_3 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \qquad \nu_4 = e^{-\frac{3\pi i}{4}},$$

и по этим особенностям легко построим решение для f. Оно будет иметь вид:

$$f = -\frac{iv_1\bar{\beta}}{\pi} \ln \frac{(\sqrt{\tau}-\nu_1)(\sqrt{\tau}-\nu_2)}{(\sqrt{\tau}-\nu_3)(\sqrt{\tau}-\nu_4)} =$$

$$= -i\frac{v_1\bar{\beta}}{\pi} \ln \frac{1+\tau-\sqrt{2\tau}}{1+\tau+\sqrt{2\tau}}. \qquad (31.20)$$

Легко проверить, что (31.20) действительно удовлетворяет всем нашим краевым условиям.

Подсчитаем ещё значение v_z' на крыле (сверху и снизу), чтобы затем, применив уравнение Бернулли, найти подъёмную силу. По (31.20)

$$f = -i\frac{v_1\bar{\beta}}{\pi} \ln \left| \frac{1+\tau-\sqrt{2\tau}}{1+\tau+\sqrt{2\tau}} \right| + \frac{v_1\bar{\beta}}{\pi} \arg \frac{1+\tau-\sqrt{2\tau}}{1+\tau+\sqrt{2\tau}},$$

так что

$$v_z' = \frac{1}{k}\operatorname{Re} f = \frac{v_1\bar{\beta}}{k\pi} \arg \frac{1+\tau-\sqrt{2\tau}}{1+\tau+\sqrt{2\tau}} = \frac{v_1\bar{\beta}}{k\pi} \arg \frac{1+\varepsilon e^{i\sigma}-\sqrt{2\varepsilon}\, e^{\frac{i\sigma}{2}}}{1+\varepsilon e^{i\sigma}+\sqrt{2\varepsilon}\, e^{\frac{i\sigma}{2}}}.$$

На верхней части крыла ($\sigma = \pi$) имеем:

$$v_{z_в}' = \frac{v_1\bar{\beta}}{k\pi} \arg \frac{1-\varepsilon-\sqrt{2\varepsilon}\, i}{1-\varepsilon+\sqrt{2\varepsilon}\, i}.$$

Для нижней части крыла ($\sigma = -\pi$) имеем:

$$v'_{z_н} = \frac{v_1\overline{\beta}}{k\pi} \arg \frac{1-\varepsilon+\sqrt{2\varepsilon}\,i}{1-\varepsilon-\sqrt{2\varepsilon}\,i} = -v'_{z_в}.$$

Наконец,

$$p'_н - p'_в = \rho_1 v_1 (v'_{z_в} - v'_{z_н}) = 2\frac{\rho_1 v_1^2\overline{\beta}}{k\pi} \arg\left(\frac{1-\varepsilon-\sqrt{2\varepsilon}\,i}{1-\varepsilon+\sqrt{2\varepsilon}\,i}\right).$$

Таким образом,

$$p'_н - p'_в = -\frac{2\rho_1 v_1^2\overline{\beta}}{k\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{2(1-\varepsilon)\sqrt{2\varepsilon}}{1-4\varepsilon+\varepsilon^2} = -\frac{2\rho_1 v_1^2\overline{\beta}}{k\pi} \arccos\frac{1-4\varepsilon+\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}.$$

Остаётся перейти от ε к R по формуле (27.12), и мы получим окончательно

$$p'_н - p'_в = -\frac{2\rho_1 v_1^2\overline{\beta}}{k\pi} \arccos(1-2kR)\ ^{1}). \qquad (31.21)$$

В качестве третьего примера на применение этого метода рассмотрим сверхзвуковое движение стреловидного крыла, симметрично расположенного по отношению к оси z. Задача о таком движении была решена М. И. Гуревичем в цитированной выше работе. Обозначим через δ угол стреловидности (рис. 125) и через $\overline{\beta}$ угол атаки. Рассмотрим сперва тот случай, когда угол стреловидности будет больше чем α_1, так что наше крыло выходит из конуса характеристик. Крыло пересекает плоскость (ξ, η) по отрезку $(\overline{AB})$ оси ξ (рис. 126). Выступающие части будут действовать лишь внутри соответствующих треугольников характеристик, вне круга радиуса $1/k$. В каждой из областей ACG, AGE, DBH, BHF (см. рис. 126) скорости v'_z и давления p' будут сохранять постоянные значения, причём при переходе через крыло будут менять знак. Таким образом, на дуге $\overset{\smile}{CG}$ и на дуге $\overset{\smile}{HD}$ мы имеем $v'_z = w_0$. На дуге $\overset{\smile}{GE}$ и на дуге $\overset{\smile}{HF}$ имеем $v'_z = -w_0$; на дугах $\overset{\smile}{CD}$ и $\overset{\smile}{EF}$ $v'_z = 0$; при этом w_0 мы должны определить через заданные величины: $\overline{\beta}$, δ и v_1. Обозначим угол

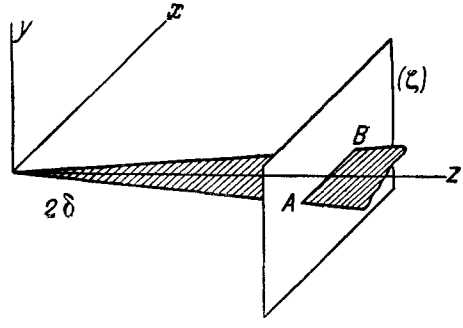

Рис. 125.

[1]) Эта формула отвечает частному случаю формулы (29.23) при $\theta_0 = 0$.

дуги $\overset{\smile}{DH}$ через σ_0. Так как при переходе от плоскости (ζ) к плоскости (τ) углы сохраняются, нам надо решить следующую задачу. Определить аналитическую функцию $f(\tau)$ так, чтобы

$$\text{на круге } \varepsilon = 1 \begin{cases} \operatorname{Re} f = kw_0, & \text{если } 0 < \sigma < \sigma_0 \text{ и } \pi - \sigma_0 < \sigma < \pi, \\ \operatorname{Re} f = -kw_0, & \text{если } 0 > \sigma > \sigma_0 \text{ и } -\pi + \sigma_0 > \sigma > -\pi. \end{cases}$$

Далее, на круге $\varepsilon = 1$:

$$\operatorname{Re} f = 0, \quad \text{если} \quad \pi - \sigma_0 > \sigma > \sigma_0 \quad \text{и} \quad -\pi + \sigma_0 < \sigma < -\sigma_0.$$

Наконец, на отрезке действительной оси от $\varepsilon = -1$ до $\varepsilon = +1$:

$$\operatorname{Im} f = 0.$$

Функцию f можно построить по особенностям. Это будет:

$$f = \frac{iw_0 k}{\pi} \ln \left(\frac{\tau^2 - e^{-2i\sigma_0}}{\tau^2 e^{-2i\sigma_0} - 1} \right). \tag{31.22}$$

По рис. 125 и 126 заключаем, что $\overline{OB} = \overline{OA} = \operatorname{tg} \delta$ и что, таким образом, угол σ_0 будет определён равенством

$$\cos \sigma_0 = \frac{1}{k \operatorname{tg} \delta}. \tag{31.23}$$

Величину w_0 найдём из краевого условия на крыле (мы использовали

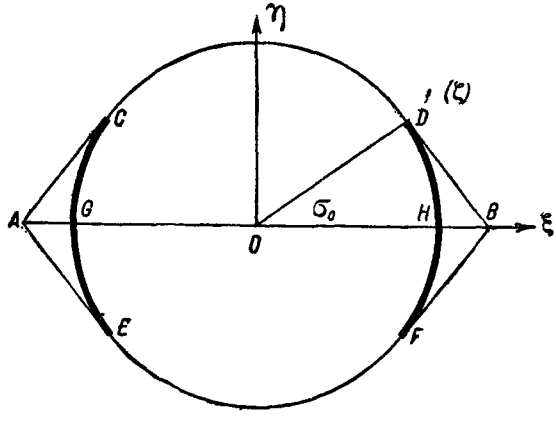

Рис. 126.

это условие лишь частично, записав, что $\operatorname{Im} f = 0$). Именно, на крыле мы имеем:

$$v_y' = + v_1 \overline{\beta}, \tag{31.24}$$

а из (31.18), интегрируя по мнимой оси от i до 0 и замечая, что на мнимой оси $\bar{\tau} = -\tau$, $\overline{df/d\tau} = -df/d\tau$, получим:

$$v'_y = -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_i^0 \frac{df}{d\tau}\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right)d\tau =$$

$$= -\frac{w_0 k}{2\pi}\operatorname{Im} i\int_i^0 \left(\frac{1}{\tau + e^{-i\sigma_0}} + \frac{1}{\tau - e^{-i\sigma_0}} - \frac{1}{\tau + e^{i\sigma_0}} - \frac{1}{\tau - e^{i\sigma_0}}\right)\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right)d\tau =$$

$$= -\frac{w_0 k}{2\pi}\operatorname{Im} i\int_i^0 2i\sin\sigma_0\left(\frac{1}{\tau + e^{-i\sigma_0}} - \frac{1}{\tau - e^{-i\sigma_0}} + 1 + \frac{1}{\tau + e^{i\sigma_0}} - \frac{1}{\tau - e^{i\sigma_0}}\right)d\tau =$$

$$= \frac{w_0 k}{\pi}\sin\sigma_0 \operatorname{Im}\Big|_i^0 \ln\frac{(\tau + e^{-i\sigma_0})(\tau + e^{i\sigma_0})}{(\tau - e^{-i\sigma_0})(\tau - e^{i\sigma_0})} = -w_0 k\sin\sigma_0. \quad (31.25)$$

Таким образом, по (31.24)

$$w_0 = -\frac{\bar{\beta} v_1}{k\sin\sigma_0}.$$

Найдём ещё коэффициент подъёмной силы C_y.

Так как для крыла будет

$$p'_н - p'_в = 2\rho_1 v_1 v'_z,$$

то подъёмная сила Y, действующая на крыло высоты L и основания $2L\operatorname{tg}\delta$, будет:

$$Y = 2\rho_1 v_1 \int_0^L \int_{-z\operatorname{tg}\delta}^{z\operatorname{tg}\delta} v'_z\, dx\, dz = \rho_1 v_1 L^2 \int_{-\operatorname{tg}\delta}^{\operatorname{tg}\delta} v'_z\, d\xi.$$

Если S — площадь крыла ($S = L^2\operatorname{tg}\delta$), то

$$C_y = \frac{2Y}{\rho_1 v_1^2 S} = \frac{2\int_{-\operatorname{tg}\delta}^{\operatorname{tg}\delta} v'_z\, d\xi}{v_1\operatorname{tg}\delta}. \quad (31.26)$$

Так как вдоль частей крыла, выступающих из конуса характеристик, будет $v_z = \text{const.} = \pm w_0$, то получим:

$$C_y = 2\,\frac{2w_0\left(\operatorname{tg}\delta - \frac{1}{k}\right) + \int_{-1}^{+1} v'_z d\left(\frac{2}{k}\frac{\tau}{1+\tau^2}\right)}{v_1\operatorname{tg}\delta}.$$

Интеграл, стоящий справа в числителе, можно взять по частям, записав ($S=0$ на действительной оси):

$$\int_{-1}^{+1} v_z' d\left(\frac{2}{k}\frac{\tau}{1+\tau^2}\right) = \frac{2}{k}\left|_{-1}^{+1}\frac{\tau}{1+\tau^2}v_z' - \frac{2}{k}\int_{-1}^{+1}\frac{\tau}{1+\tau^2}d(v_z'+iS) = \right.$$

$$= \frac{2}{k}w_0 - \frac{8w_0}{k\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\tau^2}{1+\tau^2}\frac{\sin 2\sigma_0\, d\tau}{(\tau^2-e^{-2i\sigma_0})(\tau^2-e^{2i\sigma_0})}.$$

Интеграл в правой части легко вычисляется и даёт:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\tau^2}{1+\tau^2}\frac{d\tau}{(\tau^2-e^{-2i\sigma_0})(\tau^2-e^{2i\sigma_0})} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\cos\sigma_0} - \operatorname{tg}\sigma_0\right).$$

Собираем теперь члены в C_y и принимаем в расчёт (31.23) и (31.25); получим окончательно простое соотношение:

$$C_y = -\frac{4\bar{\beta}}{k},$$

каковое в точности совпадает с формулой Аккерета для пластинки бесконечного размаха [1]).

Иначе будет обстоять дело, если стреловидное крыло всё целиком лежит внутри конуса характеристик ($\delta < \alpha$). Теперь мы должны будем искать аналитическую функцию, действительная часть которой обращается в нуль на круге радиуса $\varepsilon = 1$ и мнимая часть которой равна нулю на отрезке действительной оси длины $2b$. Ясно, что

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2}{k}\frac{b}{1+b^2}, \tag{31.27}$$

где δ — по-прежнему угол стреловидности.

М. И. Гуревич продолжает функцию $1/k\, f(\tau)$ на всю плоскость (τ) с разрезами от $-\infty$ до $-1/b$, от $-b$ до $+b$ и от $1/b$ до ∞ и даёт решение в виде

$$v_z + is = B\frac{\tau^2+1}{\sqrt{(b^2-\tau^2)\left(\frac{1}{b^2}-\tau^2\right)}}, \tag{31.28}$$

где B есть действительная постоянная, которую мы должны найти из краевого условия на пластинке $\left(v_z' = \bar{\beta}v_1\right)$. Решение легко проверить непосредственно. Чтобы найти B, используем вновь (31.18) и произведём, как и в предыдущем случае, интеграцию по мнимому

[1]) Пластинка есть частный случай стреловидного крыла ($\delta = \pi/2$).

радиусу. Получим, как и прежде,

$$(v'_y)_{\tau=0} = -\frac{k}{2}\operatorname{Im}\int_i^0 \frac{df}{d\tau}\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right)d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{Im} B\left(\frac{1}{b}+b\right)^2 k\int_0^i \frac{(1-\tau^2)^2}{(b^2-\tau^2)^{3/2}\left(\frac{1}{b^2}-\tau^2\right)^{3/2}}d\tau.$$

Таким образом,

$$(v'_y)_0 = -\frac{k}{2}B\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\int_0^1 \frac{(1+\varepsilon^2)^2\,d\varepsilon}{(b^2+\varepsilon^2)^{3/2}\left(\frac{1}{b^2}+\varepsilon^2\right)^{3/2}}.$$

Подстановкой $\varepsilon = b\operatorname{tg}\varphi$ приведём это выражение к виду

$$(v'_y)_0 = -\frac{kB}{2}\frac{1}{b}\int_0^{\varphi_1}\frac{[b^2+1-(1-b^4)\sin^2\varphi]^2}{[1-(1-b^4)\sin^2\varphi]^{3/2}}d\varphi, \qquad (31.29)$$

где

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{b}.$$

Раскрывая числитель подынтегрального выражения, напишем:

$$(v'_y)_0 = -\frac{kB}{2b}\int_0^{\varphi_1}\left\{\frac{b^4}{[1-(1-b^4)\sin^2\varphi]^{3/2}} + \frac{2b^2}{\sqrt{1-(1-b^4)\sin^2\varphi}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{1-(1-b^4)\sin^2\varphi}\right\}d\varphi.$$

Правая часть может быть выражена через эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода и через элементарные функции [1]). В самом деле, если

$$E(x,\ k) = \int_0^x \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx, \qquad F(x,\ k) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,dx,$$

то

$$\int_0^x \frac{dx}{(\sqrt{1-k^2\sin^2 x})^3} = \frac{E(x,\ k)}{1-k^2} - \frac{k^2}{1-k^2}\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},$$

так что

$$(v'_y)_0 = -\frac{Bk}{b}\left[E(\varphi_1,\ \sqrt{1-b^4}) + b^2F(\varphi_1,\ \sqrt{1-b^4}) - \frac{1-b^2}{2}\right].$$

[1]) См., например, Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям, стр. 37, формула 126.

Таким образом, постоянная B найдётся по формуле:

$$B = -\frac{b\bar{\beta}v_1}{k\left[E(\varphi_1, \sqrt{1-b^4}) + b^2F(\varphi_1, \sqrt{1-b^4}) - \frac{1-b^2}{2}\right]}. \quad (31.30)$$

Коэффициент подъёмной силы C_y запишется по (31.26) в виде:

$$C_y = \frac{4}{kv_1 \operatorname{tg}\delta} \int_{-b}^{+b} v'_z \frac{1-\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2}\, d\varepsilon.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, заменим его контурным интегралом, взятым вокруг крыла:

$$C_y = \frac{2}{kv_1 \operatorname{tg}\delta} \int (v'_z + is) \frac{1-\tau^2}{(1+\tau^2)^2}\, d\tau =$$

$$= -\frac{Bi}{kv_1 \operatorname{tg}\delta} \int \frac{1-\tau^2}{(b^2-\tau^2)\left(\frac{1}{b^2}-\tau^2\right)} \left(\frac{1}{\tau-i} - \frac{1}{\tau+i}\right) d\tau.$$

Деформируя контур в круг единичного радиуса с обходом вокруг обоих полюсов $\tau = \pm i$ по бесконечно малым окружностям и применяя теорию вычетов, получим:

$$C_y = \frac{2\pi B}{v_1}.$$

Используя (31.30), получим окончательно

$$C_y = -\frac{4\bar{\beta}}{k} \frac{\pi b}{2b^2F(\varphi_1, \sqrt{1-b^4}) + 2E(\varphi_1, \sqrt{1-b^4}) - 1 + b^2}. \quad (31.31)$$

Таким образом, в противоположность тому, что имело место в предыдущем случае, отношение $C_y \Big/ \frac{4\bar{\beta}}{k}$ здесь не является постоянным, а будет зависеть от b и φ, т. е. по (31.27) и (31.29) от произведения $k \operatorname{tg}\delta$. На рис. 127, заимствованном из статьи Гуревича, по горизонтальной оси откладывается величина $k \operatorname{tg}\delta$, по вертикальной оси величина $-C_y \Big/ \frac{4\bar{\beta}}{k}$. До значения $k \operatorname{tg}\delta = 1$ используем (31.31), при $k \operatorname{tg}\delta > 1$ получим постоянную, равную единице (формула Аккерета справедлива для стреловидного крыла, выходящего за конус характеристик).

Вернёмся к общей пространственной задаче и покажем, как можно найти некоторые новые классы точных (нелинейных) решений.

В случае осесимметрического обтекания конуса (ξ) концы вектора скорости располагались на кривых $v_r = f(v_z)$. Это значит, что в пространстве (v_x, v_y, v_z) концы вектора скорости располагались в этом

случае на поверхности вращения. Возникает вопрос, нельзя ли построить другие виды движений, более общие в том смысле, что в них концы вектора скорости хотя и лежат на некоторой поверхности Σ, но последняя не обязательно является поверхностью вращения.

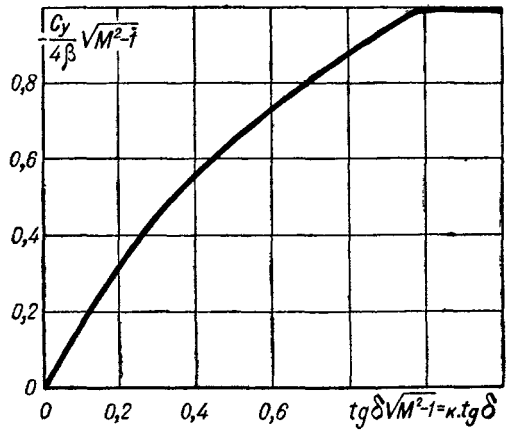

Рис. 127.

Задача эта была исследована впервые А. А. Никольским [1]) (1949 г.). Изложим некоторые результаты этих исследований.

Пусть уравнение поверхности Σ в пространстве скоростей записывается в виде

$$v_z = F(v_x, v_y). \tag{31.32}$$

Построим дифференциальное уравнение в частных производных, которому удовлетворяет функция F.

Мы рассматриваем безвихревое движение, так что выполняются соотношения:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z}. \tag{31.33}$$

---

[1]) Никольский А. А., О классе адиабатических течений газа, которые в пространстве годографа скорости изображаются поверхностями, ЦАГИ, Сборник теоретических работ по аэродинамике, Оборонгиз, 1957.

Никольский А. А., Об одном классе точных решений пространственных уравнений газовой динамики, АН СССР, Инженерный журнал, 1 (1961), в. 4.

Кроме того, должно выполняться уравнение (28.5), которое, используя (31.33), мы можем записать в виде:

$$(v_x^2 - a^2)\frac{\partial v_x}{\partial x} + (v_y^2 - a^2)\frac{\partial v_y}{\partial y} + (v_z^2 - a^2)\frac{\partial v_z}{\partial z} + \\ + 2v_xv_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + 2v_xv_z\frac{\partial v_z}{\partial x} + 2v_yv_z\frac{\partial v_z}{\partial y} = 0. \quad (31.34)$$

Вставим теперь v_z из (31.32) в уравнение (31.34), используем еще раз (31.33) и перегруппируем члены. Получим

$$\left\{a^2\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial v_x}\right)^2\right] - \left(v_x + F\frac{\partial F}{\partial v_x}\right)^2\right\}\frac{\partial v_x}{\partial x} - \\ - 2\left[v_xv_y + v_yF\frac{\partial F}{\partial v_x} + v_xF\frac{\partial F}{\partial v_y} + (F^2 - a^2)\frac{\partial F}{\partial v_x}\frac{\partial F}{\partial v_y}\right]\frac{\partial v_x}{\partial y} + \\ + \left\{a^2\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial v_y}\right)^2\right] - \left(v_y + F\frac{\partial F}{\partial v_y}\right)^2\right\}\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (31.35)$$

Перейдём теперь от переменных x, y, z к переменным u, v, ζ из соотношений:

$$u = v_x, \quad v = v_y, \quad \zeta = z.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial v}\Delta, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial v}\Delta, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial u}\Delta,$$

где $\Delta = \dfrac{\partial v_x}{\partial x}\dfrac{\partial v_y}{\partial y} - \left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2$. Но тогда (31.35) может быть переписано в виде:

$$\left\{a^2\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right] - \left(u + F\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial y}{\partial v} + \\ + 2\left[uv + vF\frac{\partial F}{\partial u} + uF\frac{\partial F}{\partial v} + (F^2 - a^2)\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\right]\frac{\partial x}{\partial v} + \\ + \left\{a^2\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2\right] - \left(v + F\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2\right\}\frac{\partial x}{\partial u} = 0. \quad (31.36)$$

В этом уравнении коэффициенты, стоящие при $\partial y/\partial v$, $\partial x/\partial v$, $\partial x/\partial u$, зависят только от u, v, сами же величины x, y зависят как от u, v, так и от ζ. Покажем теперь, что в нашем движении x и y суть линейные функции от ζ с коэффициентами, зависящими от u и v. Для этого введём в рассмотрение функцию χ из равенства:

$$\chi = ux + vy + F(u, v)\cdot\zeta - \varphi(x, y, \zeta),$$

где φ — потенциал скоростей, так, что $u = \partial\varphi/\partial x$, $v = \partial\varphi/\partial y$, $F = \partial\varphi/\partial\zeta$. Легко видеть, что χ зависит лишь от u и v, но не зави-

сит от ζ. Действительно:

$$d\chi = u\frac{\partial x}{\partial \zeta} + v\frac{\partial y}{\partial \zeta} + F - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} =$$
$$= u\frac{\partial x}{\partial \zeta} + v\frac{\partial y}{\partial \zeta} + F - u\frac{\partial x}{\partial \zeta} - v\frac{\partial y}{\partial \zeta} - F = 0.$$

Далее,

$$\frac{\partial \chi}{\partial u} = x + u\frac{\partial x}{\partial u} + v\frac{\partial y}{\partial u} + \zeta\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = x + \zeta\frac{\partial F}{\partial u}.$$

Таким образом,

$$x = \frac{\partial \chi}{\partial u} - \zeta\frac{\partial F}{\partial u}. \tag{31.37}$$

Аналогично

$$y = \frac{\partial \chi}{\partial v} - \zeta\frac{\partial F}{\partial v}. \tag{31.38}$$

Таким образом, x и y являются линейными функциями от ζ с коэффициентами, зависящими от u и v.

Мы можем теперь написать

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} - \zeta\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial u\,\partial v} - \zeta\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v},$$
$$\frac{\partial \chi}{\partial u} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} - \zeta\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}.$$

Вставляя эти выражения в (31.36) и приравнивая нулю члены с ζ, получим уравнение для определения функции F:

$$\left\{a^2\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2\right] - \left(v + F\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} +$$
$$+ 2\left[uv + vF\frac{\partial F}{\partial u} + uF\frac{\partial F}{\partial v} + (F^2 - a^2)\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\right]\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} +$$
$$+ \left\{a^2\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right] - \left(u + F\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0. \tag{31.39}$$

Одновременно с этим, приравнивая нулю члены, свободные от ζ, получим уравнение для χ.

$$\left\{a^2\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\right]^2 - \left(v + F\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} +$$
$$+ 2\left[uv + vF\frac{\partial F}{\partial u} + uF\frac{\partial F}{\partial v} + (F^2 - a^2)\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\right]\frac{\partial^2 \chi}{\partial u\,\partial v} +$$
$$+ \left\{a^2\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right] - \left(u + F\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} = 0. \tag{31.40}$$

Обратим прежде всего внимание на одну замечательную особенность нашего движения. Рассмотрим какую-либо точку поверхности (31.32) $v_x = u_0$, $v_y = v_0$, $v_z = w_0 = F(u_0, v_0)$. В силу (31.37), (31.38)

этой точке в пространстве (x, y, z) будет отвечать целая прямая

$$x=\left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)_{u_0,v_0}-z\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{u_0,v_0};\quad y=\left(\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)_{u_0,v_0}-z\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{u_0,v_0}. \tag{31.41}$$

Таким образом, в нашем движении существуют целые прямые, вдоль которых значение скоростей сохраняется (меняясь от прямой к прямой). Расположение этих прямых в пространстве (x, y, z) зависит от вида функций χ и F. Задание поверхности F уже определяет направление этих прямых: каждая из прямых (31.41) параллельна нормали к Σ, проведённой в точке u_0, v_0.

Размещение этих прямых в пространстве регулируется функцией $\chi(u, v)$. В частности, если $\chi=\text{const}$. (это значение тождественно удовлетворяет уравнению (31.40)), имеем

$$x=-z\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{u_0,v_0},\quad y=-z\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{u_0,v_0}$$

и тогда все прямые постоянного вектора скорости проходят через одну точку $x=y=z=0$.

Если взять

$$\chi=c_1u+c_2v+c_3F(u, v)+C,$$

где c_1, c_2, c_3, C — произвольные постоянные (такая χ, как легко видеть, вновь удовлетворяет уравнению (31.40), если F удовлетворяет уравнению (31.39)), получим:

$$x=c_1+(c_3-z)\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{u_0,\,v_0},$$

$$y=c_2+(c_3-z)\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{u_0,\,v_0}.$$

Теперь мы будем иметь в пространстве (x, y, z) пучок прямых, проходящих через точку $x=c_1$, $y=c_2$, $z=c_3$. Это — своего рода конические течения (не осесимметрические), вид которых остаётся в значительной степени произволен, пока не задана F.

На конкретных примерах различных F мы не останавливаемся.

Рассмотрим теперь пространственные течения газа, в которых концы вектора скорости располагаются на некоторой линии. Такие течения были рассмотрены А. А. Никольским (1950) в том виде, как это излагается ниже.

Пусть в пространстве v_x, v_y, v_z области течения соответствует кривая l, имеющая уравнение

$$v_x=u,\quad v_y=v(u),\quad v_z=w(u). \tag{31.42}$$

Рассмотрим в нашем течении, в пространстве (x, y, z), поверхность

$$p(x, y, z)=p_0=\text{const}. \tag{31.43}$$

По уравнению Бернулли и в силу (31.42) мы будем иметь во всех точках этой поверхности одни и те же значения v_x, v_y, v_z; пусть это будут $v_x = u_0$, $v_y = v_0$, $v_z = w_0$. Таким образом, в пространстве (v_x, v_y, v_z) всей нашей поверхности будет отвечать одна точка $A(u_0, v_0, w_0)$ кривой l. Докажем теперь, что поверхность (31.43) есть плоскость в пространстве координат. Действительно, по уравнению движения

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

Это равенство означает, что при бесконечно малом удалении вдоль линии тока от поверхности $p = \text{const}$. приращение $d\mathbf{V}$ вектора скорости будет всегда нормально к поверхности $p = \text{const}$. Но построенные таким образом приращения $d\mathbf{V}$ во всех точках поверхности $p = \text{const}$. имеют одно и то же направление — они параллельны касательной к кривой l в одной-единственной точке $A(u_0, v_0, w_0)$. Значит, любая поверхность $p = \text{const}$. является плоскостью, нормали к которой параллельны касательной, проведённой через соответствующую точку кривой.

Воспользуемся теперь уравнением (31.33) и (31.34). По (31.33) имеем:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{dv}{du}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{dw}{du}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{dv}{du}\cdot\frac{\partial v_x}{\partial y} = \left(\frac{dv}{du}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{dv}{du}\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{dv}{du}\frac{dw}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{dw}{du}\frac{\partial v_x}{\partial z} = \left(\frac{dw}{du}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (31.34) и сократим его на величину $\partial u/\partial x$; получим следующее соотношение между дифференциалами du, dv, dw вдоль кривой l:

$$(a^2 - u^2)(du)^2 + (a^2 - v^2)(dv)^2 + (a^2 - w^2)(dw)^2 - \\ - 2uv\,du\,dv - 2uw\,du\,dw - 2vw\,dv\,dw = 0. \quad (31.44)$$

Это соотношение можно записать в виде:

$$(a\,|\,d\mathbf{V}\,|)^2 = (V\cdot dV)^2, \quad (31.45)$$

где дифференциалы берутся вдоль кривой l, причём $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$. Прежде всего отсюда следует, что движение рассматриваемого типа будет обязательно сверхзвуковым. Действительно, соотношение (31.45) инвариантно по отношению к направлению осей u, v, w (v_x, v_y, v_z). Возьмём какую-либо точку M кривой l и направим ось u по касательной к l в точке M; тогда в этой точке $dv = dw = 0$ и мы будем иметь $(a^2 - u^2)\,du^2 = 0$ и, так как $du \neq 0$, то $u^2 = a^2$, т. е. величина

проекции скорости на направление l равна скорости звука. Отсюда следует, что рассматриваемое движение может быть только сверхзвуковым.

Плоские безвихревые движения, которые мы изучали ранее, являются частным случаем рассматриваемых сейчас движений: они получатся в случае, когда кривая l — плоская кривая. При этом, как мы знаем, годографом скорости будут те или иные эпициклоиды. Уравнения этих эпициклоид найдутся сразу же из уравнения (31.44), если положить там $dw = 0$.

Уравнение (31.45) можно будет ещё записать в виде

$$ds^2 = \left(\frac{V}{a}\,dV\right)^2, \tag{31.46}$$

где ds — элемент дуги вдоль линии l в пространстве (u, v, w). Так как скорость звука a есть функция одного только модуля V, это уравнение интегрируется в квадратурах; оно даёт ту же зависимость длины дуги s от V, какая связывала в случае эпициклоид соответствующие величины на плоскости.

Если провести прямолинейные лучи через некоторую точку кривой l и через начало O системы (u, v, w), мы получим коническую развёртывающуюся поверхность. Развернув её в плоскость, увидим, что кривая l обратится в эпициклоиду. В самом деле, расстояния V точек кривой l от точки O, а также элементы длины дуги при этом не изменятся и поэтому уравнение (31.46) будет удовлетворяться и для плоскости; но на плоскости уравнение (31.46) есть уравнение эпициклоид.

Это соображение позволяет найти все интегральные кривые уравнения (31.44). Для их получения достаточно взять любую коническую поверхность, развернуть её на плоскость, нанести на ней два семейства эпициклоид и затем снова восстановить исходную поверхность. Нанесённые нами эпициклоиды перейдут в систему l.

Более подробно вопросы геометрии движений, отвечающих случаю наличия l, были рассмотрены в работах А. А. Никольского, С. В. Валандера и П. Жермен.

§ 32. Осесимметричное обтекание с отошедшей ударной волной. При обтекании тупого осесимметричного тела сверхзвуковым потоком (скорость по бесконечности направлена вдоль оси симметрии тела) образуется осесимметричная ударная волна, отходящая от поверхности тела. Задача определения формы ударной волны и вихревого движения между поверхностью разрыва и поверхностью тела решается численно. Схема решения была дана О. М. Белоцерковским и реализована на электронной быстродействующей вычислительной машине. Так же как и в аналогичном плоском случае (§ 22), здесь был применён метод Дородницына, позволяющий решить задачу в точ-

ной постановке и с нужной степенью точности. Путь решения заключается в следующем.

Вводятся сферические координаты (r, θ, λ) (ось θ — вдоль потока). В силу осевой симметрии движение не зависит от λ и составляющая v_λ скорости равна нулю. Уравнения движения примут вид:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \tag{32.1}$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial r}. \tag{32.2}$$

Используя уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho v_r \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \rho v_\theta \sin\theta) = 0, \tag{32.3}$$

введём функцию тока Ψ такую, что

$$r^2 \rho v_r \sin\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad r \rho v_\theta \sin\theta = \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \tag{32.4}$$

При этом

$$\frac{d\Psi}{d\theta} = R\rho \sin\theta \left(v_\theta \frac{dR}{d\theta} - R v_r \right), \tag{32.5}$$

если дифференцирование проводится вдоль некоторой линии $r = R(\theta)$. Уравнение (32.5) есть аналог уравнения (22.10) плоского случая. Комбинируя (32.2) и (32.3), получим аналог уравнения (22.8):

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin\theta \left(p + \rho v_r^2\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r \sin\theta \rho v_\theta v_r\right) = r\left(2p + \rho v_\theta^2\right)\sin\theta. \tag{32.6}$$

Соотношения, выражающие p и ρ через $V^2 = v_\theta^2 + v_r^2$, будут иметь тот же вид, что и в плоском случае (см. (22.11) и (22.12)). Неизвестными функциями являются v_θ, v_r, Ψ и ϑ. В качестве краевых условий имеем на теле:

$$r = r_0(\theta), \quad v_r = \frac{v_\theta}{r_0} \frac{dr_0}{d\theta}, \quad \Psi = 0, \quad \vartheta = \vartheta(0), \tag{32.7}$$

причём значение $\vartheta(0)$ даётся формулой (22.21). На ударной волне $r = r_0 + \varepsilon(\theta)$, где $\varepsilon(\theta)$ — функция от θ, подлежащая определению, имеем вновь соотношения (22.13) — (22.15), связывающие v_θ, v_r и φ (φ — угол наклона нормали к поверхности разрыва к оси симметрии); кроме того, имеем очевидное соотношение

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = -\frac{dr_0}{d\theta} + (r_0 + \varepsilon)\operatorname{tg}(\theta + \varphi) \tag{32.8}$$

— аналог соотношения (22.18). Наконец, по (32.4) должны иметь на ударной волне:

$$\Psi = (r_0+\varepsilon)^2 \frac{\rho_\infty v_\infty}{2} \sin^2\theta = \frac{1}{2}(r_0+\varepsilon)^2 \rho_0 \left(1 - \frac{v_\infty^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} v_\infty \sin^2\theta. \tag{32.9}$$

Процесс решения задачи, как и в плоском случае, заключается в разбиении области интегрирования между телом и поверхностью разрыва на N областей путём проведения линий

$$r_i = r_0(\theta) + \xi_i \varepsilon(\theta), \quad \text{где} \quad \xi_i = \frac{i}{N} \qquad (1, 2, \ldots, N)$$

с последующим интегрированием уравнений (32.3) и (32.6) вдоль линий $\theta = \text{const}$ от контура тела до границы каждой из полос и с заменой подынтегральных функций интерполяционными полиномами. Искомыми функциями будут значения функций на границах полос. Граничные условия выполняются точно. Задача сводится к численному интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений по θ, причём часть краевых условий задается на оси симметрии:

$$\text{при} \quad \theta = 0 \quad (v_\theta)_i = 0, \quad \Psi_i = 0, \quad \vartheta_i(0) = \vartheta_0, \quad \varphi = 0,$$

а остальные на особой линии. Небольшое отличие от плоского случая заключается в том, что теперь, кроме N подвижных особых точек, мы будем каждый раз иметь для некоторых уравнений системы особенности вдоль оси симметрии. Эти последние особые точки будут, однако, фиксированными регулярными особыми точками; как и в плоском случае, и здесь придётся иметь дело с рядами по степеням θ.

Здесь (как и в плоском случае на стр. 191) предполагалось, что граница тела представляет собой гладкий контур. По рассмотренной методике можно проводить расчёт тел, образующая которых в области влияния имеет излом (в этом случае один из параметров определяется из условия того, что в точке излома должна быть звуковая скорость), а также расчёт «комбинированных» тел (сфера — конус и др.). Метод может быть обобщён на случай сверхзвукового обтекания затупленных тел потоком реального газа (с учётом диссоциации и ионизации). Если задаться целью создать единую программу для быстродействующих электронных счётных машин, пригодную для расчётов как плоских, так и осесимметричных тел разнообразной формы (гладких, сильно затупленных, с изломом образующей, «комбинированных») при различных значениях показателя адиабаты k и чисел Маха набегающего потока ($1 < \mathrm{M}_\infty < \infty$), то весьма удобно за независимые переменные взять s и n (s — длина дуги вдоль тела, отсчитываемая от критической точки, n — нормаль к телу).

Приведём некоторые результаты расчётов осесимметрических тел, полученные О. М. Белоцерковским [1]).

На рис. 128, 129, 130 представлены картины обтекания эллипсоидов вращения ($\delta = 0{,}5$; $1{,}5$) и сферы ($\delta = 1{,}0$) при различных значениях M_∞ (δ — отношение вертикальной оси эллипсоида к гори-

[1]) Белоцерковский О. М., О расчёте обтекания осесимметрических тел с отошедшей ударной волной на электронной счётной машине, ПММ, т. XXIV, вып. 3, 1960.

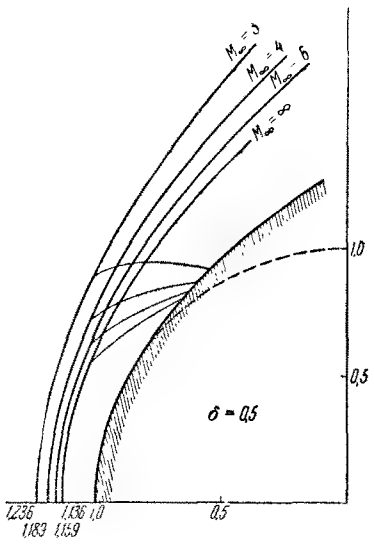

Рис. 128.

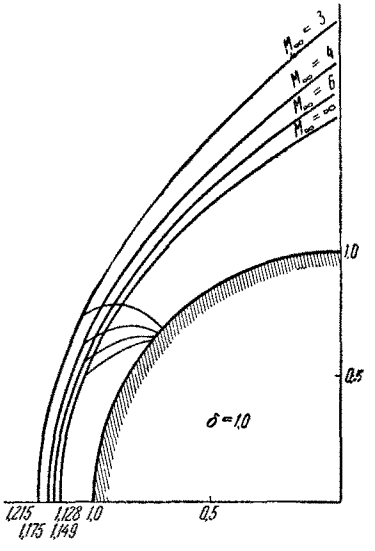

Рис. 129.

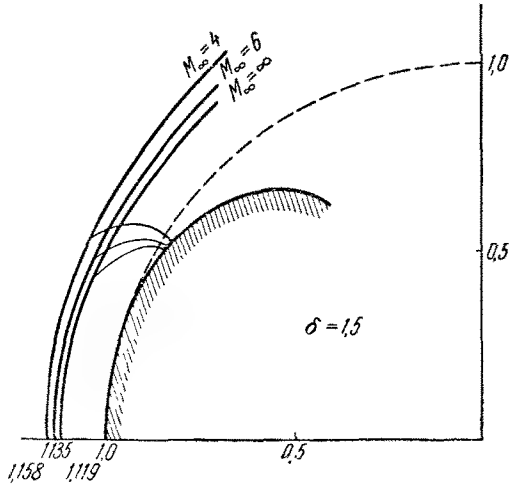

Рис. 130.

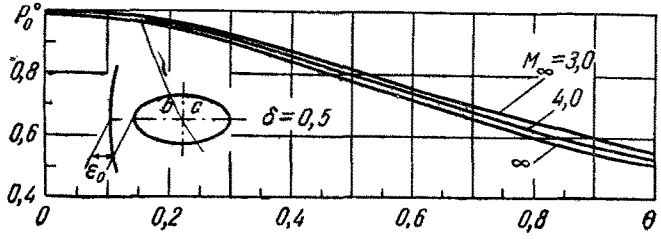

Рис. 131.

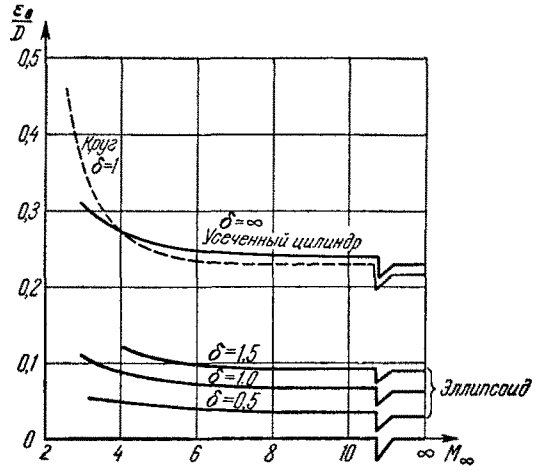

Рис. 132.

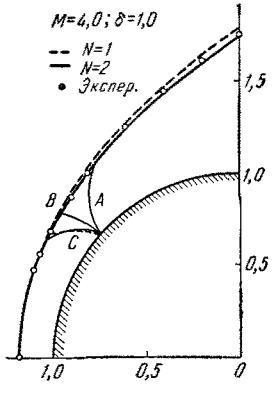

Рис. 133.

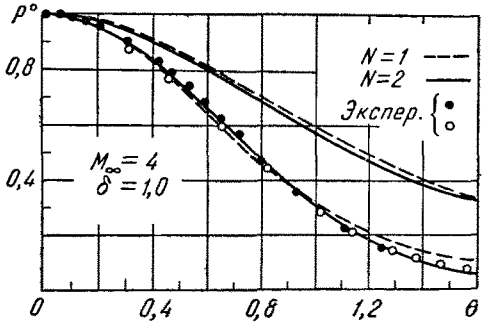

Рис. 134.

зонтальной). На рис. 131 дано распределение давления $p/p_0 = p(r_0, \theta)/p(r_0, 0)$ вдоль поверхности эллипсоида с $\delta = 0{,}5$. На рис. 132 показано, как меняется расстояние от тела до поверхности разрыва вдоль оси симметрии.

Рис. 133 и 134 иллюстрируют сходимость метода при $N = 1, 2$, $M_\infty = 4$; на рис. 133 приведена ударная волна, звуковая линия и характеристики *I* и *II* семейств; на рис. 134 даны распределения давления вдоль тела и поверхности разрыва.

В заключение следует отметить, что метод интегральных соотношений с успехом применялся и для решения других задач газовой динамики и прикладкой математики. Так, П. И. Чушкиным [1]) было рассмотрено обтекание произвольного тела в дозвуковом и звуковом потоке газа, а также дозвуковое обтекание эллипсов с циркуляцией.

Г. НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 33. Одноразмерные движения. Общие уравиения. Характеристики. Пусть газ движется вдоль оси x так, что все элементы движения v_x, p, ρ являются функциями одного только x и времени t. Таким образом,

$$v_y = v_z = 0; \qquad v_x = v_x(x, t); \qquad p = p(x, t); \qquad \rho = \rho(x, t).$$

Предполагая, что внешних сил и сил вязкости нет, мы можем написать уравнение движения в виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial t} - v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

Уравнение же неразрывности даст:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} = 0.$$

Прибавим ещё условие адиабатичности движения

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{p}{\rho^\varkappa} + v_x\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\rho^\varkappa} = 0.$$

Мы имеем таким образом три уравнения для определения трёх функций: v_x, p, ρ. Как и прежде, введем величину ϑ, просто связанную с энтропией, из условия

$$p = \vartheta^\varkappa(x, t)\rho^\varkappa. \tag{33.1}$$

---

[1]) Чушкин П. И., Обтекание эллипсов и эллипсоидов дозвуковым потоком газа, Выч. мат., **2** (1957); Расчёт некоторых звуковых течений газа, ПММ, т. XXI, в. 3, 1957; Расчёт обтекания произвольиого профиля и тела вращения в дозвуковом потоке газа, Выч. мат., **3** (1958); Дозвуковое обтекание эллипсов с циркуляцией, ДАН СССР, **125** (1959), № 4.

Тогда

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0. \tag{33.2}$$

Уравнение (33.2) показывает, что в случае непрерывности движения ϑ сохраняется в частице. Вместо функций v_x, p, ρ удобно будет ввести v_x, a (скорость звука) и ϑ. Так как

$$a^2 = \varkappa \frac{p}{\rho} = \varkappa \vartheta^{\varkappa} \rho^{\varkappa - 1} = \varkappa \vartheta p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}, \quad \text{то} \quad \ln \rho = \frac{2}{\varkappa - 1} \ln a - \frac{1}{\varkappa - 1} \ln (\varkappa \vartheta^{\varkappa}).$$

Таким образом, уравнение неразрывности даст после простых преобразований:

$$\frac{2}{\varkappa - 1}\left(\frac{\partial \ln a}{\partial t} + v_x \frac{\partial \ln a}{\partial x}\right) - \frac{1}{\varkappa - 1}\left(\frac{\partial}{\partial t} \ln \varkappa \vartheta^{\varkappa} + v_x \frac{\partial}{\partial x} \ln \varkappa \vartheta^{\varkappa}\right) + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,$$

что, вследствие (33.2), может быть записано в виде:

$$\frac{\varkappa - 1}{2} a \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial t} + v_x \frac{\partial a}{\partial x} = 0. \tag{33.3}$$

Уравнение движения даст

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial \ln p}{\partial x} = -\frac{a^2}{\varkappa}\left(\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{\partial \ln a}{\partial x} - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{\partial \ln \varkappa \vartheta}{\partial x}\right),$$

что может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{\varkappa - 1} a \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{a^2}{\varkappa - 1} \frac{\partial \ln \vartheta}{\partial x}. \tag{33.4}$$

Мы уже упомянули о том, что ϑ сохраняется в частице; распределение ϑ от частицы к частице следует считать поэтому в задачах газовой динамики как бы начальным условием и данной функцией [наподобие того, как в плоской стационарной задаче мы считали известной функцию $\vartheta = \vartheta(\psi)$] от лагранжевой координаты (мы будем обозначать её в этой главе буквой ξ):

$$\vartheta = \vartheta(\xi).$$

Аналогично тому, как в плоском случае мы вводили вспомогательную функцию ψ от x и y, введём теперь вспомогательную величину ξ — лагранжеву координату — функцию от x и t:

$$\xi = \xi(x, t).$$

Функцию эту мы получим, если решим уравнение

$$x = x(\xi, t)$$

относительно ξ.

С другой стороны, уравнение неразрывности позволяет заключить о существовании функции $A(x, t)$, такой, что

$$\rho = \frac{\partial A}{\partial x}, \quad -\rho v_x = \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Уравнение (33.2) заставляет нас считать, что A зависит лишь от ξ. Более того, вводя плотность ρ_0 в некий исходный момент как функцию ξ: $\rho_0(\xi)$, мы можем найти связь между A и ξ. В самом деле, напишем тождество

$$\xi = \xi(x(\xi, t), t)$$

и продифференцируем его обе части по ξ; получим

$$1 = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi};$$

но вследствие уравнения неразрывности, написанного в форме Лагранжа, для нашего одноразмерного движения имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\rho_0(\xi)}{\rho};$$

значит,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

так что

$$A = \int \rho_0(\xi)\, d\xi.$$

Таким образом, $\xi(x, t)$ должна удовлетворять одному из двух уравнений

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\rho}{\rho_0}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\rho v_x}{\rho_0}. \tag{33.5}$$

Заметим, что, задав $\vartheta(\xi)$ и $\rho_0(\xi)$, мы можем определить и $p_0(\xi)$ и $a_0(\xi)$ (давление и скорость звука в исходный момент). В самом деле:

$$a_0 = \left(\varkappa \vartheta^{\varkappa} \rho_0^{\varkappa-1}\right)^{1/2}; \quad p_0 = \vartheta^{\varkappa} \rho_0^{\varkappa}.$$

Мы можем теперь записать (33.4) в виде

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{2}{\varkappa - 1} a \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{a^2}{\varkappa - 1} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{d \ln \vartheta}{d\xi}, \tag{33.6}$$

где

$$\rho = a^{\frac{2}{\varkappa-1}} (\varkappa \vartheta^{\varkappa})^{-\frac{1}{\varkappa-1}}. \tag{33.7}$$

Таким образом мы должны определить две функции: $v_x(x, t)$, $a(x, t)$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (33.3) и (33.6), причём в последнее уравнение входит ещё третья функция $\xi(x, t)$, но уже не под знаками дифференциалов; эта функция ξ должна удовлетворять одному из уравнений (33.5). Задача наша представляет аналогию с плоской вихревой задачей, рассмотренной выше (§ 9): там речь шла об определении функций v_x, v_y из уравнений (9.1), (9.2), причём формула (9.1) содержала ещё функцию ψ, каковая

должна была удовлетворять одному из дифференциальных уравнений (9.6).

Обращаясь к системе (33.3), (33.6), будем искать для неё характеристические многообразия в виде

$$x = x(t).$$

Вдоль этих линий

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} x'; \quad \frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} x'; \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} x'.$$

Находя отсюда $\partial v_x/\partial t$ и $\partial a/\partial t$ и вставляя их в уравнения (33.3), (33.6), получим:

$$\frac{\varkappa - 1}{2} a \frac{\partial v_x}{\partial x} + (v_x - x') \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{da}{dt},$$

$$(v_x - x') \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2a}{\varkappa - 1} \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\frac{\rho}{\rho_0}}{\varkappa - 1} \frac{d \ln \vartheta}{d\xi} a^2 - \frac{dv_x}{dt}.$$

Условие невозможности определения $\partial v_x/\partial x$ и $\partial a/\partial x$ из этой системы уравнений заключается в равенстве нулю определителей

$$\begin{vmatrix} \frac{\varkappa - 1}{2} a & v_x - x' \\ v_x - x' & \frac{2a}{\varkappa - 1} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{da}{dt} & x' - v_x \\ \frac{\frac{\rho}{\rho_0}}{\varkappa - 1} \frac{d \ln \vartheta}{d\xi} a^2 - \frac{dv_x}{dt} & \frac{2a}{\varkappa - 1} \end{vmatrix} = 0.$$

Из первого равенства находим

$$\frac{dx}{dt} = v_x \pm a. \tag{33.8}$$

Из второго:

$$\frac{2}{\varkappa - 1} a \frac{da}{dt} - \left(\frac{dx}{dt} - v_x \right) \left[\frac{\frac{\rho}{\rho_0}}{\varkappa - 1} \frac{d \ln \vartheta}{d\xi} a^2 - \frac{dv_x}{dt} \right] = 0$$

или, если применить (33.8), после простых преобразований:

$$\frac{dv_x}{dt} \pm \frac{2}{\varkappa - 1} \frac{da}{dt} = \frac{\frac{\rho}{\rho_0}}{\varkappa - 1} \frac{d \ln \vartheta}{d\xi} a^2. \tag{33.9}$$

Уравнение (33.8) показывает, что при любом нестационарном одноразмерном движении газа через каждую точку плоскости (x, t)

проходят две характеристики. Назовём характеристикой первого семейства ту, что отвечает знаку плюс, а характеристикой второго семейства — ту, что отвечает знаку минус. Те линии, вдоль которых мы перемещаемся в плоскости (v_x, a), когда в плоскости (x, t) мы идём по характеристикам, назовём характеристиками (первого или второго семейства) плоскости (v_x, a). Заметим, наконец, что вдоль характеристик, вследствие (33.8) и (33.5):

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} x' = \frac{\rho}{\rho_0}(-v_x + x') = \pm \frac{a\rho}{\rho_0}. \tag{33.10}$$

Итак, вдоль характеристик первого семейства

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = v_x + a; \\ &\frac{dv_x}{dt} + \frac{2}{\varkappa - 1}\frac{da}{dt} = \frac{a}{\varkappa - 1}\frac{d\ln\vartheta}{dt}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = a_0^{-\frac{2}{\varkappa-1}} a^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}, \end{aligned}\right\} \tag{33.11}$$

вдоль характеристик второго семейства:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = v_x - a; \quad \frac{dv_x}{dt} - \frac{2}{\varkappa - 1}\frac{da}{dt} = -\frac{a}{\varkappa - 1}\frac{d\ln\vartheta}{dt}; \\ &\frac{d\xi}{dt} = -a_0^{-\frac{2}{\varkappa-1}} a^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}. \end{aligned}\right\} \tag{33.12}$$

§ 34. Сильные разрывы в одномерной нестационарной задаче. Поверхность разрыва в одномерной задаче будет плоскостью, перпендикулярной к оси, вдоль которой происходит движение. Если мы условимся считать отрицательной областью ту, что лежит от поверхности разрыва в направлении отрицательной оси x, а положительной областью — ту, что лежит «справа» (в направлении положительной оси x), то у нас будет просто

$$V_n = v_x$$

(n направлено всегда в сторону положительной области). Таким образом,

$$\vartheta = N - V_n = N - v_x. \tag{34.1}$$

Уравнения (2.15) и (2.16) § 2 этой главы примут вид:

$$\rho\vartheta(v_{x+} - v_{x-}) = p_+ - p_-, \tag{34.2}$$

$$\rho_+\vartheta_+ = \rho_-\vartheta_-. \tag{34.3}$$

Кроме того, как всегда, имеет место формула (5.10) § 5. Таким образом, семь величин: N, ρ_+, ρ_-, p_+, p_-, v_{x+}, v_{x-} связаны тремя соотношениями, и мы можем, считая три величины (например, v_{x+}, p_- и ρ_-) известными, выразить любую из оставшихся величин через одну из этих последних величин. В предыдущем параграфе мы заме-

нили, однако, отыскание величин p и ρ отысканием a и ϑ; поэтому и здесь мы выразим p и ρ через a и ϑ. Будем искать связь между a_- и v_{x-} и между ϑ_- и N. Попутно найдём также зависимость v_{x-} от N.

Мы ограничимся для простоты дальнейших выкладок тем случаем, когда $v_{x+}=0$, т. е. разрыв распространяется в покоящейся среде. При этом будем считать, что $a_+=a_0=\text{const.}$, $p_+=p_0=$ $=\text{const.}$, $\rho_+=\rho_0=\text{const.}$ («исходная» плотность). Назовём затем $v_{x-}=v$, $p_-=p$, $\rho_-=\rho$, $a_-=a$.

Формула (5.14), решённая относительно ρ_+/ρ_-, даст:

$$\frac{\rho_+}{\rho_-}=\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}+\frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_+^2}{\vartheta_+^2}; \tag{34.4}$$

заменяя здесь ρ_+/ρ_- по (34.3) через ϑ_-/ϑ_+ и замечая, что по (34.1) $\vartheta_-=N-v_x$, $\vartheta_+=N$, получим из (34.4) зависимость между N и v_x в виде:

$$N^2-\frac{\varkappa+1}{2}Nv_x-a_0^2=0. \tag{34.5}$$

С другой стороны, формула (34.4) даст нам

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}+\frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_0^2}{N^2}, \tag{34.6}$$

что в соединении с формулой

$$\frac{p_0}{p}=\frac{\vartheta_+^{\varkappa}\rho_0^{\varkappa}}{\vartheta_-^{\varkappa}\rho^{\varkappa}}=\frac{(\varkappa+1)\frac{\rho_0}{\rho}-(\varkappa-1)}{\varkappa+1-(\varkappa-1)\frac{\rho_0}{\rho}} \tag{34.7}$$

даст возможность написать ϑ_- через посредство N (и конечно, ϑ_+, ρ_0, a_0). Наконец, чтобы найти зависимость между a и v_x, воспользуемся сперва формулой, аналогичной формуле (34.4),

$$\frac{\rho_-}{\rho_+}=\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}+\frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_-^2}{\vartheta_-^2},$$

т. е.

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}+\frac{2}{\varkappa+1}\frac{a^2}{(N-v_x)^2},$$

что, вследствие (34.3), напишем ещё так:

$$\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}+\frac{2}{\varkappa+1}\frac{a^2}{(N-v_x)^2}=\frac{N}{N-v_x}.$$

Остаётся только исключить из (34.5) и из этого уравнения N. Для этого запишем сперва последнее уравнение в виде

$$N^2+\frac{\varkappa-3}{2}v_xN-\frac{\varkappa-1}{2}v_x^2-a^2=0$$

и вычтем из него почленно (34.5); получим после простых преобразований

$$N = \frac{v_x}{2} + \frac{a^2 - a_0^2}{\varkappa - 1}\frac{1}{v_x}. \tag{34.8}$$

Наконец, вставляя это N в (34.5), получим искомую зависимость между a и v_x:

$$v_x^4 + 2\frac{a^2 + a_0^2}{\varkappa}v_x^2 - \frac{4}{\varkappa}\frac{(a^2 - a_0^2)^2}{(\varkappa - 1)^2} = 0. \tag{34.9}$$

Уравнение (34.9) представляет в плоскости (a, v_x) некую кривую четвёртого порядка. В интересующей нас области значений a ($a > 0$) она имеет двойную точку: $a = a_0$, $v_x = 0$ (рис. 135) и симметрична по отношению к оси v_x, а также по отношению к оси a; её асимптоты имеют уравнение

$$a = \pm\sqrt{\frac{\varkappa(\varkappa - 1)}{2}}\, v_x \approx 0{,}527 v_x.$$

Кроме того, оказывается, что достаточно рассмотреть только ту часть кривой, на которой $a > a_0$.

Уравнения (34.6) и (34.7) показывают, что если $\vartheta_+ = \text{const}$., но N меняется (зависит от времени), то ϑ_- станет переменной величиной, т. е. если в среде, покоящейся и обладающей постоянной энтропией, перемещается с переменной скоростью поверхность сильного разрыва, то после прохождения её среда получит в разных точках разную энтропию.

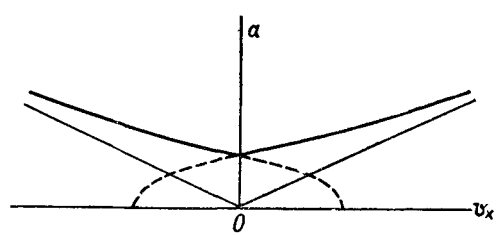

Рис. 135.

§ 35. Случай постоянной энтропии. Движение поршня в неограниченной трубе. Точные решения. Наличие отражающей стенки. Предположим сперва, что

$$\vartheta(\xi) = \text{const}.$$

Уравнения для характеристик (§ 32) примут тогда особенно простой вид: здесь $d\vartheta/d\xi = 0$, и мы можем проинтегрировать уравнение (32.9). Получим вдоль характеристик:

$$v_x \pm \frac{2}{\varkappa - 1}a = \text{const}.$$

Таким образом, в плоскости (v_x, a) характеристиками являются два семейства параллельных прямых, наклонённых к оси v_x под углом,

тангенс которого есть $\pm(\varkappa-1)/2$ (рис. 136). Будем писать для характеристик первого семейства

$$v_x+\frac{2}{\varkappa-1}a=2\lambda, \tag{35.1}$$

а для второго

$$v_x-\frac{2}{\varkappa-1}a=2\mu \tag{35.2}$$

(наше семейство прямых является аналогом семейства эпициклоид плоской безвихревой задачи). Аналогично тому, как это было в § 11, мы можем и здесь наметить две основные операции, назовём их α и β.

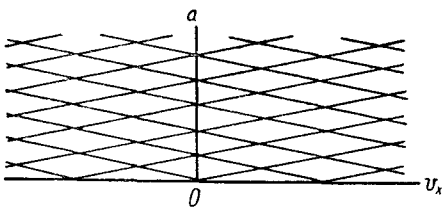

Рис. 136.

Операция α. В двух расположенных близко друг от друга точках M_1 и M_2 плоскости (x, t) даны значения v_x и a. Найти v_x и a в точке P пересечения характеристик разных семейств, выходящих из M_1 и M_2 соответственно. Эта операция выполняется сразу, если отметим точки M_1' и M_2' плоскости (v_x, a) с координатами, равными скоростям в точках M_1 и M_2 соответственно; действительно, заметим, что, перемещаясь в плоскости по характеристике $\overline{M_1P}$, — пусть для конкретности это будет характеристика первого семейства, мы будем двигаться в плоскости (v_x, a) по известной прямолинейной характеристике первого семейства, проходящей через M_1':

$$v_x-(v_x)_{M_1}+\frac{2}{\varkappa-1}(a-a_{M_1})=0;$$

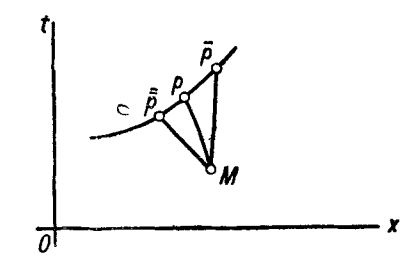

Рис. 137.

двигаясь же вдоль $\overline{M_2P}$, мы пойдём в (v_x, a) вдоль известной прямой

$$v_x-(v_x)_{M_2}-\frac{2}{\varkappa-1}(a-a_{M_2})=0.$$

Точка P' пересечения этих прямых и даст скорость v_x и a в P.

Операция β. На некоторой кривой L, не являющейся характеристикой и лежащей в плоскости (x, t), даны значения v_x. В точке M, расположенной близ кривой, но вне её, известны v_x и a. Надо найти обе скорости в точке P пересечения с кривой L характеристики, проходящей через M (рис. 137). Чтобы это сделать, обратимся к плоскости (v_x, a) и, отметив в ней точку M', координаты которой суть скорости в точке M, проведём через M' прямолиней-

ную характеристику (того же семейства, что и $\overline{MP}$) и на ней отыщем точку P', в которой v_x равно известному значению величины v_x в P. Ордината точки $P'(v_x, a)$ и даст нам скорость звука в P'.

Практически мы сможем провести наши операции точно лишь наполовину (так же как это было в § 11): именно, мы можем точно найти величины v_x и a в точке P' характеристики в плоскости (v_x, a), но не сможем определить точно местонахождение точки P, ибо вид характеристик плоскости (x, t) неизвестен. Можно, однако, по формуле (33.8) найти углы касательных к характеристикам в точках M_1 и M_2 (или M), провести эти касательные, найти пересечение P этих отрезков прямых и считать, что точке P как раз и отвечает найденная точка P' плоскости (v_x, a). Ошибка при этом тем меньше, чем ближе точки M_1, M_2 друг к другу или чем ближе к кривой L точка M. Мы можем, так же как и в § 11, дать оценку погрешности, заключая неизвестные нам дуги характеристик в известные углы: мы сможем, в случае однозначной зависимости между точками плоскости (v_x, a) и (x, t), опираясь на легко доказываемую монотонность изменения при перемещении вдоль характеристики угла наклона касательной к характеристике, заключить, что характеристика $\overset{\frown}{M_1P}$, например (операция α), лежит внутри угла между отрезком $\overline{M_1P^*}$ касательной к характеристике в M_1 [находящейся по формуле (33.8)] и отрезком $\overline{M_1P^{**}}$, параллельным касательной к характеристике $\overset{\frown}{M_1P}$ в точке P [наклон отрезка M_1P найдётся по (33.8), так как скорости в неизвестной точке P нам точно известны — это координаты P'].

Два слова об определении величины ξ. Если нам известно ξ в точках M_1 и M_2, то, чтобы найти ξ в P, надо обратиться к формулам (33.11), (33.12):

$$\frac{d\xi}{dt} = \pm\, a_0^{-\frac{2}{\varkappa-1}} a^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}.$$

Зная ξ в точке M_1 или M_2, можем найти там $a_0(\xi)$ и таким образом найти $d\xi/dt$. Остаётся написать приращение:

$$\Delta\xi = \left(a_0^{-\frac{2}{\varkappa-1}} a^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\right)_{M_2} \Delta t,$$

если двигаться по $\overset{\frown}{M_1P}$ или $\Delta\xi = -\left(a_0^{-\frac{2}{\varkappa+1}} a^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\right)_{M_2} \Delta t$, если двигаться по $\overset{\frown}{M_2P}$, причём первый раз $\Delta t = t_P - t_{M_1}$, а во второй раз $\Delta t = t_P - t_{M_2}$.

Переходя к конкретным задачам, остановимся сперва на одном важном частном случае, сразу же допускающем сведение задачи к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пусть движение

наше таково, что в плоскости (x, t) существует одна характеристика Λ, во всех точках которой как v_x, так и a сохраняют постоянное значение. Эта характеристика Λ будет тогда прямой линией [вследствие (33.8) вдоль неё будет $dx/dt = \text{const.}$]; пусть для конкретности Λ есть характеристика первого семейства. Рассмотрим теперь характеристики второго семейства: L_1, L_2, ... Пусть они пересекают Λ в точках M_1, M_2, ... соответственно:

вдоль линии L_1 будет, по (35.2),

$$v_x - \frac{2}{\varkappa - 1} a = 2\mu_1;$$

вдоль L_2:

$$v_x - \frac{2}{\varkappa - 1} a = 2\mu_2$$

и т. д. Очевидно, что μ_1 можно найти из условия, что L_1 проходит через M_1:

$$(v_x)_{M_1} - \frac{2}{\varkappa - 1} (a)_{M_1} = 2\mu_1,$$

также μ_2 найдётся по формуле

$$(v_x)_{M_2} - \frac{2}{\varkappa - 1} (a)_{M_2} = 2\mu_2$$

и т. д. Но, вследствие предположенного, $(v_x)_{M_1} = (v_x)_{M_2} = \ldots$; $(a)_{M_1} = (a)_{M_2} = \ldots$, значит, будет $\mu_1 = \mu_2 = \ldots$, т. е. не только вдоль каждой характеристики, но и во всей плоскости будет выполняться соотношение

$$v_x - \frac{2}{\varkappa - 1} a = \text{const.} = v_{x_1} - \frac{2}{\varkappa - 1} a_1, \tag{35.3}$$

где v_{x_1} и a_1 суть постоянные значения v_x и a на Λ. Но тогда уравнение (33.4) в соединении с (30.3) даст:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \left[\frac{\varkappa + 1}{2}(v_x - v_{x_1}) + v_{x_1} + a_1\right] \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \tag{35.4}$$

Таким образом, задача сводится к одному уравнению в частных производных первого порядка, т. е. к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Заметим ещё, что в этом случае не только характеристика Λ, но и вообще все характеристики первого семейства будут прямыми. В самом деле вдоль каждой такой характеристики будет $v_x + [2/(\varkappa - 1)]\, a = 2\lambda$ (на каждой своё λ), но, кроме того, повсюду выполняется (35.3); таким образом, вдоль каждой характеристики первого семейства v_x и a будут связаны двумя алгебраическими соотношениями, т. е. будут постоянны. Отсюда, вследствие (33.8), следует прямолинейность характеристик первого семейства. Разумеется, что v_x и a будут, сохраняясь на каждой характеристике первого се-

мейства, меняться с переходом от одной характеристики первого семейства к другой, так что характеристики второго семейства будут кривыми [в плоскости (x, t)].

Подобного рода картина будет всегда иметь место при распространении движения в покоящейся и обладающей постоянным давлением и температурой среде, заключённой в неограниченный цилиндр (прямолинейность движений). В самом деле, постоянство давления и температуры означает постоянство ϑ и скорости звука (обозначим последнюю через a_0); условие покоя даст $v_x = 0$, таким образом, $dx/dt = \pm a_0 = \text{const}$., $x = \pm a_0 t + \text{const}$., и мы имеем прямолинейные характеристики в плоскости (x, t). Если вдоль одной из них движение начнёт переходить в другую форму, то мы сможем заключить, что в этом новом движении все характеристики одного какого-то семейства будут прямыми.

Пусть в неограниченном цилиндре движется по заданному закону

$$x = f(t)$$

поршень. Предположим, что газ в момент $t = 0$ был в покое и обладал всюду одной и той же энтропией ϑ и скоростью звука a_0. Пусть в начальный момент скорость поршня равна

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=0} = 0,$$

а затем монотонно убывает. Найдём движение, которое возникнет при этом в газе «вправо» (т. е. в направлении положительной оси x) от поршня. Пусть $x_0 = OA$ (рис. 138) есть расстояние поршня от начала координат в начальный момент. Все точки оси x, лежащие вправо от A (точки, лежащие влево от A, нас совершенно не интересуют — мы изучаем лишь движение газа вправо от A), имеют одно и то же значение скорости:

$$v_x = 0$$

и одно и то же a:

$$a = a_0$$

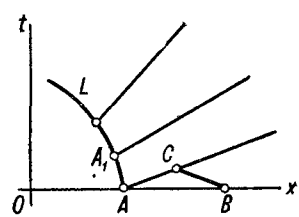

Рис. 138.

(как точки при $t = 0$). Возьмём какую угодно точку B вправо от A на оси x и представим себе, что мы провели из A характеристику первого семейства, а из B — характеристику второго семейства и что эти характеристики встретились в точке C. Но тогда, применяя операцию α, убеждаемся в том, что скорости в C совпадают со скоростями в A (или в B); в самом деле, и A и B представляются в плоскости (v_x, a) одной и той же точкой A' (рис. 139), — значит, и характеристики типа $\overset{\frown}{M_1'P'}$ и $\overset{\frown}{M_2'P'}$ из операции α пересекутся в этой

самой точке A' (это будут просто характеристики, выходящие из этой точки). Так как B (и, значит, C) произвольны, то на всей характеристике, выходящей из A, будем иметь одни и те же значения скоростей: $v_x = 0$, $a = a_0$, т. е. мы имеем целую прямолинейную характеристику первого семейства:

$$x - x_0 = a_0 t.$$

Это есть та характеристика, вдоль которой покой будет переходить в движение. Мы уже знаем, что в плоскости (v_x, a) мы будем при этом находиться на одной и той же прямой

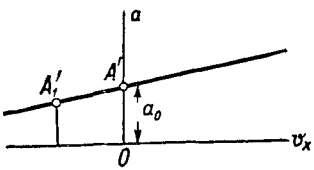

Рис. 139.

$$v_x - \frac{2}{\varkappa - 1} a = -\frac{2}{\varkappa - 1} a_0. \quad (35.5)$$

Нанесём в плоскости (x, t) закон движения поршня — пусть это будет линия L. Возьмём произвольную точку A этой линии и постараемся найти в ней v_x и a. Значение v_x находится сразу — скорость частиц газа, прилегающих к поршню, равна скорости поршня — нам надо только найти в точке A_1 тангенс наклона нашей кривой к оси t: dx/dt. Чтобы найти a в точке A_1, вспомним, что v_x и a должны быть связаны соотношением (35.5). Достаточно на прямолинейной характеристике второго семейства, идущей через A', найти ординату той точки A'_1, абсцисса которой равна скорости поршня в A_1. Определив v_x и a в A_1, можем построить не только направление характеристики первого семейства, идущей через A_1, но и всю характеристику (ибо мы знаем, что она прямолинейна) по формуле

$$x - x_{A_1} = [(v_x)_{A_1} + a_{A_1}](t - t_{A_1}).$$

Вдоль всей этой прямой будет $v_x = (v_x)_{A_1}$ и $a = a_{A_1}$. Заметим, что, вследствие предположения о неположительности производной f', число $(v_x)_{A_1} + a_{A_1}$ будет меньше, чем $(v_x)_A + a_A = 0 + a_0$ ($a_{A_1} < a_0$ вследствие наклона характеристики второго семейства, идущей через A'); следовательно, характеристика первого семейства, проходящая через A_1, нигде не пересечётся с характеристикой первого семейства, идущей из A. Подобные рассуждения можно применить ко всем точкам линии L и можно построить расходящийся веер прямых характеристик первого семейства с известными на них скоростями. Так мы узнаём скорости во свех точках плоскости (x, t), т. е. скорости в любой точке вдоль цилиндра и в любой момент времени. Мы можем изобразить затем в плоскости (x, t) законы движения всех частиц, т. е. провести линии $\xi = \xi(x, t) = \text{const}$. В самом деле, на оси x достаточно положить $\xi = x$ (начальные координаты); то же

самое можно сделать на характеристике первого семейства, выходящей из A. Затем, пользуясь формулами

$$\frac{d\xi}{dt} = \pm a_0^{-\frac{2}{\varkappa-1}} a^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}},$$

мы можем найти ξ во всех точках плоскости. Останется только соединить линиями точки, в которых ξ одинаковы. Задача о движении будет решена.

Несколько слов об аналитическом решении задачи. Для интегрирования (35.4) мы должны написать в нашем случае:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\frac{\varkappa+1}{2} v_x + a_0},$$

значит,

$$v_x = F\left[x - \left(\frac{\varkappa+1}{2} v_x + a_0\right) t\right], \tag{35.6}$$

где F — совершенно произвольная функция своего аргумента. Мы должны подобрать эту функцию так, чтобы на поршне, движущемся по закону $x = f(t)$, имелись данные скорости $v_x = df/dt$. Это значит, что надо положить для определения F:

$$f' = \frac{df}{dt} = F\left[f(t) - \left(\frac{\varkappa+1}{2} f' + a_0\right) t\right].$$

Рассмотрим пример. Пусть поршень движется равномерно замедленно так, что

$$x = f(t) = -\frac{nt^2}{2} \qquad (n > 0).$$

Тогда должно быть

$$-nt = F\left(-\frac{nt^2}{2} + \frac{\varkappa+1}{2} nt^2 - a_0 t\right);$$

обозначая $-\frac{nt^2}{2} + \frac{\varkappa+1}{2} nt^2 - a_0 t = \eta$, получим:

$$t = \frac{1}{\varkappa n}\left(a_0 - \sqrt{a_0^2 + 2\varkappa n \eta}\right).$$

Итак,

$$F(\eta) = -\frac{1}{\varkappa}\left(a_0 - \sqrt{a_0^2 + 2\varkappa n \eta}\right),$$

т. е.

$$v_x = -\frac{1}{\varkappa}\left\{a_0 - \sqrt{a_0^2 + 2\varkappa n\left[x - \left(\frac{\varkappa+1}{2} v_x + a_0\right) t\right]}\right\}.$$

Решая это уравнение относительно v_x, найдём окончательно:

$$v_x = -\frac{1}{\varkappa}\left\{n\frac{(\varkappa+1)}{2} t + a_0 - \sqrt{\left[n\frac{(\varkappa+1)}{2} t + a_0\right]^2 + 2n\varkappa(x - a_0 t)}\right\}.$$

Последняя формула годится лишь до тех пор, пока скорости поршня не станут слишком велики. Именно, по (35.5) a станет отрицательно, если

$$v_x < 0 \text{ и } |v_x| > \frac{2}{\varkappa - 1} a_0.$$

Частицы, прилегающие к поверхности поршня, имеют скорость поршня; значит, если принять для поршня закон $x = -\frac{nt^2}{2}$, то для моментов $t \geqslant \frac{2}{\varkappa - 1} \frac{a_0}{n}$ формула будет неприменима. Позади поршня образуется вакуум.

Обратимся теперь к более трудному случаю. Попробуем изучить движение, в которое приходит газ, находящийся между перемещающимся по заданному закону поршнем и стенкой. Пусть в начальный момент газ находился в покое ($v_x = 0$) и имел постоянное $a = a_0$, а поршень движется по закону $x = f(t)$, причём в начальный момент $f' = 0$, $f(0) = x_0$. Пусть стенка имеет абсциссу x_1. В плоскости (x, t) изобразим закон движения поршня L и проведём «линию стенки» L_1, уравнением которой будет $x = x_1$. Проведём через точку $A(x = x_0,\ t = 0)$ прямую характеристику первого семейства AB_1 до пересечения со стенкой в точке B_1; получим

$$x - x_0 = a_0 t.$$

Треугольник AB_1A_1 будет отвечать покою. В области между L,

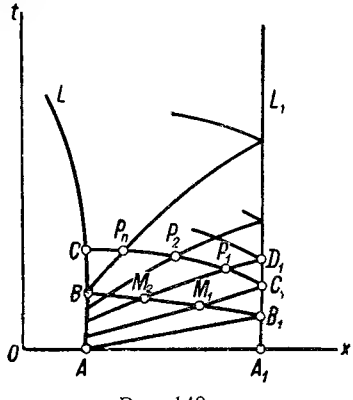

Рис. 140.

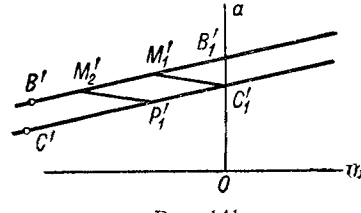

Рис. 141.

прямой AB_1 и характеристикой (криволинейной) второго семейства, проходящей через B_1, будет движение уже разобранного типа с прямолинейными характеристиками первого семейства. Нанесём на характеристике $\overset{\frown}{B_1B}$ густой ряд точек B_1, M_1, M_2, ..., B (рис. 140). В плоскости (v_x, a) этим точкам будут отвечать точки B_1', M_1', M_2', ... прямолинейной характеристики второго семейства, проходящей через точку $(0, a_0)$ (в точке B_1 ещё будет $v_x = 0$, $a = a_0$) (рис. 141). Чтобы найти скорости в точке C_1 пересечения с L_1 характеристики первого семейства, проходящей через M_1, обращаемся к операции β.

На L_1 всюду $v_x = 0$, значит, в плоскости (v_x, a) нам придётся от M_1 перемещаться по прямой характеристике первого семейства до встречи в C_1' с осью a. Определив таким образом скорость в точке C_1, применим теперь к точкам M_2 и C_1 операцию α и определим скорости P_1' на пересечении P_1 характеристик $\widetilde{M_2P_1}$ и $\widetilde{C_1P_1}$ [точка P_1' найдётся в плоскости (v_x, a) на пересечении характеристик, идущих из M_2' и C_2' соответственно]. Дойдя до точки P_n (рис. 140), применим к P_n и к линии L операцию β и найдём скорость в точке C и т. д. Легко видеть, что теперь оба семейства характеристик в (x, t) будут криволинейными.

Изложенный здесь метод графического решения задачи очень прост и позволяет произвести вычисления с любой точностью. Он аналогичен тому способу решения плоской стационарной задачи при помощи характеристик, который мы подробно излагали в разделе Б этой главы. Однако, в то время как в главе о плоских движениях мы не имели общих решений, кроме как в случае наличия прямолинейных характеристик, здесь в одноразмерной стационарной задаче можно написать точные решения и в общем случае. Правда, это относится лишь к таким газам, для которых $\varkappa$ удовлетворяет определённому соотношению (см. ниже), но, в частности, это относится к случаю, когда $\varkappa = 1{,}4$. На это обратил внимание ещё Адамар [1]). Чтобы показать это, возьмём уравнения (33.6) (при $\vartheta = \text{const.}$) и (33.3) и примем в качестве независимых переменных, вместо x и t, величины v_x и a. Используя наши характеристики, мы можем очень легко выполнить это преобразование следующим образом. Для удобства письма обозначим v_x через u:

$$v_x = u.$$

Обозначим, затем, как и прежде,

$$\left.\begin{aligned} u + \frac{2}{\varkappa - 1} a &= 2\lambda, \\ u - \frac{2}{\varkappa - 1} a &= 2\mu \end{aligned}\right\} \tag{35.7}$$

и введём в качестве независимых переменных λ и μ. Очевидно, что будет $\lambda = \text{const.}$ вдоль характеристик первого семейства и $\mu = \text{const.}$ вдоль характеристик второго семейства.

Мы можем всегда вернуться к переменным u и a по формулам

$$\left.\begin{aligned} u &= \lambda + \mu, \\ a &= \frac{\varkappa - 1}{2} (\lambda - \mu). \end{aligned}\right\} \tag{35.8}$$

[1]) Hadamard J., Leçons sur la propagation des ondes, 1903.

Так как вдоль характеристик первого семейства

$$dx = (u + a)\,dt,$$

то мы можем написать:

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = (u + a)\frac{\partial t}{\partial \mu}. \tag{35.9}$$

Вдоль второго семейства характеристик

$$dx = (u - a)\,dt,$$

и мы можем написать

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = (u - a)\frac{\partial t}{\partial \lambda}. \tag{35.10}$$

Остаётся вставить в (35.9) и (35.10) значения u и a из (35.8), и мы получим систему уравнений для определения x и t в функциях от λ и μ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \mu} &= \left(\frac{\varkappa+1}{2}\lambda + \frac{3-\varkappa}{2}\mu\right)\frac{\partial t}{\partial \mu}, \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \left(\frac{3-\varkappa}{2}\lambda + \frac{\varkappa+1}{2}\mu\right)\frac{\partial t}{\partial \lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{35.11}$$

Исключая x, придём к уравнению

$$(\lambda - \mu)\frac{\partial^2 t}{\partial \lambda\,\partial \mu} + \frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\left(\frac{\partial t}{\partial \mu} - \frac{\partial t}{\partial \lambda}\right) = 0.$$

Если

$$\frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} = m,$$

где m — целое число, то мы получим уравнение Дарбу, которое интегрируется в общем виде. В частности, при $\varkappa = 1{,}4$ мы будем иметь $m = 3$, так что наше уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \lambda\,\partial \mu} + \frac{3}{\lambda - \mu}\left(\frac{\partial t}{\partial \mu} - \frac{\partial t}{\partial \lambda}\right) = 0.$$

Уравнение это имеет общим решением

$$t = \frac{\partial^4}{\partial \lambda^2\,\partial \mu^2}\,\frac{\Lambda(\lambda) - \mathrm{M}(\mu)}{\lambda - \mu}. \tag{35.12}$$

После того как t определено, x может быть сразу найдено по (35.11). Это будет

$$x = (\lambda + \mu)t - \frac{2}{5}\frac{\partial^2}{\partial \lambda\,\partial \mu}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \mu}\right)\frac{\Lambda - \mathrm{M}}{\lambda - \mu}\right]. \tag{35.13}$$

Произвольные функции Λ и M, входящие в (35.12), должны определяться из краевых условий, аналогично тому, как это делается в классической задаче о струне.

§ 36. Возникновение и перемещение сильного разрыва. Предположим теперь, что в покоящейся среде, обладающей всюду постоянной энтропией ϑ и постоянной скоростью звука a_0 и заполняющей бесконечный цилиндр, движется поршень по закону $x = f(t)$. Пусть, как и прежде,

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=0} = 0;$$

но в то время, как раньше мы считали, что f' — монотонно убывающая функция t, предположим теперь, что $f''(t)$ может оказаться положительной. Для большей ясности предположим просто, что всегда будет $f''(t) > 0$ (рис. 142). В этой задаче, так же как и в соответствующей задаче предыдущего параграфа, характеристики первого семейства будут прямые, и движение может быть определено и графически и аналитически. Однако в то время как характеристики первого семейства при $f'' < 0$ становились, по мере продвижения вдоль линии L, начиная от точки $x_0 = f(0)$, всё круче по отношению к оси x, здесь характеристики будут становиться всё положе. В самом деле, точка A_1, например, будет иметь $v_x > 0$ и $a > a_0$, значит,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{A_1} = (v_x)_{A_1} + a_{A_1} > 0 + a_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_A,$$

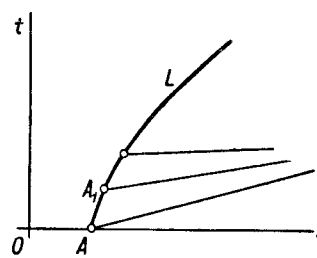

Рис. 142.

что и доказывает наше утверждение. Но тогда прямолинейные характеристики первого семейства, исходящие из разных точек L, начнут, рано или поздно, пересекаться. Наступит явление сильного разрыва.

Нетрудно подсчитать расстояние от начального положения поршня до «первой» точки поверхности разрыва и момент возникновения такового. Для этого достаточно найти предел, к которому будет стремиться место пересечения характеристики, идущей из A (рис. 142), и характеристики, идущей из A_1, когда A_1 стремится к A.

Для первой из этих характеристик имеем:

$$x - x_0 = a_0 t.$$

Для второй

$$x - x_0 - \Delta x_0 = [a(x_0 + \Delta x_0, \Delta t) + v_x(x_0 + \Delta x_0, \Delta t)](t - \Delta t),$$

где Δx_0 есть разность абсцисс A_1 и A, а Δt — разность ординат в этих точках. Отсюда найдём для точки пересечения этих прямых:

$$t = \frac{-\Delta x_0 + [a(x_0 + \Delta x_0, \Delta t) + v_x(x_0 + \Delta x_0, \Delta t)]\,\Delta t}{v_x + a(x_0 + \Delta x_0, \Delta t) - a_0}, \quad x = x_0 + a_0 t.$$

Но

$$\Delta x_0 = f'(x_0)\,\Delta t,$$

$$v_x + a - a_0 = \frac{\varkappa+1}{2}\,v_x(x_0 + \Delta x_0,\ \Delta t) \approx \frac{\varkappa+1}{2}\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_0 \Delta t \quad [(f')_0 = 0],$$

и мы получим в пределе для момента T возникновения разрыва

$$T = \frac{2a_0}{(\varkappa+1)\,f_0''}\ ^{1}),$$

а для положения X:

$$X = \frac{2}{\varkappa+1}\,\frac{a_0^2}{f_0''} + x_0.$$

Появившийся таким образом разрыв усложняет картину явления в двух направлениях. Во-первых, он заставляет искривляться все характеристики первого семейства [после того, как они пересекут характеристику второго семейства, идущую через точку (X, T)], во-вторых, и это существеннее, благодаря тому, что скорость N перемещения поверхности разрыва будет, вообще говоря, переменной, поверхность будет оставлять позади себя область переменной энтропии. Поэтому формулы § 35 и прямолинейные характеристики в плоскости (v_x, a) неприменимы, и нам надо обратиться непосредственно к формулам (33.11), (33.12), (33.13) из § 33.

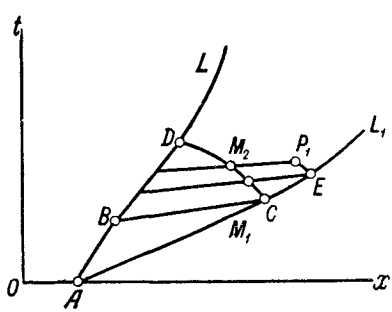

Рис. 143.

Покажем, как решается графически задача о движении разрыва, если разрыв возникает уже при $t = 0$ и у самого поршня. Это будет в случае, если поршень в начальный момент получает сразу скорость v_1, отличную от нуля. Пусть некоторое время поршень движется с этой постоянной скоростью, а затем скорость поршня начинает непрерывным образом меняться по произвольному закону. Изобразим, как всегда, закон движения поршня L в плоскости (x, t) (рис. 143). Обращаясь к плоскости (v_x, a), найдём на кривой четвёртого порядка (34.9) значение $a = a_1$, отвечающее значению $v_x = v_1$ (C' на рис. 144). По формуле (34.8) мы можем найти теперь

[1]) Мы предполагали при выводе, что «первая» точка разрыва лежит на «первой» характеристике. Условие это может и не выполняться. В общем случае первую точку надо искать на огибающей системы прямолинейных характеристик.

N — скорость перемещения поверхности разрыва:

$$N = \frac{v_1}{2} + \frac{a_1^2 - a_0^2}{\varkappa - 1}\frac{1}{v_1}.$$

Отрезок $\overline{AC}$ прямой

$$x = x_A + Nt$$

будет представлять отрезок линии L_1, изображающей перемещение поверхности разрыва около точки A. Пусть B есть точка L, после которой L начинает искривляться; проведём прямую характеристику первого семейства $\overline{BC}$ до пересечения с проведённым уже отрезком $\overline{AC}$. В прямолинейном треугольнике ABC движение происходит со скоростью $v_x = v_1 = \text{const}$. В области, ограниченной прямой $\overline{BC}$, криволинейным отрезком BD линии L и криволинейной характеристикой $\overset{\smile}{CD}$

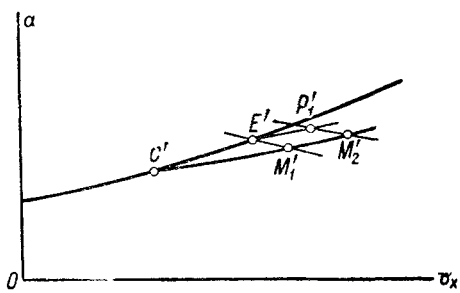

Рис. 144.

второго семейства, движение найдётся так же, как это было сделано в предыдущем параграфе (прямолинейные характеристики первого семейства и т. д.). На линии $\overline{CD}$ нам будут, таким образом, известны v_x, a и ξ. Нанесём на CD густой ряд точек: M_1, M_2, ...; из точки M_1 проведём характеристику первого семейства (элемент её) $\overline{M_1E}$, используя формулу

$$\frac{dx}{dt} = v_x + a$$

до пересечения с продолжением $\overline{CE}$ прямой $\overline{AC}$. Чтобы найти скорость в точке E, проведём из точки M_1' (рис. 144) [в плоскости (v_x, a)], отвечающей точке M_1 плоскости (x, t), прямую характеристику первого семейства до пересечения в E' с нашей кривой четвёртого порядка. Определив координаты E', т. е. найдя значения v_x и a в точке E, можем затем построить новую скорость поверхности разрыва в E по формуле (34.8) и провести из точки E новый, не являющийся продолжением прямой $\overline{CE}$ элемент линии разрыва. Построим теперь элемент характеристики второго семейства,

идущий из M_2 по формуле

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{M_2} = (v_x)_{M_2} + a_{M_2},$$

и элемент характеристики второго семейства, выходящий из E, по формуле

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_E = (v_x)_E - a_E.$$

Было бы ошибочно искать скорости в точке P_1 пересечения этих характеристик как координаты точки пересечения в плоскости (v_x, a) прямых:

$$v_x - (v_x)_E = \frac{2}{\varkappa - 1}(a - a_E), \quad v_x - (v_x)_{M_2} = -\frac{2}{\varkappa - 1}(a - a_{M_2});$$

в самом деле, уже начиная от точки C, линия разрыва начнёт искривляться, т. е. N начнёт меняться со временем, а это, как мы знаем, приведёт к тому, что разные точки получат разную энтропию; нельзя будет больше считать $d\vartheta/d\xi = 0$, а следовательно, нельзя пользоваться соотношениями (35.1), (35.2). Мы должны обратиться к общим формулам (33.11), (33.12) и искать P_1' на пересечении прямых

$$v_x - (v_x)_{M_2} + \frac{2}{\varkappa - 1}(a - a_{M_2}) = \frac{a_{M_2}}{\varkappa - 1} \ln \frac{\vartheta_{P_1}}{\vartheta_{M_2}},$$

$$v_x - (v_x)_E - \frac{2}{\varkappa - 1}(a - a_E) = -\frac{a_E}{\varkappa - 1} \ln \frac{\vartheta_{P_1}}{\vartheta_E}.$$

Значение ϑ_E находится по формулам (34.6), (34,7), ибо N в E мы уже знаем. Значение ϑ_{M_2} будет тем же, что и постоянное для всего криволинейного треугольника ACD значение ϑ. Чтобы найти ϑ_{P_1}, найдём сперва, чему будет равно ξ в точке P_1; по (33.12)

$$\Delta\xi = \xi_{P_1} - \xi_E = -\left(a_0^{-\frac{2}{\varkappa-1}} a^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\right)_E (t_{P_1} - t_E),$$

причём в качестве «исходной» скорости a_0 в точке E можно принять просто значение a_E, что же касается ξ_E, то это будет просто координата x_E (закон движения представляется для всех точек между линией AL_1 и осью AX прямыми, параллельными оси t; линии закона движения разрыва не терпят, а лишь изламываются при переходе через AL_1). Зная ξ_{P_1} и вспоминая, что ϑ зависит лишь от ξ, мы можем затем найти ϑ_{P_1} простым интерполированием (по ϑ_E и ϑ_{M_2}).

§ 37. Односторонний взрыв. Плоский, цилиндрический и сферический взрыв без противодавления. Сферический взрыв с противодавлением. Мы уже упомянули в § 2 этой главы, что если условия (2.15), (2.16) и (2.17) не выполнены, то возникает взрыв.

На примере одноразмерных движений покажем, как это явление будет протекать. Пусть в начальный момент ($t = 0$) по обе стороны от плоскости $x = 0$ заданы значения гидродинамических элементов v_x, p, ρ; для простоты предположим, что для $x < 0$ в начальный момент всюду:

$$v_x = \text{const.} = v_1; \quad p = \text{const.} = p_1; \quad \rho = \text{const.} = \rho_1,$$

и для $x > 0$:

$$v_x = \text{const.} = v_2; \quad p = \text{const.} = p_2; \quad \rho = \text{const.} = \rho_2,$$

и эта шестёрка чисел совершенно произвольна (p и ρ лишь положительны), т. е. их значения не удовлетворяют уравнениям (2.15), (2.16) и (2.17) ни при каком N [например, пусть $v_1 = v_2 = 0$, а $p_2 \neq p_1$ — тогда (2.15) не выполняется]. Сразу же от того места ($x = 0$), где был в начальный момент разрыв, побегут три поверхности разрыва, одна из них — крайняя «слева» — будет распространяться по среде имевшей в начальный момент $v_x = v_1, \ldots$, другая — крайняя «справа» — будет распространяться по среде, имевшей при $t = 0$ $v_x = v_2, \ldots$ Наконец, средняя будет поверхностью стационарного разрыва и она, перемещаясь в пространстве, не будет распространяться по частицам, отделяя всегда газ, обладавший значениями элементов v_2, p_2, ρ_2 от газа, имевшего значения элементов v_1, p_1, ρ_1. В момент времени, бесконечно близкий к начальному, рассмотрим все четыре области, таким образом образовавшиеся. Назовём через v_1', p_1', ρ_1' значения гидродинамических элементов между крайней «слева» и средней поверхностью разрыва; пусть v_2', p_2', ρ_2' — значения элементов между средней поверхностью разрыва и крайним справа разрывом. Тогда, вследствие стационарности средней поверхности разрыва, давление p' на этой поверхности разрыва не терпит, так что

$$p_1' = p_2' = p';$$

при этом будет

$$\vartheta_1'\rho_1' = \vartheta_2'\rho_2' \tag{37.1}$$

(если $\varkappa$ одинаково в обеих средах). Кроме того, так как $\theta = 0$, то $v_2' = v_1'$; пусть это будет v':

$$v' = v_1' = v_2'.$$

Н. Е. Кочин показал, что могут быть четыре случая: 1) обе крайние поверхности суть поверхности сильного разрыва (разрыв давлений); 2) обе крайние поверхности разрыва суть поверхности слабого разрыва (характеристики); 3) правая крайняя поверхность есть характеристика, левая крайняя — сильный разрыв; 4) левая крайняя поверхность — характеристика, правая крайняя — сильный разрыв.

В качестве примера рассмотрим подробнее, что произойдёт, если:

$$v_1 = v_2 = 0,$$

причём

$$p_1 > p_2;$$

будем искать решение задачи, как в случае 4.

Крайняя справа (рис. 145) поверхность разрыва будет перемещаться в среде с величинами p_2, ρ_2, ϑ_2 с постоянной, подлежащей

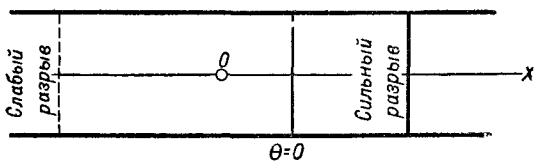

Рис. 145.

определению скоростью N (рис. 146, линия $\overline{OA}$); средняя поверхность будет перемещаться с постоянной скоростью v', также заранее неизвестной (линия OB); наконец, слабый разрыв будет бежать справа налево с заранее известной скоростью $a_1 = \sqrt{\frac{\varkappa p_1}{\rho_1}}$ (линия $\overline{OC}$). Между этой последней поверхностью и поверхностью стационарного разрыва (средней) будет осуществляться непрерывный переход скорости v_x движения жидкости от значения 0 до значения v', причём, так как крайняя характеристика прямолинейна, то и все характеристики, выходящие из точки O, будут прямолинейны (пучок прямых, обозначенных пунктиром). Нам остаётся только связать семью соотношениями семь постоянных величин:

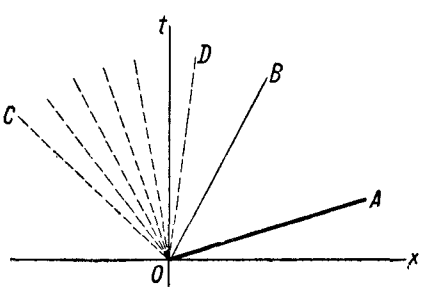

Рис. 146.

$$\rho_2', \vartheta_2', N, p', v', \rho_1', \vartheta_1'.$$

Прежде всего, так как при переходе через поверхность слабого разрыва величина ϑ измениться не может, можно считать, что

$$\vartheta_1' = \vartheta_1, \tag{37.2}$$

тогда по (37.1) имеем:

$$\vartheta_1\rho_1' = \vartheta_2'\rho_2'. \tag{37.3}$$

Далее, так как характеристика второго семейства $\overline{OC}$ прямолинейна и $\vartheta_1 = \text{const}$., то мы можем считать, что соотношение

$$v_x + \frac{2}{\varkappa - 1} a = \text{const}.$$

выполняется не только на *каждой характеристике* первого семейства в углу COB, но и во всём этом углу. В частности, для линии $\overline{OB}$ плоскости (x, t):

$$v' + \frac{2}{\varkappa - 1} a_1' = \frac{2}{\varkappa - 1} a_1, \tag{37.4}$$

где

$$a_1'^2 = \varkappa \frac{p'}{\rho_1'}, \quad a_1^2 = \varkappa \frac{p_1}{\rho_1},$$

причём, по определению ϑ,

$$p' = \vartheta_1^{\varkappa} \rho_1'^{\varkappa}. \tag{37.5}$$

Наконец, мы имеем условия на линии разрыва (OA). Здесь

$$v_{x+} = 0, \quad \rho_+ = \rho_2, \quad p_+ = p_2, \quad \theta_+ = N - v_{x+} = N,$$
$$v_{x-} = v', \quad \rho_- = \rho_2', \quad p_- = p', \quad \theta_- = N - v_{x-} = N - v',$$

и по (34.2)

$$-\rho_2 N v' = p_2 - p', \tag{37.6}$$

$$\rho_2 N = \rho_2' (N - v'), \tag{37.7}$$

$$\frac{p_2}{p'} = \frac{(\varkappa + 1)\rho_2 - (\varkappa - 1)\rho_2'}{(\varkappa + 1)\rho_2' - (\varkappa - 1)\rho_2}. \tag{37.8}$$

Уравнения (37.2), (37.3), ..., (37.8) и позволят нам определить семь неизвестных величин. Чтобы найти движение внутри угла COB плоскости (x, t), нам надо написать вместо (33.4), по аналогии с уравнением (35.4):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(\frac{\varkappa + 1}{2} v_x - a_1\right) \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

и искать решение этого уравнения, зависящее от отношения x/t. Это будет

$$v_x = \frac{2a_1}{\varkappa + 1} + \frac{2}{\varkappa + 1} \frac{x}{t}.$$

Изменение скорости от 0 до v' происходит в $\angle COD$. Именно, на линии $\overline{OC}$ имеем $x/t = -a_1$, т. е. $v_x = 0$, что же касается наклона линии $\overline{OD}$, то он найдётся из условия

$$\frac{x}{t} = -a_1 + \frac{\varkappa + 1}{2} v',$$

после того как v' уже известно. Внутри $\angle DOB$ имеем постоянную скорость v', постоянное давление p' и постоянную плотность ρ_1'.

Для того чтобы найти v', p' и ρ', заметим прежде всего, что все эти величины в отрицательной области могут быть выражены через p_2, ρ_2 и v_2 и через N. Действительно, по (34.5) имеем

$$v' = \frac{2}{\varkappa+1} N \left(1 - \frac{a_2^2}{N^2}\right), \tag{37.9}$$

тогда по (37.6) и (37.9) имеем

$$p' = \frac{2}{\varkappa+1} \rho_2 N^2 \left(1 - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa} \frac{a_2^2}{N^2}\right), \tag{37.10}$$

а по (37.7) и (37.9) можем написать

$$\rho' = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} \rho_2 \left(1 + \frac{2}{\varkappa-1} \frac{a_2^2}{N^2}\right)^{-1}. \tag{37.11}$$

Таким образом, остаётся только найти N. Для того чтобы это сделать, вспомним сперва, что v' и a_1' связаны соотношением (37.4). С другой стороны,

$$a_1'^2 = \varkappa \vartheta_1' p'^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \varkappa \vartheta_1 p'^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}},$$

так что мы можем написать по (37.4):

$$\varkappa\, \vartheta_1\, p'^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \left(a_1 - \frac{\varkappa-1}{2} v'\right)^2.$$

Остаётся только вставить в это равенство выражения для v' и p' из (37.9) и (37.10), и мы получим уравнение для определения неизвестной величины N:

$$\left[\frac{a_1}{a_2} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} \frac{N}{a_2} \left(1 - \frac{a_2^2}{N^2}\right)\right]^2 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \left[\frac{2\varkappa}{\varkappa+1} \left(\frac{N}{a_2}\right)^2 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right]^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}. \tag{37.12}$$

Отметим ещё формулу, по которой можно вычислить ϑ_2'. Комбинируя (37.10) и (37.11), получим

$$\frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2} = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} \left(1 + \frac{2}{\varkappa+1} \frac{a_2^2}{N^2}\right) \left(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1} \frac{N^2}{a_2^2} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}. \tag{37.13}$$

Поверхность сильного разрыва бежит со скоростью N, оставляя за собой область со значениями потенциальной температуры ϑ_2' постоянной, но отличной от ϑ_2. Позади поверхности сильного разрыва движется со скоростью v' поверхность стационарного разрыва, после прохождения которой ϑ вновь меняется скачком от значения ϑ_2' до

значения ϑ_1. Простота задачи, только что нами рассмотренной, проистекает из того, что среду мы считали безграничной. Рассмотрим ещё случай, когда в начальный момент будет $p = p_1$, $\rho = \rho_1$, $v = 0$ не для всей бесконечной полупрямой ($x < 0$), а только на отрезке:

$$-L \leqslant x \leqslant L.$$

На всей остальной прямой пусть будет вначале $p = p_2$, $\rho = \rho_2$, $v = 0$, причём, как и прежде, $p_1 > p_2$.

Возникают две поверхности сильного разрыва, бегущие одна вправо, другая влево (рис. 147, линии O_1A, $O_1'A'$; сзади них движутся поверхности стационарного разрыва $(O_1B,\ O_1'B')$. Характеристики 2-го семейства (1-го семейства), выходящие из $O_1(O_1')$, — это пучок прямых. На характеристиках O_1C и $O_1'C$ (так же, как и во всём треугольнике O_1CO_1'), всюду будет $a = a_1$, $v = 0$. Внутри криволинейного треугольника CBO_1, сторонами которого будут криволинейная характеристика 1-го семейства $\overset{\smile}{CB}$, прямолинейная характеристика 2-го семейства $\overline{O_1C}$ и закон движения стационарного разрыва (прямая) $\overline{O_1B}$, движение будет происходить в точности по законам, описанным выше для случая бесконечной среды. Аналогичное можно сказать про треугольник $CB'O_1'$.

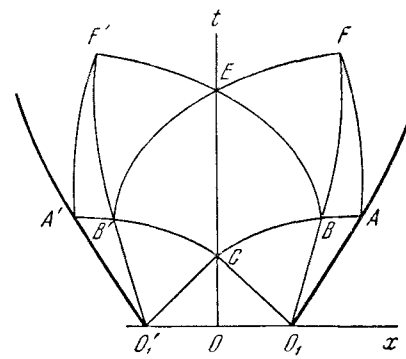

Рис. 147.

Зная движение на криволинейных отрезках $\overset{\smile}{CB}$, $\overset{\smile}{CB'}$ характеристик обоих семейств, выходящих из C, мы можем теперь найти движение в криволинейном четырёхугольнике $CBEB'$. Движение на $\overset{\smile}{CB}$ и $\overset{\smile}{CB'}$ может быть точно найдено (с помощью формул этого параграфа). В частности, легко получается, что:

на дуге $\overset{\smile}{CB}$ характеристики 1-го семейства имеем

$$t = \frac{L}{a_1}\left(\frac{1}{2} - \frac{\varkappa - 1}{2}\frac{\mu}{a_1}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}, \quad \lambda = \frac{a_1}{\varkappa - 1} = \text{const.},$$

а на дуге $\overset{\smile}{CB_1}$ характеристики 2-го семейства будет

$$t = \frac{L}{a_1}\left(\frac{3}{2} - \frac{\varkappa - 1}{2}\frac{\lambda}{a_1}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}, \quad \mu = -\frac{a_1}{\varkappa - 1} = \text{const.},$$

причём λ и μ определены по (35.7).

Предположим далее, что $\varkappa = 1{,}4$. Тогда мы можем использовать формулы (35.12), чтобы найти $\Lambda(\lambda)$ и $M(\mu)$ по двум условиям, записанным нами на дугах характеристик $\overset{\smile}{CB}$, $\overset{\smile}{CB'}$. Тем самым мы определим движение внутри всего криволинейного четырехугольника $CBEB'$, а значит, в частности, и на характеристиках $\overset{\smile}{BE}$ и $\overset{\smile}{B'E}$. Теперь мы должны перейти к определению движения в четырехугольнике $ABEF$ ($A'B'EF'$). Здесь нам придётся сопрягать решения вдоль заранее неизвестной линии BF ($B'F'$), определяющей закон движения стационарного разрыва. Так как в каждой из областей BAE ($B'A'E$), BFA ($B'F'A'$) величины ϑ ещё остаются постоянными, то мы можем вновь воспользоваться формулами типа (35.12) для каждой из этих трехугольных областей. Начиная от точек $A(A')$, линия, представляющая закон движения ударной волны, начинает искривляться; ϑ_2' становится переменным и точных решений, вообще говоря, не будет. Решение можно вести дальше аналогично тому, как это описано в § 36.

Если устремить L к нулю, мы придём к задаче о плоском взрыве. Замечательное точное решение этой задачи (с меняющейся энтропией) удаётся получить, если краевые условия (37.9), (37.10), (37.11) взять в приближённом, применительно к «сильному взрыву», виде [1]). Именно, при «сильном взрыве» можно пренебречь давлением перед ударной волной по сравнению с давлением за ударной волной. Это исследование взрыва «без противодавления». Пренебрежение это эквивалентно пренебрежению величиной a_2/N по сравнению с единицей. При этом пренебрежении (37.9), (37.10), (37.11) примут вид

$$v' \approx \frac{2}{\varkappa+1} N, \tag{37.14}$$

$$p' \approx \frac{2}{\varkappa+1} \rho_2 N^2. \tag{37.15}$$

$$\rho' \approx \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} \rho_2. \tag{37.16}$$

Конечно, формулы (37.14) – (37.16) годятся лишь для начальной стадии возникновения взрыва; на больших расстояниях от начального положения давления за и перед ударной волной выравниваются; кроме того, формула (37.16) не очень точна, так как она получена путём пренебрежения в (32.11) членом $\frac{2}{\varkappa-1}\left(\frac{a_2}{N}\right)^2 = 5\left(\frac{a_2}{N}\right)^2$ (если $\varkappa = 1{,}4$) по сравнению с единицей.

Однако для первых моментов после начала взрыва можно говорить о большой точности выполнения условия (37.14)—(37.16). Аналитиче-

[1]) Ср. аналогичные приближения в стационарном случае, которые были нами приняты в § 24 при рассмотрении диссоциирующегося газа.

ское решение задачи о взрыве без противодавления было дано впервые Л. И. Седовым (1946) [1]). Изложим решение Седова.

Будем искать автомодельное решение уравнений (33.2), (33.3), (33.4):

$$\vartheta = \left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} \theta(\lambda), \quad a = \frac{x}{t} A(\lambda), \tag{37.17}$$

$$v_x = \frac{x}{t} V(\lambda), \tag{37.18}$$

где λ — безразмерный параметр

$$\lambda = b \frac{t^2}{x^3}, \tag{37.19}$$

так что b — постоянная с размерностью $L^3 t^{-2}$. Мы увидим впоследствии, как эта постоянная выражается через начальную энергию E_0 взрыва и через плотность ρ_2.

Задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно, уравнение (33.2) приведёт к равенству

$$3\lambda\left(V - \frac{2}{3}\right)\frac{d\theta}{d\lambda} - \frac{2}{\varkappa}(V-1)\theta = 0. \tag{37.20}$$

Уравнение (33.3) приведёт к соотношению

$$3\lambda\left(V - \frac{2}{3}\right)\frac{dA}{d\lambda} + \frac{\varkappa-1}{2} 3A\lambda \frac{dV}{d\lambda} + \left(1 - \frac{\varkappa-1}{2}V\right)A = 0. \tag{37.21}$$

Наконец, уравнение (33.4) даёт нам равенство

$$\frac{6}{\varkappa-1}\lambda A\frac{dA}{d\lambda} - \frac{3A^2}{\varkappa-1}\frac{\lambda}{\theta}\frac{d\theta}{d\lambda} + 3\left(V-\frac{2}{3}\right)\lambda\frac{dV}{d\lambda} - \frac{2}{\varkappa}A^2 - V(V-1) = 0 \tag{37.22}$$

или, если исключить θ с помощью (37.20):

$$\frac{6\lambda}{\varkappa-1}A\frac{dA}{d\lambda} + 3\left(V-\frac{2}{3}\right)\lambda\frac{dV}{d\lambda} - \frac{2}{\varkappa}A^2\left[1 + \frac{V-1}{(\varkappa-1)\left(V-\frac{2}{3}\right)}\right] = V(V-1). \tag{37.23}$$

Нам надо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений (37.21) — (37.23) содержащую две искомые функции A и V. По отношению к $dV/d\lambda$ и $dA/d\lambda$ уравнения наши представляют систему двух линейных алгебраических уравнений. Решая эту систему,

[1]) Постановка задачи и численное решение полученной системы уравнений независимо от Седова дано Тейлором (1941, 1947).

найдём

$$3\lambda\frac{dV}{d\lambda}=\frac{V(V-1)\left(V-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3\varkappa}-V\right)A^2}{\left(V-\frac{2}{3}\right)^2-A^2}, \tag{37.24}$$

$$3\lambda\frac{dA}{d\lambda}=A\frac{\left(\frac{\varkappa+1}{2}V-1\right)\left(V-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{\varkappa-1}{2}V(V-1)\left(V-\frac{2}{3}\right)-\left(V-\frac{2\varkappa+1}{3\varkappa}\right)A^2}{\left(V-\frac{2}{3}\right)\left[\left(V-\frac{2}{3}\right)^2-A^2\right]}. \tag{37.25}$$

Если принять в качестве независимой переменной вместо λ функцию V, мы получим без труда уравнение

$$\frac{dA}{dV}=\frac{A}{V-\frac{2}{3}}\frac{\left(\frac{\varkappa+1}{2}V-1\right)\left(V-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{\varkappa-1}{2}V(V-1)\left(V-\frac{2}{3}\right)-\left(V-\frac{2\varkappa+1}{3\varkappa}\right)A^2}{V(V-1)\left(V-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3\varkappa}-V\right)A^2}, \tag{37.26}$$

не содержащее λ. После того как A в функциях от V будет из этого уравнения определено, останется выполнить квадратуру в уравнении (37.24), чтобы найти λ в функциях от V, а затем найти θ из уравнения (37.20), которое можно записать в виде:

$$\frac{d\ln\theta}{dV}=\frac{2}{3}\frac{V-1}{V-\frac{2}{3}}\frac{\left(V-\frac{2}{3}\right)^2-A^2}{V(V-1)\left(V-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3\varkappa}-V\right)A^2}. \tag{37.27}$$

Наша система содержит три дифференцирования. Три краевых условия мы получим, привлекая равенства (37.14), (37.15), (37.16), которые должны выполняться на поверхности сильного разрыва. Равенства эти согласуются с нашим решением (37.17), (37.18), если считать, что поверхность разрыва перемещается так, что на ней всегда $\lambda=\text{const}$. Не нарушая общности, мы можем положить на поверхности разрыва

$$\lambda=1 \tag{37.28}$$

(при этом параметр b остаётся подлежащим определению). Поверхность разрыва перемещается, таким образом, по закону $x=x^*(t)$, где

$$x^*(t)=b^{-\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}} \tag{37.29}$$

(вторая поверхность разрыва движется по закону $x^*=-b^{-\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}}$). При этом N найдётся в виде $\left(N=\frac{dx^*}{dt}\right)$

$$N=\frac{2}{3}b^{-\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\frac{x^*}{t}. \tag{37.30}$$

Посмотрим теперь, как можно согласовать наше решение с условиями (37.14)—(37.16) при $\lambda = 1$ (на поверхности разрыва). Сопоставление с (37.14) нам даёт $x^*/tV(1) = \frac{2}{\varkappa+1}\frac{2}{3}\frac{x^*}{t}$; значит, нам достаточно положить

$$V(1) = \frac{4}{3(\varkappa+1)}. \tag{37.31}$$

Комбинируя (37.15) и (37.16), найдём затем $\left(\varkappa\frac{p'}{\rho'} = a^2\right)$ $\left(\frac{x^*}{t}\right)^2 A^2(1) = \frac{2\varkappa(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\frac{4}{9}\left(\frac{x^*}{t}\right)^2$, откуда

$$A^2(1) = \frac{8}{9}\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}. \tag{37.32}$$

Наконец, из равенства $\vartheta = p^{1/\varkappa}\rho^{-1}$ получим

$$\theta(1) = \left[\frac{8}{9(\varkappa+1)}\right]^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\rho_2^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}. \tag{37.33}$$

Таким образом, мы должны лишь при отыскании наших решений удовлетворить краевым условиям (37.31)—(37.33) и сопряжение будет достигнуто.

Остаётся ещё найти значение параметра b. Потребуем, чтобы полная (кинетическая и внутренняя) энергия оставалась постоянной, равной начальной энергии E_0, выделяющейся при взрыве. Это значит, что

$$2\int_0^{x^*}\frac{\rho v_x^2}{2}\,dx + 2\int_0^{x^*}\frac{c_v\rho TR}{c_p - c_v}\,dx = E_0 = \text{const}. \tag{37.34}$$

Так как $\rho = \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} a^{\frac{2}{\varkappa-1}}\vartheta^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$, $T = \frac{1}{\varkappa R}a^2$, то, используя (37.17), (37.18) и переходя к независимой переменной λ по (37.19), получим

$$E_0 = \frac{b}{3}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}\left[\int_1^\infty \frac{V^2 A^{\frac{2}{\varkappa-1}}\theta^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}{\lambda^2}\,d\lambda + \int_1^\infty \frac{2}{\varkappa-1}\frac{A^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}\theta^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}{\lambda^2}\,d\lambda\right], \tag{37.35}$$

Равенство (37.35) позволит определить b по заданному E_0, после того как V, A, θ известны.

Заметим, что в то время как V и A не зависят ни от каких параметров [как это следует из уравнений (37.21), (37.26) и их краевых условий (37.31), (37.32)], функция θ зависит от ρ_2. По (37.33), если принять в расчёт уравнение (37.27), функция θ будет пропор-

циональна величине $\rho_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$. Поэтому интегралы из (37.35) будут пропорциональны первой степени ρ_2, и мы можем написать

$$b = \alpha \frac{E_0}{\rho_2}, \tag{37.36}$$

где α — число, зависящее только от $\varkappa$.

Остаётся только решить уравнение (37.26).

Особыми точками уравнения (37.26) в плоскости (V, A) будут *точки с координатами*: $(0, 0)$, $(^2/_3, 0)$, $(1, 0)$, $(2/3\varkappa, \infty)$, $(^2/_3, \infty)$. По Седову надо выбрать ту ветвь решения, которая проходит через точку $(2/3\varkappa, \infty)$, как единственную, с помощью которой можно сопрячь движение и покой (с переходом через подвижную поверхность разрыва).

Седов нашёл замечательное решение уравнений (37.26) – (37.28), отвечающее этой ветви и удовлетворяющее краевым условиям (37.31) – (37.33). Оно имеет вид:

$$A^2 = \varkappa \frac{\varkappa-1}{2} V^2 \left(1 - \frac{3V}{2}\right)\left(\frac{3\varkappa V}{2} - 1\right)^{-1}, \tag{37.37}$$

$$\lambda = \frac{9(\varkappa+1)^2}{16} V^2 \left[\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\left(\frac{3\varkappa V}{2} - 1\right)\right]^{-3\frac{\varkappa-1}{2\varkappa-1}} \left[3\left(1 - \frac{\varkappa+1}{2} V\right)\right]^{\frac{5\varkappa-4}{2\varkappa-1}}, \tag{37.38}$$

$$\theta^{\varkappa}\rho_2^{\varkappa-1} = \frac{\varkappa-1}{2} V^2 \left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\right)^{1-\varkappa+\frac{\varkappa}{\varkappa-2}} \left[\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\left(\frac{3\varkappa}{2}V-1\right)\right]^{\frac{2-3\varkappa}{2\varkappa-1}} \times$$

$$\times \left[3\left(1-\frac{\varkappa+1}{2}V\right)\right]^{\frac{(5\varkappa-1)(1-\varkappa)}{(2\varkappa-1)(2-\varkappa)}} \left(1-\frac{3V}{2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-2}}. \tag{37.39}$$

Подставляя (37.37) – (37.39) в формулу (37.35), получим при $\varkappa = 1{,}4$ для α величину порядка 0,6. Уравнения (37.37) – (37.39) вместе с формулами (37.18), (37.19), (37.36) полностью решают задачу о плоском взрыве без противодавления.

Аналогичным образом Седов построил решение для цилиндрического и сферического взрывов. Покажем, как эти решения строятся.

В том случае, когда движение зависит лишь от расстояния r от оси z цилиндрической системы координат и от времени, условия адиабатичности, уравнение непрерывности и уравнение движения примут вид:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v_r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\varkappa-1}{2} a \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t} + v_r \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{a v_r}{r} = 0;$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{\varkappa-1} a \frac{\partial a}{\partial r} = \frac{a^2}{\varkappa-1} \frac{\partial \ln \vartheta}{\partial r}.$$

В случае же, когда движение зависит лишь от времени и от расстояния R от центра сферической системы координат, мы получим:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v_R \frac{\partial \vartheta}{\partial R} = 0,$$

$$\frac{\varkappa - 1}{2} a \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{\partial a}{\partial t} + v_R \frac{\partial a}{\partial R} + \frac{2 a v_R}{R} = 0;$$

$$\frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{2}{\varkappa - 1} a \frac{\partial a}{\partial R} = \frac{a^2}{\varkappa - 1} \frac{\partial \ln \vartheta}{\partial R}.$$

Оба эти случая можно объединить с плоским случаем и уравнение адиабатичности записывать всегда в виде

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \tag{37.40}$$

[где u — скорость (v_x, v_r или v_R), а x — координата (x, r или R)], а уравнение неразрывности — в виде:

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{\varkappa - 1} \left(\frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} \right) + (\nu - 1) \frac{a u}{x} = 0 \tag{37.41}$$

($\nu = 1$ для плоского случая, $\nu = 2$ для цилиндрической и $\nu = 3$ для сферической симметрии); уравнение движения запишется в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{\varkappa - 1} a \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{a^2}{\varkappa - 1} \frac{\partial \ln \vartheta}{\partial x}. \tag{37.42}$$

Движение ищем всегда в форме:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{x}{t} V(\lambda), \qquad a = \frac{x}{t} A(\lambda), \\ \vartheta &= \left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} 0(\lambda), \quad \lambda = b \frac{t^2}{x^{\nu+2}}. \end{aligned}\right\} \tag{37.43}$$

Решения этой формы действительно удовлетворяют системе (37.40) — (37.42); аналогом уравнению (37.24) будет теперь уравнение

$$(\nu + 2) \lambda \frac{dV}{d\lambda} = \frac{V(V-1)\left(V - \frac{2}{\nu+2}\right) + \nu \left[\frac{2}{\varkappa(\nu+2)} - V\right] A^2}{\left(V - \frac{2}{\nu+2}\right)^2 - A^2}. \tag{37.44}$$

Вместо уравнения (37.26) теперь будет иметь место соотношение:

$$\frac{dA}{dV} = A \frac{\left[\frac{\nu(k-1)+2}{2} V - 1\right]\left(V - \frac{2}{\nu+2}\right)^2 - \frac{\varkappa - 1}{2} V(V-1)\left(V - \frac{2}{\nu+2}\right) - \left[V - 1 + \frac{\nu(\nu-1)}{\varkappa(\nu+2)}\right] A^2}{\left(V - \frac{2}{\nu+2}\right)\left\{V(V-1)\left(V - \frac{2}{\nu+2}\right) + \nu\left[\frac{2}{\varkappa(\nu+2)} - V\right] A^2\right\}}. \tag{37.45}$$

Вместо уравнения (37.27) получим

$$\frac{d\ln\theta}{dV}=\frac{2}{\varkappa}\,\frac{V-1}{V-\dfrac{2}{\nu+2}}\,\frac{\left(V-\dfrac{2}{\nu+2}\right)^2-A^2}{V(V-1)\left(V-\dfrac{2}{\nu+2}\right)-\nu\left[\dfrac{2}{\varkappa(\nu+2)}-V\right]A^2}. \tag{37.46}$$

Заметим теперь, что в формуле (37.9), дающей условие на поверхности разрыва, v' имеет смысл нормальной к поверхности разрыва скорости (см. § 2 этой главы). Поэтому при отсутствии противодавления мы опять можем применить краевые условия (37.14)—(37.16), причём под v' можем разуметь во всех случаях величину u после скачка. Вновь считаем, что на скачке $\lambda=1$, так что закон движения $x^*(t)$ поверхности скачка будет иметь вид:

$$x^*(t)=b^{\frac{1}{\nu+2}}\,t^{\frac{2}{\nu+2}}.$$

Тогда

$$N=\frac{2}{\nu+2}\,\frac{x^*}{t},$$

и мы получим

$$\left.\begin{aligned} &V(1)=\frac{4}{(\varkappa+1)(\nu+2)};\quad A^2(1)=\frac{8(\varkappa-1)\varkappa}{(\varkappa+1)^2(\nu+2)};\\ &\theta(1)=\left[\frac{8}{(\nu+2)^2(\varkappa+1)}\right]^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,\rho_2^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}. \end{aligned}\right\} \tag{37.47}$$

Параметр b определяется вновь из условия сохранения полной энергии (формула типа (37.34)), которое в цилиндрическом случае приведёт к соотношению

$$\int_0^{x^*}\frac{\rho u^2}{2}\,2\pi x\,dx+\int_0^{x^*}\frac{p}{\varkappa-1}\,2\pi x^2\,dx=E_0=\text{const.}, \tag{37.48}$$

а в сферическом случае —

$$\int_0^{x^*}\frac{\rho u^2}{2}\,4\pi x^2\,dx+\int_0^{x^*}\frac{p}{\varkappa-1}\,4\pi x^2\,dx=E_0=\text{const.} \tag{37.49}$$

Точное решение (37.45), удовлетворяющее (37.47), имеет вид

$$A^2=\frac{\varkappa-1}{2}\,\frac{V^2\left(\dfrac{2}{\nu+2}-V\right)}{V-\dfrac{2}{\varkappa(\nu+2)}}. \tag{37.50}$$

Внося A^2 из (37.50) в уравнение (37.44), легко приведём последнее к виду

$$\frac{d\ln\lambda}{dV}=\frac{2}{V}-\frac{(\varkappa-1)(\nu+2)}{\nu+2(\varkappa-1)}\frac{1}{V-\dfrac{2}{\varkappa(\nu+2)}}+$$
$$+\frac{1}{2[\nu+2(\varkappa-1)]}\frac{\varkappa^2(\nu^2+4)-\varkappa(3\nu^2-8\nu+4)+4\nu(\nu-2)}{V\left(1+\dfrac{\varkappa-1}{2}\nu\right)-1}. \quad (37.51)$$

Наконец, комбинируя (37.46) и (37.50), будем иметь

$$\varkappa\frac{d\ln\theta}{dV}=\frac{2}{V}-\frac{2(\varkappa-1)+\nu\varkappa}{\nu+2(\varkappa-1)}\frac{1}{V-\dfrac{2}{\varkappa(2+\nu)}}+\frac{\varkappa}{2-\varkappa}\frac{1}{\dfrac{2}{\varkappa(\nu+2)}-V}+$$
$$+\frac{\varkappa-1}{2(\varkappa-2)}\frac{\varkappa^2(\nu^2+4)-\varkappa(3\nu^2-8\nu+4)+4\nu(\nu-2)}{\nu+2(\varkappa-1)}\frac{1}{V\left(1+\dfrac{\varkappa-1}{2}\nu\right)-1}. \quad (37.52)$$

Элементарные квадратуры завершают решение задачи. Постоянная b, как и прежде, может быть представлена в виде $b=\alpha E_0/\rho_2$, причём $\alpha\approx 0{,}8$ для цилиндрического случая и $\alpha\approx 1{,}175$ для случая сферического.

Особенностью всех приведённых здесь точных решений является то, что они дают в центре ($x=0$) значения $\rho=0$, $T=\infty$ ($p\neq 0$), что следует непосредственно из вида соответствующих формул $\left(\text{особая точка } V=\dfrac{2}{\varkappa(\nu+2)},\ A=\infty\right)$.

Решение Седова хорошо согласуется с экспериментом. В случае, когда противодавлением нельзя пренебречь и приходится пользоваться точными формулами (37.9) — (37.11), автомодельного решения больше не существует. Случай этот можно рассчитать численно, построив соответствующие конечно-разностные уравнения и выбрав расчётную схему. В качестве примера приведём путь решения полной задачи для случая сферической симметрии, предложенный в работе Д. Е. Охоцимского, И. Л. Кондрашевой, З. П. Власовой и Р. К. Казаковой [1]).

В качестве независимых переменных введём лагранжевы координаты: τ — время и ξ — расстояние от начальной точки взрыва.

Уравнение (37.40) примет теперь простой вид

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}=0 \quad \text{или} \quad \vartheta=\vartheta(\xi). \quad (37.53)$$

[1]) Охоцимский Д. Е., Кондрашева И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К., Расчёт точечного взрыва с учётом противодавления, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1957.

Вид функции $\vartheta(\xi)$ надлежит определить. Вместо уравнения (37.41) имеем уравнение неразрывности в лагранжевых координатах:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\xi^2}{x^2}\frac{\rho_2}{\rho},$$

где, как и прежде, ρ_2 — начальная плотность среды, предполагаемая постоянной. Выразив ρ через a и ϑ, получим

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\xi^2}{x^2}\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left(\frac{a_2}{a}\right)^{\frac{2}{\varkappa-1}}. \tag{37.54}$$

При этом

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = u. \tag{37.55}$$

Наконец, уравнение (37.42) может быть приведено к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{\varkappa-1}\left(2a\frac{\partial a}{\partial \xi} - a^2\frac{\partial \ln \vartheta}{\partial \xi}\right)\frac{x^2}{\xi^2}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa+1}}\left(\frac{a}{a_2}\right)^{\frac{2}{\varkappa-1}} = 0. \tag{37.56}$$

В качестве искомых функций фигурируют $u(\xi, \tau)$, $a(\xi, \tau)$, $x(\xi, \tau)$, $\vartheta(\xi)$. Движение должно сопрягаться с покоем путём перехода через поверхность разрыва; при этом должны выполняться условия (37.9), (37.10), (37.11). С помощью u, a, ϑ мы представим эти условия в виде:

$$\frac{u}{a_2} = \frac{2}{\varkappa+1}\frac{N}{a_2}\left(1 - \frac{a_2^2}{N^2}\right), \tag{37.57}$$

$$\left(\frac{a}{a_2}\right)^2 = \frac{2(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\left(\frac{N^2}{a_2^2} - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\right)\left(1 + \frac{2}{\varkappa-1}\frac{a_2^2}{N^2}\right), \tag{37.58}$$

$$\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_2}\right)^{\varkappa} = \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)^{\varkappa}\left(\frac{N^2}{a_2^2} - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\right)\left(1 + \frac{2}{\varkappa-1}\frac{a_2^2}{N^2}\right)^{\varkappa}. \tag{37.59}$$

Выберем теперь начальные данные. Мы примем, что для малого промежутка времени от начала взрыва до некоторого момента τ_0 процесс можно считать автомодельным, т. е. можно пренебречь противодавлением. Решение для такого движения нами уже изложено. Тогда нам предстоит решить следующую задачу. Найти гидродинамические элементы в части плоскости (ξ, τ), ограниченной неизвестной, подлежащей определению, линией $\overset{\frown}{BC}$ (см. рис. 148), изображающей закон движения ударной волны (на этой линии должны удовлетворяться условия (37.57) — (37.59)), отрезком прямой $\overline{AB}$ ($\tau = \tau_0$) (здесь все искомые функции нам известны) и осью симметрии $\xi = 0$ (здесь $u = 0 = x$). Прежде чем приступить к изложению схемы

решения задачи, рассмотрим поведение искомых функций на «начальном» отрезке $\overline{AB}$. Для этого обратимся к формулам (37.50), (37.51), (37.52) при $\nu = 3$. При $x = 0$ (т. е. $\xi = 0$) автомодельные решения для a и ϑ обладают особенностью. Последняя отвечает значению $V = \frac{2}{\varkappa(\nu+2)}$, т. е. при $\nu = 3$ $V = \frac{2}{5\varkappa}$. В силу (37.51) главные части V и λ будут связаны соотношением

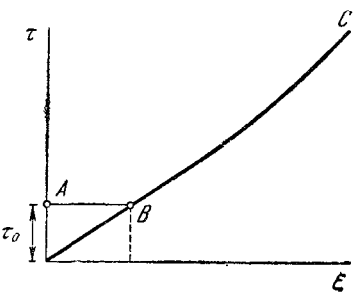

Рис. 148.

$$O\left(V - \frac{2}{5\varkappa}\right) = \lambda^{-\frac{\nu+2(\varkappa-1)}{(\varkappa-1)(\nu+2)}} = \lambda^{-\frac{2\varkappa+1}{5(\varkappa-1)}}$$

или, по (37.43), $O\left(V - \frac{2}{5\varkappa}\right) = x^{\frac{2\varkappa+1}{\varkappa-1}}$ (при закреплённом τ). Но тогда, по (37.50), имеем $O(A^2) = O\left(V - \frac{2}{5\varkappa}\right)^{-1} = x^{-\frac{2\varkappa+1}{\varkappa-1}}$ и, по (37.52), $O(\vartheta) = O\left(V - \frac{2}{5\varkappa}\right)^{-\frac{5\varkappa-2}{2\varkappa+1}\frac{1}{\varkappa}} = x^{-\frac{5\varkappa-2}{\varkappa-1}\frac{1}{\varkappa}}$. Обращаясь теперь к (37.54) и (37.55), мы можем определить характер зависимости ϑ от ξ на отрезке $\overline{AB}$. Именно, привлекая (37.42), имеем сперва

$$O(\vartheta) = x^{\frac{2}{\varkappa}-\frac{5\varkappa-2}{(\varkappa-1)\varkappa}} = x^{-\frac{3}{\varkappa-1}}; \quad O(a^2) = x^{2-\frac{2\varkappa+1}{\varkappa-1}} = x^{-\frac{3}{\varkappa-1}}.$$

Таким образом, по (37.54),

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = C\frac{\xi^2}{x^2}\left(x^{-\frac{3}{\varkappa-1}}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left(x^{-\frac{3}{\varkappa-1}}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-1}} = C\xi^2 x^{-2\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}},$$

где C — некоторая постоянная. Отсюда получим

$$x = \text{const.}\,\xi^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Определив, таким образом, асимптотическую зависимость x от ξ для точек, прилегающих к центру (отрезок $\overline{AB}$), мы найдём, далее, что вблизи центра

$$\vartheta = \text{const.}\,\xi^{-\frac{3}{\varkappa}}, \quad a^2 = \text{const.}\,\xi^{-\frac{3}{\varkappa}}, \quad u = \text{const.}\,\xi^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}. \tag{37.60}$$

Подготовим теперь нашу систему уравнений для расчёта.

Заметим сперва, что уравнение (37.55), если его продифференцировать по ξ и привлечь (37.54), приведёт к соотношению:

$$\frac{2}{\varkappa-1}\frac{\partial a}{\partial \tau} + a\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{x^2}{\xi^2}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left(\frac{a}{a_2}\right)^{\frac{2}{\varkappa-1}} + \frac{2au}{x} = 0. \tag{37.61}$$

Будем теперь искать линейные комбинации φ и Ψ от наших функций a и u по формулам:

$$\varphi = \sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta}}\left(\frac{2}{\varkappa-1}\frac{a}{a_2}+\frac{u}{a_2}\right);\quad \Psi = \sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta}}\left(\frac{2}{\varkappa-1}\frac{a}{a_2}+\frac{u}{a_2}\right). \tag{37.62}$$

Введём ещё безразмерную координату $\xi' = \xi/\xi_2$ и безразмерное время $\tau/\tau_2 = \tau'$, причём примем

$$\frac{\xi_2}{\tau_2} = a_2,$$

что же до выбора ξ_2, то её мы определим из рассмотрения полных энергий — формулы (37.49). Можно положить

$$p_2\xi_2^3 = E,\quad \text{т. е. } \xi_2 = E^{\frac{1}{3}}p_2^{-\frac{1}{3}},$$

где $E = \alpha E_0$, а α — параметр, введённый выше ($\alpha = 1{,}175$ при $\varkappa = 1{,}4$).

Складывая уравнения (37.56) и (37.61), получим после простых преобразований

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau'} + M\frac{\partial\varphi}{\partial\xi'} + \Lambda + V\frac{\partial}{\partial\xi'}\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_2}\right) = 0, \tag{37.63}$$

где

$$M = \frac{x'^2}{\xi'^2}\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left(\frac{a}{a_2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} = \left(\frac{x'}{\xi'}\right)^2\left[\frac{\varkappa-1}{4}(\varphi-\Psi)\right]^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta}}, \tag{37.64}$$

$$\Lambda = \frac{\varkappa-1}{4}\frac{\varphi^2-\Psi^2}{x'}\sqrt{\frac{\vartheta}{\vartheta_2}}, \tag{37.65}$$

$$V = \frac{M(\varphi-\Psi)}{4}\frac{\vartheta_2}{\vartheta}. \tag{37.66}$$

Вычитая из (37.61) уравнение (37.56), получим аналогичным образом

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau'} - M\frac{\partial\Psi}{\partial\xi'} + \Lambda + V\frac{\partial}{\partial\xi'}\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_2}\right) = 0. \tag{37.67}$$

Наконец, уравнение (37.54) примет вид

$$\frac{\partial x'}{\partial\xi'} = \left(\frac{\xi'}{x'}\right)^2\frac{\vartheta}{\vartheta_2}\left(\frac{4}{\varkappa-1}\right)^{\frac{2}{\varkappa-1}}(\varphi+\Psi)^{-\frac{2}{\varkappa-1}}. \tag{37.68}$$

Теперь искомыми функциями будут φ, Ψ, ϑ, x и для их определения служат четыре уравнения: (37.63), (37.67), (37.68) и (37.53).

Краевые условия (37.53), (37.57) запишутся теперь в виде:

$$\varphi - \Psi = \frac{4}{\varkappa+1}\left(\frac{N}{a_2}-\frac{a_2}{N}\right)\sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta}}, \tag{37.69}$$

$$\left[\frac{\varkappa-1}{4}(\varphi-\Psi)\right]^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}} = \frac{2}{\varkappa+1}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}\left(\frac{N^2}{a_2^2}-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\right). \tag{37.70}$$

Третье условие, (37.59), остается без изменения.

Опишем схему численного интегрирования, составленную упомянутыми выше авторами применительно к счёту на электронной вычислительной машине. Предварительно сделаем ещё одно замечание. Определяя функции φ и Ψ, мы имели дело с безразмерными функциями a/a_2, u/a_2, ϑ/ϑ_2; сами функции φ, Ψ тоже безразмерны. В качестве ξ' и x' входят безразмерные величины. Поэтому все наши уравнения и краевые условия будут носить универсальный характер.

Приступая к численному интегрированию, рассмотрим плоскость (ξ', τ') (рис. 149). Разделим отрезок на равные интервалы $\Delta\xi$ и проведём через точки деления прямые $\xi' = \text{const}$. Шаг по времени будем выбирать так, чтобы было

$$\Delta\tau = \Delta\xi \frac{a_2}{N}, \quad (37.71)$$

где N — скорость перемещения ударной волны.

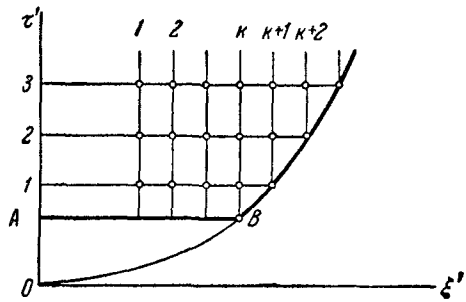

Рис. 149.

Таким образом, шаг по времени будет меняться, в то время как шаг по ξ' остаётся одним и тем же. Перенумеруем горизонтальные линии $\tau' = \text{const}$, начиная с прямой $\overline{AB}$; перенумеруем вертикальные линии $\xi' = \text{const}$., начиная с линии $\xi' = 0$. Будем обозначать значения какой-то функции, например φ, в узлах нашей сетки путём постановки номеров прямых, проходящих через эту точку. Так, φ_i^n означает, что φ берётся на пересечении i-й вертикальной линии и n-й горизонтальной.

Предполагаем, что нам известны значения всех функций (в том числе и N/a_2) вплоть до n-й горизонтальной линии. Как найти значения наших величин на $n+1$-й горизонтальной линии?

Заменим сперва в уравнениях (37.68), (37.67) частные производные конечными разностями по формулам:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi'}\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta\xi}\left\{\frac{\varphi_{i+1}^n + \varphi_{i+1}^{n+1}}{2} - \frac{\varphi_i^n + \varphi_i^{n+1}}{2}\right\}, \quad (37.72)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau'}\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta\tau}\left\{\frac{\varphi_i^{n+1} + \varphi_{i+1}^{n+1}}{2} - \frac{\varphi_i^n + \varphi_{i+1}^n}{2}\right\}. \quad (37.73)$$

Аналогично запишем $\partial\Psi/\partial\xi'$, $\partial\Psi/\partial\tau'$. Производные эти записаны, как видно, в центре соответствующей клетки. Тогда мы получим

следующие разностные уравнения:

$$\frac{\varphi_i^{n+1}+\varphi_{i+1}^{n+1}-\varphi_i^n-\varphi_{i+1}^n}{\Delta\tau}+M_{i+\frac12}^{n+\frac12}\frac{\varphi_{i+1}^n+\varphi_{i+1}^{n+1}-\varphi_i^n-\varphi_i^{n-1}}{\Delta\xi}+$$

$$+2(\Lambda+V')_{i+\frac12}^{n+\frac12}=0, \quad (37.74)$$

$$\frac{\Psi_i^{n+1}+\Psi_{i+1}^{n+1}-\Psi_i^n-\Psi_{i+1}^n}{\Delta\tau}-M_{i+\frac12}^{n+\frac12}\frac{\Psi_{i+1}^n+\Psi_{i+1}^{n-1}-\Psi_i^n-\Psi_i^{n-1}}{\Delta\xi}+$$

$$+2(\Lambda+V')_{i+\frac12}^{n+\frac12}=0, \quad (37.75)$$

где $V'=V\frac{\partial}{\partial\xi'}\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_2}\right)$ (причём, в силу (37.53), $\partial\vartheta/\partial\xi'$ зависит лишь от номера i, но не зависит от n).

Уравнение (37.75) решим относительно Ψ_i^{n+1}; получим

$$\Psi_i^{n+1}=A_i\Psi_{i+1}^{n+1}+B_i, \quad (37.76)$$

где

$$A_i=\left(M_{i+\frac12}^{n+\frac12}+\frac{\Delta\xi}{\Delta\tau}\right)^{-1}\left(M_{i+\frac12}^{n+\frac12}-\frac{\Delta\xi}{\Delta\tau}\right), \quad (37.77)$$

$$B_i=\Psi_{i+1}^n-A_i\Psi_i^n-2\left(M_{i+\frac12}^{n+\frac12}+\frac{\Delta\xi}{\Delta\tau}\right)^{-1}(\Lambda+V')_{i+\frac12}^{n+\frac12}\Delta\xi. \quad (37.78)$$

Будем считать пока известными величины $(M,\ \Lambda,\ V')_{i+\frac12}^{n+\frac12}$, а также значение величины $\Delta\tau$ ($\Delta\xi$ — стандартно). Тогда A_i, B_i будут известны. Пусть последняя «справа» точка n-й горизонтальной линии (т. е. точка, отвечающая поверхности разрыва) имеет номер «k». Ясно, что A_i, B_i будут иметь смысл лишь до тех пор, пока $i+1\leqslant k$. Это же относится и к формуле (37.76). Применяя формулу (37.76) сперва для $i+1=k$, потом для $i+1=k-1$ и т. д., получим

$$\Psi_{k-1}^{n+1}=A_{k-1}\Psi_k^{n+1}+B_{k-1}, \quad \Psi_{k-2}^{n+1}=A_{k-2}\Psi_{k-1}^{n+1}+B_{k-2}, \ldots$$

или

$$\Psi_{k-2}^{n+1}=A_{k-2}\left(A_{k-1}\Psi_k^{n+1}+B_{k-1}\right)+B_{k-2}=$$

$$=A_{k-2}A_{k-1}\Psi_k^{n+1}+A_{k-2}B_{k-1}+B_{k-2} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, путём рекуррентных соотношений мы можем выразить

$$\Psi_{k-1}^{n+1},\quad \Psi_{k-2}^{n+1},\ \ldots,\ \Psi_0^{n+1}$$

через посредство Ψ_k^{n+1} (неизвестная величина).

Именно,

$$\Psi_i^{n+1} = a_i \Psi_k^{n+1} + b_i,$$

где

$$a_i = A_i a_{i+1}, \tag{37.79}$$

$$b_i = \Psi_{i+1}^n - A_i\left(\Psi_i^n - b_{i+1}\right) - c_i, \tag{37.80}$$

$$c_1 = 2\,\Delta\xi\,(\Lambda + V')_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\left(M_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\xi}{\Delta\tau}\right)^{-1}; \tag{37.81}$$

a_i, b_i, c_i все последовательно определяются, причём $a_{k+1}=1$, $b_{k+1}=0$. Так как по определению (37.77) величина A_i всегда будет меньше единицы, то коэффициенты a_i будут по (37.80) убывать к центру (к оси τ') и при достаточно большом числе расчётных точек мы можем считать $a_0 \approx 0$. Но тогда в центре будет $\psi_0^{n+1} \approx b_0$, причём, так как на оси τ' ($\xi' = 0$) имеем $u = 0$, то по (37.62) мы можем считать

$$\varphi_0^{n+1} = b_0. \tag{37.82}$$

Но теперь мы можем обратиться к уравнению (37.74) для определения значений φ_i^{n+1} во всех остальных точках соответствующей горизонтали. Получим сперва

$$\varphi_{i+1}^{n+1} = \varphi_i^n - A_i\left(\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^{n+1}\right) - c_i. \tag{37.83}$$

Из этого равенства без труда получим значения φ_i^{n+1} во всех точках $n+1$-й горизонтали, за исключением точек, лежащих на линии скачка (т. е. за исключением φ_{k+1}^{n+1}). Итак, мы можем найти пока все значения φ^{n+1}, Ψ^{n+1}, за исключением Ψ_{k+1}^{n+1}, Ψ_k^{n+1}, φ_{k+1}^{n+1}. Для того чтобы найти эти последние величины, запишем условие на ударной волне. При этом мы представим производные в виде односторонних конечных разностей:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi'}\right)_k^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2\Delta\xi}\left[\varphi_{k+1}^{n+1} - \varphi_k^{n+1} + \varphi_k^{n+1} - \varphi_{k-1}^n\right],$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau'}\right)_k^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{\varphi_k^{n+1} - \varphi_k^{n-1}}{\Delta\xi}.$$

Записывая в развёрнутом виде разностные уравнения (37.63) и (37.67) на поверхности разрыва, заметим, что теперь производную $\partial\vartheta/\partial\xi'$

нельзя считать известной, так как значение её в граничной точке $n+1$-й горизонтали нам неизвестно. Мы должны будем написать $\partial\vartheta/\partial\xi'$ (в коэффициентах уравнения) в виде:

$$\left(\frac{1}{\vartheta_2}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\xi'}\right)_k \approx \frac{1}{2\vartheta_2}\left(\frac{\vartheta_{k+1}^{n+1}-\vartheta_k^{n+1}}{\Delta\xi}+\frac{\vartheta_k^n-\vartheta_{k-1}^n}{\Delta\xi}\right)=\frac{\vartheta_{k+1}-\vartheta_{k-1}}{2\Delta\xi}$$

$\left(\vartheta_k^{n+1}=\vartheta_k^n\right)$. Теперь разностные уравнения записываются для строки $n+1/2$ и столбца k. Уравнение (37.63) примет вид

$$\frac{1}{\Delta\tau}\left(\varphi_k^{n+1}-\varphi_k^n\right)+\frac{1}{2\Delta\xi}M_k^{n+\frac{1}{2}}\left(\varphi_{k+1}^{n+1}-\varphi_k^{n+1}+\varphi_k^n-\varphi_{k+1}^n\right)+$$

$$+\Lambda_k^{n+\frac{1}{2}}+\frac{V_k}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_{k+1}-\vartheta_k}{2\Delta\xi}=0. \quad (37.84)$$

Вместо (37.67) имеем

$$\frac{1}{\Delta\tau}\left(\Psi_k^{n+1}-\Psi_k^n\right)-\frac{1}{2\Delta\xi}M_k^{n+\frac{1}{2}}\left(\Psi_{k+1}^{n+1}-\Psi_k^{n+1}+\Psi_k^n-\Psi_{k-1}^n\right)+$$

$$+\Lambda_k^{n+\frac{1}{2}}+\frac{V_k^{n+\frac{1}{2}}}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_{k+1}-\vartheta_k}{2\Delta\xi}=0. \quad (37.85)$$

В уравнении (37.84) неизвестными являются φ_{k+1}^{n+1} и ϑ_{k+1}; в уравнении (37.85) — Ψ_k^{n+1}, Ψ_{k+1}^{n+1} и снова ϑ_{k+1}.

Присоединим к нашим уравнениям три условия на ударной волне — условия (37.59), (37.69), (37.70), записанные для n — 1-го ряда и $k+1$-го столбца, и мы получим пять уравнений для определения пяти неизвестных

$$\varphi_{k+1}^{n+1},\ \Psi_{k+1}^{n+1},\ \Psi_k^{n+1},\ \vartheta_{k+1},\ N_{k+1}^{n+1}.$$

Уравнения эти следует решать методом итераций. Именно, зададим в качестве первых приближённых значений N значения, отвечающие предыдущей горизонтальной строчке, т. е. N_k^n. Тогда (37.59) позволит найти $\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_2}\right)_{k+1}^{n+1}$; подставив это значение в уравнение (37.84), найдём φ_{k+1}^{n+1}. Зная $(\varphi,\ N,\ \vartheta)_{k+1}^{n+1}$, найдём с помощью (37.69) значение Ψ_{k+1}^{n+1}, после чего из уравнения (37.70) получим новое значение N_{k+1}^{n+1}. Это новое значение N сравним с N_k^n; если эти величины не совпадут с желаемой точностью, то в качестве следующего приближения возьмём среднее арифметическое из них, снова проделаем выкладки, пока не получим с заданной точностью все четыре величины N, ϑ, φ, Ψ на ударной волне. Теперь из уравнения (37.85) найдём Ψ_k^{n+1} и тем самым завершим задачу определения функций φ, Ψ, ϑ

Таблица III

Радиус ударной волны, скорость ударной волны, давление на фронте в зависимости от времени

$t : E^{\frac{1}{3}} \varrho_2^{-\frac{5}{6}} p_2$	$x : E^{\frac{1}{3}} p_2^{-\frac{1}{3}}$	$N : \sqrt{\frac{p_2}{\varrho_2}}$	$p = p_2$
0,00037119261	0,042446289	45,740446	1743,3237
0,00042703441	0,044882500	42,072805	1474,9341
0,00048762427	0,047327794	38,858086	1258,1257
0,00059950718	0,051398404	34,337009	982,35847
0,00072549370	0,055473749	30,632996	781,81703
0,00086611344	0,059544816	27,554225	632,52942
0,0010218613	0,063621568	24,964868	519,20386
0,0011932119	0,067691539	22,759084	431,47993
0,0013806457	0,071766942	20,861669	362,50770
0,0015846036	0,075838074	19,217523	307,59432
0,0018055170	0,079912387	17,780127	263,27742
0,0021440497	0,085610903	16,051502	214,54226
0,0026888478	0,093763569	14,030664	163,88294
0,0033083766	0,10190901	12,407207	128,11566
0,0040053246	0,11006138	11,082088	102,17722
0,0047821258	0,11820625	9,9845968	82,910144
0,0056408701	0,12635901	9,0655001	68,319410
0,0065835082	0,13450470	8,2843368	57,025197
0,0076119879	0,14265665	7,6144750	48,150192
0,0087278918	0,15080230	7,0358149	41,085577
0,0099326948	0,15895343	6,5316905	35,385817
0,011770857	0,17035588	5,9289607	29,127146
0,014707855	0,18666876	5,2296777	22,624607
0,01801482I	0,20296826	4,6739525	18,038194
0,021693103	0,21928414	4,2254576	14,712077
0,025740906	0,23558771	3,8581134	12,237532
0,030154165	0,25190755	3,5536611	10,357089
0,034926422	0,26821567	3,2986924	8,9011431
0,040049353	0,28453352	3,0831432	7,7548102
0,045513409	0,30084347	2,8991640	6,8376267
0,051307927	0,31716492	2,7411281	6,0948195
0,059953460	0,33999960	2,5546710	5,2719535
0,073321085	0,37266609	2,3430052	4,4080611
0,087792738	0,40539768	2,1783594	3,7877080
0,10326763	0,43807059	2,0480066	3,3286093
0,11964943	0,47077027	1,9430553	2,9795533
0,15478498	0,53615332	1,7863459	2,4925263
0,17338380	0,56881836	1,7269304	2,3185739
0,19257978	0,60154095	1,6766648	2,1760040
0,24075188	0,68006497	1,5833527	1,9225047
0,28279541	0,74537449	1,5262107	1,7744325
0,32624714	0,81084344	1,4817491	1,6629836
0,37087547	0,87613419	1,4463630	1,5766384
0,41649606	0,94159634	1,4176835	1,5081888
0,46296120	0,0068640	1,3940443	1,4527996

Продолжение

$t : E_{\varrho_2}^{\frac{1}{3}} p_2^{-\frac{5}{6}}$	$x : E^{\frac{1}{3}} p_2^{-\frac{1}{3}}$	$N : \sqrt{\frac{p_2}{\varrho_2}}$	$p = p_2$
0,54835908	1,1375785	1,3607171	1,3692012
0,65517718	1,2682835	1,3309649	1,3095564
0,72426297	1,3596500	1,3163134	1,2772341
0,82415753	1,4902189	1,2994275	1,2404266
0,92521260	1,6207801	1,2860387	1,2115796
1,0272174	1,7513436	1,2751971	1,1884397
1,1300115	1,8819135	1,2662619	1,1695159
1,3374959	2,1430754	1,2524510	1,1402280
1,4420092	2,2736583	1,2470215	1,1292188
1,6944759	2,5870953	1,2367219	1,1079008
1,9062747	2,8483764	1,2302327	1,0945604
2,1190714	3,1096352	1,2250545	1,0839654
2,5469597	3,6320036	1,2173414	1,0682668
2,7618034	3,8931742	1,2144031	1,0623125
3,1928620	4,4155604	1,2097478	1,0529082
3,4089552	4,6767533	1,2078762	1,0491373
4,1458222	5,5650727	1,2030347	1,0394105
4,5804748	6,0876013	1,2009411	1,0352162
5,4517159	7,1325834	1,1977943	1,0289260
5,8880975	7,6550605	1,1965853	1,0265136
6,7620252	8,6996139	1,1946576	1,0226724
7,8123402	9,9534905	1,1929425	1,0192598
9,5656357	12,043741	1,1909554	1,0153124
11,321325	14,133640	1,1896108	1,0126449
13,078688	16,223401	1,1886454	1,0107315
14,837283	18,312821	1,1879209	1,0092968
17,828865	21,865845	1,1871626	1,0077958

для всей горизонтальной $n+1$-й полосы. Остаётся ещё найти эйлерову координату x'. Для этого воспользуемся уравнением (37.68), в силу которого

$$x_i'^3 = 3 \int_0^{\xi_i'} \frac{\vartheta}{\vartheta_2} \left[\frac{\varkappa - 1}{4} (\varphi + \Psi) \right]^{-\frac{2}{\varkappa - 1}} d\xi'.$$

Расчёт этого интеграла проводится по формуле трапеций; при вычислении в первом интервале (примыкающем к точке $\xi' = 0$) нам придётся при этом использовать асимптотические представления (37.60).

До сих пор мы предполагали коэффициенты $(\Lambda, M, V')_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ в разностных уравнениях известными. На самом деле счёт приходится проводить в два этапа. На первом счёте коэффициенты, упо-

мянутые выше, записываются в серединах соответствующих интервалов n-го ряда. После нахождения всех функций Ψ, φ, ϑ в $n+1$-м ряду вычисляются значения коэффициентов Λ, M, V' в центрах соответствующих ячеек, после чего производится пересчёт значений функций в $n+1$-м ряду. Наконец, $\Delta\tau$ в первом счёте определяется по значениям N в n-м ряду, а при пересчёте — по среднему арифметическому из решений на n-й и $n+1$-й горизонтали.

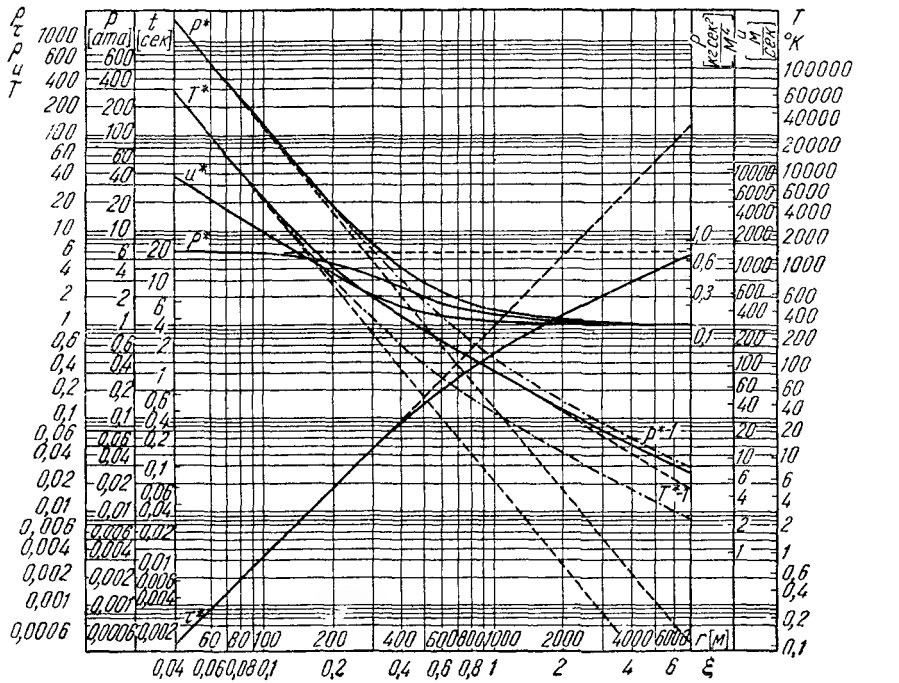

Рис. 150.

Не останавливаясь на дальнейших подробностях вычислений (уменьшение числа интервалов с увеличением времени, контроль счёта и т. п.), приведём некоторые результаты расчётов, заимствованные из упомянутой выше работы (см. сноску на стр. 357, таблица III). В таблице даны значения расстояния поверхности взрывной волны от центра, а также скорости волны и давление на волне — в функциях от времени (всё в безразмерных величинах). Расчёт начинался от автомодельного решения при $\tau' = 0{,}00037119$; при этом $\xi' = \tau'^{2/5} = 0{,}042448$. Первоначальный шаг по пространству был взят $\Delta\xi' = 0{,}0026530$. На первом этапе область задания начальных значений была разбита на 16 интервалов.

На рис. 150 даны в логарифмической шкале давление, скорость, плотность и температура за фронтом волны и время в функциях от положения фронта. Тут же пунктиром изображены значения соответствующих величин для автомодельного решения. Для конкретности на рисунке взяты в качестве начальных данных $p_2 = 10\,321$ *кг/м*^{2}, $\rho_2 = 0{,}125$ *кг сек*^{2}*/м*^{3} (стандартное давление и плотность на уровне моря),

$$E_0 = 8{,}54 \cdot 10^{11} \text{ кг. м}, \quad E = E_0 \cdot \alpha; \quad \alpha = 1{,}175$$

(как мы видели, решение определяется полностью заданием трёх величин: p_2, ρ_2 и E).

Мы не затрагивали в этой книге явлений горения и детонации, при которых наша постановка задачи будет неверна. С теорией этих явлений читатель может познакомиться, например, по книге: Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., «Механика сплошных сред», 1944.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Понятие вязкой жидкости. До сих пор мы рассматривали исключительно движения идеальной жидкости, т. е. мы предполагали, что поверхностные силы, приложенные к элементам поверхности dS любого объёма жидкости, представляют собой нормальные давления, направленные внутрь объёма. Однако все действительные жидкости являются в той или иной степени вязкими; иначе говоря, они обладают свойством внутреннего трения.

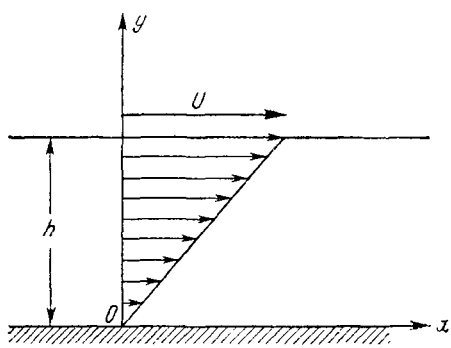

Рис. 151.

Для выяснения сущности этого свойства рассмотрим следующий типичный пример. Имеются две параллельные пластинки (рис. 151), между которыми находится жидкость. Нижняя пластинка удерживается неподвижной, в то время как верхнюю заставляют двигаться в одном и том же направлении в своей плоскости с постоянной скоростью U. Обозначим расстояние между пластинками через h. Тогда, в конце концов, получим следующую картину движения жидкости. Слой жидкости, непосредственно примыкающий к нижней пластинке, будет находиться в покое; слой жидкости, непосредственно примыкающий к верхней пластинке, будет обладать той же самой скоростью U, что и эта пластинка. Наконец, любой промежуточный слой будет двигаться со скоростью v, пропорциональной расстоянию y от неподвижной пластинки:

$$v = U\frac{y}{h}. \tag{1.1}$$

При этом как к верхней, так и к нижней пластинке необходимо приложить силы, а именно: к верхней пластинке необходимо приложить силу, лежащую в её плоскости и имеющую то же направление, что и направление движения пластинки. К нижней же пластинке необходимо приложить такую же силу, тоже лежащую в её плоскости, но имеющую прямо противоположное направление. Величина как той, так и другой силы, отнесённая к единице площади, равна

$$\tau = \mu \frac{U}{h}. \tag{1.2}$$

Коэффициент μ в этой формуле имеет для каждой жидкости при заданной температуре своё значение и называется *коэффициентом внутреннего трения или коэффициентом вязкости*.

Формулу (1.2) можно в только что рассмотренном случае написать и так:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}. \tag{1.3}$$

Мы примем, как опытный факт, справедливость формулы (1.3) и в том случае, когда два соседних слоя, перпендикулярных оси Oy и находящихся на расстоянии dy друг от друга, двигаются параллельно оси Ox со скоростями, соответственно, v и $v+dv$. При этом τ означает касательное напряжение, т. е. силу, отнесённую к единице площади.

Отсюда видно, что в случае движения вязкой жидкости мы не можем ограничиваться при рассмотрении поверхностных сил одними только нормальными давлениями, а должны вводить в рассмотрение также и касательные напряжения.

Можно поэтому дать такое определение: *жидкость называется вязкой, если поверхностные силы, приложенные к элементам поверхности любого объёма жидкости, имеют, вообще говоря, кроме нормальных, ещё и касательные составляющие.*

Происхождение сил вязкости следует искать в молекулярной природе строения материи. Отдельные молекулы жидкости при своих собственных движениях переносят вместе с собой из одного места пространства в другое определённые количества материи, энергии, количества движения. Те величины, с которыми мы имеем дело в гидродинамике, представляют собой средние величины, получающиеся в результате суммарного учёта, относящегося к весьма большому количеству молекул. Собственное движение молекул способствует выравниванию в соседних слоях значений этих средних величин. Так, например, при наличии двух соседних слоёв одной и той же жидкости, но разной плотности, перенос молекул будет способствовать выравниванию этих плотностей: получается *процесс диффузии*. Точно так же, если имеем неравномерное распределение

температуры, то перенос молекул будет способствовать выравниванию температур: в этом находит своё объяснение *процесс теплопроводности*. Наконец, в нашем случае наличия вязкости мы имеем дело с процессом переноса молекулами своего собственного количества движения; этот процесс приводит к выравниванию скоростей соседних слоёв жидкости. В соответствии с этим можно дать вывод основных уравнений движения вязкой жидкости, основанный на представлениях молекулярной теории материи.

Мы, однако, ограничимся выводом основных уравнений движения вязкой жидкости из нескольких простых предпосылок. Для этого нам нужно будет вернуться ещё раз к разобранному уже в главе I части первой этой книги вопросу о деформации жидкой частицы, рассмотреть затем подробно вопрос о тензоре напряжений и установить, наконец, связь между напряжениями и деформациями.

Для того чтобы сделать читателю более ясной структуру этой главы, скажем теперь несколько слов о современном состоянии теории движения вязкой жидкости.

Уравнения движения вязкой жидкости, которые мы получим, имеют довольно сложный вид; поэтому их полное интегрирование удаётся произвести в сравнительно небольшом количестве случаев; некоторые из этих случаев будут разобраны во втором разделе этой главы.

Теория движения вязкой жидкости пошла, главным образом, по линии развития приближённых методов интегрирования уравнений движения вязкой жидкости.

Уравнения движения вязкой жидкости являются математическим выражением равновесия нескольких сил; нас сейчас не интересует точное выражение каждой из этих сил по отдельности; для нас достаточно только перечислить, каковы эти силы: 1) внешние силы, приложенные к жидкости (например, сила тяжести), 2) силы инерции, 3) силы давления и 4) силы внутреннего трения.

Ясно, что при невозможности учесть все эти силы, т. е. при невозможности полностью проинтегрировать уравнения движения вязкой жидкости, можно попытаться одну из этих сил, наименее важную, отбросить. Но мы не можем отбрасывать внешние силы, так как, конечно, мы их вводим только тогда, когда считаем их важными. С другой стороны, мы не можем отбрасывать силы давления, так как эти силы суть силы внутренние, через посредство которых осуществляется равновесие всех остальных сил.

Если мы отбросим теперь силы внутреннего трения, оставив только силы инерции, то мы получим, очевидно, гидродинамику идеальной жидкости. Напротив, отбросив силы инерции и оставив силы трения, мы получаем возможность приближённого решения ряда задач о движениях вязкой жидкости. Целый ряд примеров такого рода разбирается нами в третьем разделе этой главы.

Однако полное пренебрежение силами внутреннего трения или силами инерции не всегда даёт достаточно точные результаты. Заметим при этом, что когда силы внутреннего трения малы по сравнению с остальными силами, мы можем говорить о маловязкой жидкости. Напротив, когда мы пренебрегаем силами инерции в виду их малости сравнительно с силами вязкости, мы можем говорить о сильновязкой жидкости. Таким образом первым приближением для теории маловязкой жидкости является теория идеальной жидкости, первым же приближением для теории сильновязкой жидкости является теория, в которой полностью выброшены силы инерции.

Как было указано выше, и та и другая приближённые теории имеют ограниченный круг применений. Гораздо лучшие результаты дают более точные теории, принадлежащие шведскому учёному Осеену (C. W. Oseen) и немецкому учёному Прандтлю (L. Prandtl).

Основная мысль Осеена состоит в том, что при изучении движений сильновязкой жидкости не нужно полностью выбрасывать из рассмотрения силы инерции, а следует оставить в уравнениях, кроме сил вязкости, также и главную часть сил инерции. Оказывается, что и при этом допущении уравнения движения во многих случаях могут быть проинтегрированы. Примеры такой трактовки движений сильновязкой жидкости будут нами приведены в том же третьем разделе этой главы.

Точно так же заслуга Прандтля состоит в том, что он обратил внимание на невозможность пренебрегать силами вязкости вблизи твёрдых стенок даже в случае маловязких жидкостей. Вблизи твёрдых стенок образуется тонкий пограничный слой, внутри которого необходимо учитывать влияние сил вязкости; вне этого тонкого слоя влиянием вязкости можно пренебрегать. В результате развития этих мыслей получается очень плодотворная *теория пограничного слоя*, позволяющая разъяснить ряд вопросов, не поддающихся решению в рамках теории идеальной жидкости, как, например, вопрос о зарождении вихрей.

Изложению теории Прандтля посвящён последний раздел настоящей главы. Вторая половина этого раздела посвящена другой теории, тоже относящейся к движениям маловязкой жидкости и принадлежащей Осеену. Сущность этой теории Осеена в двух словах такова: найти то движение жидкости, которое получается в пределе из движения вязкой жидкости, если после интегрирования уравнений движения вязкой жидкости мы совершим предельный переход, устремив коэффициент вязкости μ к нулю. Оказывается, что это предельное движение будет отлично от того движения, которое мы могли бы ожидать на основании обычной гидродинамики идеальной жидкости. Можно думать, что движение маловязкой жидкости будет мало отличаться от предельного движения Осеена. Нужно, однако, отметить, что Осеену не удалось совершить предельный переход, исходя из точ-

ных уравнений движения вязкой жидкости. В основу рассуждений им были положены упрощённые уравнения вязкой жидкости, и это до некоторой степени умаляет ценность полученных Осееном результатов.

Наконец, в заключение этого параграфа заметим, что даже точные уравнения движения вязкой жидкости не могут непосредственно описать целую группу движений жидкости, движений, являющихся для практики, пожалуй, наиболее интересными и важными. Мы говорим о так называемых *турбулентных* движениях жидкости, отличительным признаком которых является крайне беспорядочный характер перемещений отдельных частиц жидкости. Теории турбулентных движений будет посвящена следующая глава, в настоящей же главе вопросы турбулентных движений жидкости будут затрагиваться лишь попутно.

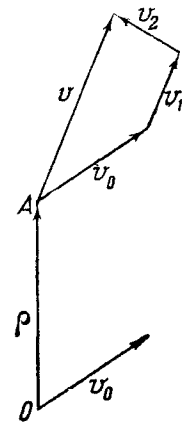

Рис. 152.

§ 2. Тензор скоростей деформации. В главе I, части первой, в §§ 5—9, был уже подробно разобран вопрос о деформации жидкой частицы. В целях большей ясности дальнейшего изложения мы вспомним введённые нами обозначения и сделаем несколько дальнейших замечаний, относящихся к этому вопросу.

Рассмотрим какую-либо точку O движущейся среды; скорость этой точки обозначим через v_0. Пусть далее A — бесконечно близкая к O точка (рис. 152); обозначим через ρ радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$ и через ξ, η, ζ — проекции этого вектора на прямолинейные прямоугольные оси координат. Как в § 1 главы I части первой, введём обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial x}=\varepsilon_1, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y}=\varepsilon_2, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z}=\varepsilon_3,\\ &\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}=\theta_1, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}=\theta_2, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}=\theta_3,\\ &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=\omega_1, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)=\omega_2, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\omega_3, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

причём все эти величины вычисляются для точки O; ясно, что ω_1, ω_2, ω_3 являются составляющими вектора

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot} v. \tag{2.2}$$

Как было выяснено в главе I части первой, скорость точки A может быть представлена в следующем виде:

$$v=v_0+v_1+v_2, \tag{2.3}$$

где $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ есть скорость вращательного движения точки A вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O, причём вектор угловой скорости равен $\boldsymbol{\omega}$, а вектор $\boldsymbol{v}_2$ есть скорость чистой деформации. Составляющие этой последней скорости имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} v_{2x} &= \varepsilon_1\xi + \frac{1}{2}\theta_3\eta + \frac{1}{2}\theta_2\zeta, \\ v_{2y} &= \frac{1}{2}\theta_3\xi + \varepsilon_2\eta + \frac{1}{2}\theta_1\zeta, \\ v_{2z} &= \frac{1}{2}\theta_2\xi + \frac{1}{2}\theta_1\eta + \varepsilon_3\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Таблица девяти величин

$$\Phi = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2 \\ \frac{1}{2}\theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1 \\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3 \end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

носит название *тензора скоростей деформации*. Если этот тензор обращается в нуль, т. е. если все девять составляющих вышеуказанной таблицы равняются нулю, то по формулам (2.4) и скорость деформации обратится в нуль. Это означает, что распределение скоростей частиц жидкости в окрестности точки O даётся той же формулой

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho},$$

что и распределение скоростей точек твёрдого тела, т. е. что деформация частицы в окрестности точки O отсутствует.

Рассмотрим кроме системы осей x, y, z ещё другую прямолинейную прямоугольную систему осей $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. В этой новой системе осей составляющие введённых нами векторов и тензора Φ примут какие-то другие значения; условимся отмечать эти новые значения путём постановки чёрточки над соответствующими буквами. Поставим себе задачу вывести соотношения, связывающие новые и старые составляющие тензора Φ.

Для краткости письма введём следующие обозначения для косинусов углов между старыми и новыми осями координат

$$\left.\begin{aligned} &\cos(\bar{x}, x) = \alpha_{11}, \quad \cos(\bar{x}, y) = \alpha_{12}, \quad \cos(\bar{x}, z) = \alpha_{13}, \\ &\cos(\bar{y}, x) = \alpha_{21}, \quad \cos(\bar{y}, y) = \alpha_{22}, \quad \cos(\bar{y}, z) = \alpha_{23}, \\ &\cos(\bar{z}, x) = \alpha_{31}, \quad \cos(\bar{z}, y) = \alpha_{32}, \quad \cos(\bar{z}, z) = \alpha_{33}. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Составим теперь скалярное произведение векторов v_2 и ρ. Несложное вычисление показывает, что

$$v_2 \cdot \rho = v_{2x}\xi + v_{2y}\eta + v_{2z}\zeta = \varepsilon_1\xi^2 + \varepsilon_2\eta^2 + \varepsilon_3\zeta^2 + \theta_1\eta\zeta + \theta_2\zeta\xi + \theta_3\xi\eta.$$

Но очевидно, что это выражение не может зависеть от того, в какой системе координат мы его вычисляем. Мы имеем поэтому равенство:

$$\bar{\varepsilon}_1\bar{\xi}^2 + \bar{\varepsilon}_2\bar{\eta}^2 + \bar{\varepsilon}_3\bar{\zeta}^2 + \bar{\theta}_1\bar{\eta}\bar{\zeta} + \bar{\theta}_2\bar{\zeta}\bar{\xi} + \bar{\theta}_3\bar{\xi}\bar{\eta} = \varepsilon_1\xi^2 + \varepsilon_2\eta^2 + \varepsilon_3\zeta^2 + \theta_1\eta\zeta + \theta_2\zeta\xi + \theta_3\xi\eta, \qquad (2.7)$$

С другой стороны, вследствие формул (2.6), между старыми и новыми составляющими вектора ρ существуют соотношения

$$\xi = \bar{\xi}\cos(\bar{x}, x) + \bar{\eta}\cos(\bar{y}, x) + \bar{\zeta}\cos(\bar{z}, x) = \bar{\xi}\alpha_{11} + \bar{\eta}\alpha_{21} + \bar{\zeta}\alpha_{31},$$
$$\eta = \bar{\xi}\alpha_{12} + \bar{\eta}\alpha_{22} + \bar{\zeta}\alpha_{32},$$
$$\zeta = \bar{\xi}\alpha_{13} + \bar{\eta}\alpha_{23} + \bar{\zeta}\alpha_{33}.$$

Подставляя эти выражения в правую часть формулы (2.7), производя вычисления и сравнивая затем коэффициенты при $\bar{\xi}^2$, $\bar{\eta}^2$, ... в обеих частях тождества (2.7), мы придём к искомым формулам, из которых приведём только две:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1\alpha_{11}^2 + \varepsilon_2\alpha_{12}^2 + \varepsilon_3\alpha_{13}^2 + \theta_1\alpha_{12}\alpha_{13} + \theta_2\alpha_{13}\alpha_{11} + \theta_3\alpha_{11}\alpha_{12},$$

$$\frac{1}{2}\bar{\theta}_1 = \varepsilon_1\alpha_{21}\alpha_{31} + \varepsilon_2\alpha_{22}\alpha_{32} + \varepsilon_3\alpha_{23}\alpha_{33} + \frac{1}{2}\theta_1\alpha_{22}\alpha_{33} + \frac{1}{2}\theta_1\alpha_{32}\alpha_{23} + \frac{1}{2}\theta_2\alpha_{23}\alpha_{31} + \frac{1}{2}\theta_2\alpha_{21}\alpha_{33} + \frac{1}{2}\theta_3\alpha_{21}\alpha_{32} + \frac{1}{2}\theta_3\alpha_{31}\alpha_{22}.$$

Если бы мы ввели обозначения

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{11} = \varepsilon_1, \quad \Phi_{22} = \varepsilon_2, \quad \Phi_{33} = \varepsilon_3, \\ &\Phi_{12} = \Phi_{21} = \frac{1}{2}\theta_3, \quad \Phi_{13} = \Phi_{31} = \frac{1}{2}\theta_2, \quad \Phi_{23} = \Phi_{32} = \frac{1}{2}\theta_1, \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

то, как легко убедиться, предыдущие формулы приняли бы гораздо более компактный вид:

$$\bar{\Phi}_{ik} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\Phi_{rs}\alpha_{ir}\alpha_{ks} \qquad (i, k = 1, 2, 3). \qquad (2.9)$$

Формулы преобразования (2.9) являются характерными для преобразования составляющих какого-либо тензора. Именно, если мы для каждой системы координат имеем девять величин p_{ik}, причём значения $\bar{p}_{ik}$, соответствующие какой-либо системе координат $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$,

связаны со значениями p_{ik}, соответствующими системе координат x, y, z равенствами

$$\bar{p}_{ik} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} p_{rs} \alpha_{ir} \alpha_{ks}, \tag{2.10}$$

то говорят, что величины p_{ik} образуют тензор (точнее говоря, афинный ортогональный тензор второго ранга, но мы никаких других тензоров рассматривать не будем). Формулы (2.9) показывают, что Φ действительно есть тензор, так что данное нами выше название «тензор скоростей деформаций» вполне оправдано.

Рассмотрим поверхность второго порядка:

$$\varepsilon_1 \xi^2 + \varepsilon_2 \eta^2 + \varepsilon_3 \zeta^2 + \theta_1 \eta\zeta + \theta_2 \zeta\xi + \theta_3 \xi\eta = C;$$

направим теперь новые оси координат x', y', z' по осям симметрии этой поверхности. Тогда уравнение поверхности примет вид:

$$\varepsilon_1' \xi'^2 + \varepsilon_2' \eta'^2 + \varepsilon_3' \zeta'^2 = C.$$

Мы видим, что в системе координат x', y', z' составляющие тензора скоростей деформаций имеют особенно простой вид, ибо, как вытекает из предыдущего уравнения:

$$\theta_1' = \theta_2' = \theta_3' = 0.$$

Положим ещё

$$\varepsilon_1' = e_1, \quad \varepsilon_2' = e_2, \quad \varepsilon_3' = e_3.$$

Направления осей x', y', z' носят название *главных осей тензора скоростей деформаций*, величины e_1, e_2, e_3 называются *главными значениями тензора скоростей деформаций или главными скоростями удлинений.*

В системе осей x', y', z' тензор скоростей деформаций принимает особенно простой вид:

$$\Phi = \begin{Vmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{Vmatrix}. \tag{2.11}$$

Величины e_1, e_2, e_3 были уже введены в § 3 главы I части первой, где было приведено и уравнение третьей степени, которому эти величины удовлетворяют.

Напомним ещё непосредственно вытекающую из обозначений (2.1) формулу:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{v}. \tag{2.12}$$

Эта формула имеет место в любой системе координат, так что, в частности, мы имеем

$$e_1 + e_2 + e_3 = \operatorname{div} \boldsymbol{v}. \tag{2.13}$$

В § 4 главы I части первой было показано, что эта величина представляет собой кубическое расширение жидкости, отнесённое к единице времени.

§ 3. Тензор напряжений. Перейдём теперь к рассмотрению поверхностных сил, появляющихся при движении вязкой жидкости. Вырежем внутри жидкости объём τ при помощи замкнутой поверхности S; рассмотрим элемент dS этой поверхности. Обозначим через n направление внешней нормали к этому элементу поверхности. Тогда действие частиц жидкости, расположенных с внешней стороны элемента dS, на частицы жидкости, прилегающие к этому элементу с внутренней стороны, может быть приведено к действию поверхностной силы $\boldsymbol{p}_n\, dS$.

Если обозначить через $\boldsymbol{p}_x$, $\boldsymbol{p}_y$, $\boldsymbol{p}_z$ напряжения поверхностных сил для площадок, внешние нормали которых параллельны и одинаково направлены, соответственно, с осями x, y, z, то, как было выяснено в § 3 главы II части первой, имеет место соотношение

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_x \cos(n,\ x) + \boldsymbol{p}_y \cos(n,\ y) + \boldsymbol{p}_z \cos(n,\ z). \tag{3.1}$$

Введём теперь следующие обозначения для проекций на оси координат векторов $\boldsymbol{p}_x$, $\boldsymbol{p}_y$ и $\boldsymbol{p}_z$:

$$\begin{array}{llll} p_{xx},\ p_{xy},\ p_{xz} & \text{для вектора} & \boldsymbol{p}_x, \\ p_{yx},\ p_{yy},\ p_{yz} & \text{»} & \text{»} & \boldsymbol{p}_y, \\ p_{zx},\ p_{zy},\ p_{zz} & \text{»} & \text{»} & \boldsymbol{p}_z, \\ p_{nx},\ p_{ny},\ p_{nz} & \text{»} & \text{»} & \boldsymbol{p}_n; \end{array}$$

при этом p_{xx} носит название *нормального напряжения*, действующего на площадку, перпендикулярную к оси Ox, а p_{xy} и p_{xz} называются *касательными напряжениями*.

Тогда, проектируя (3.1) на оси координат, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}\cos(n,\ x) + p_{yx}\cos(n,\ y) + p_{zx}\cos(n,\ z), \\ p_{ny} &= p_{xy}\cos(n,\ x) + p_{yy}\cos(n,\ y) + p_{zy}\cos(n,\ z), \\ p_{nz} &= p_{xz}\cos(n,\ x) + p_{yz}\cos(n,\ y) + p_{zz}\cos(n,\ z), \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Введём теперь в рассмотрение ещё произвольное направление m и обозначим через p_{nm} проекцию вектора $\boldsymbol{p}_n$ на это направление. Так как

$$p_{nm} = p_{nx}\cos(m,\ x) + p_{ny}\cos(m,\ y) + p_{nz}\cos(m,\ z),$$

то предыдущие равенства приводят к следующей формуле:

$$\begin{aligned} p_{nm} = {} & p_{xx}\cos(n,\ x)\cos(m,\ x) + p_{yx}\cos(n,\ y)\cos(m,\ x) + \\ & + p_{zx}\cos(n,\ z)\cos(m,\ x) + p_{xy}\cos(n,\ x)\cos(m,\ y) + \\ & + p_{yy}\cos(n,\ y)\cos(m,\ y) + p_{zy}\cos(n,\ z)\cos(m,\ y) + \\ & + p_{xz}\cos(n,\ x)\cos(m,\ z) + p_{yz}\cos(n,\ y)\cos(m,\ z) + \\ & + p_{zz}\cos(n,\ z)\cos(m,\ z). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Эта общая формула содержит в себе, как частный случай, девять формул (2.10), если мы условимся обозначать p_{xx} через p_{11}, p_{xy} через p_{12} и т. д. и аналогично будем обозначать $p_{\bar{x}\bar{x}}$ через $p_{\bar{1}\bar{1}}$, $p_{\bar{x}\bar{y}}$ — через $p_{\bar{1}\bar{2}}$ и т. д.

Но теперь мы можем утверждать, что таблица девяти величин

$$\Pi = \begin{Vmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{Vmatrix} \tag{3.4}$$

определяет тензор, который называется *тензором напряжений*.

Можно доказать, опираясь на общие законы механики, симметричность тензора Π, выражающуюся формулами [1]):

$$p_{xy} = p_{yx}, \quad p_{xz} = p_{zx}, \quad p_{yz} = p_{zy}. \tag{3.5}$$

В нашем случае напряжений в вязкой жидкости симметричность тензора Π получится как следствие тех предпосылок, которые мы положим в основу вычисления этого тензора.

Относительно тензора Π можно повторить всё то, что было сказано о тензоре деформаций Ф. Существуют три взаимно перпендикулярные главные оси тензора напряжений и соответствующие им главные напряжения p_1, p_2, p_3. Будучи отнесён к главным осям, тензор напряжений принимает особенно простой вид:

$$\Pi = \begin{Vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{Vmatrix}. \tag{3.6}$$

При этом, аналогично равенству

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3,$$

имеет место равенство

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_1 + p_2 + p_3, \tag{3.7}$$

т. е. *сумма нормальных напряжений на три взаимно перпендикулярные площадки не зависит от ориентации этих площадок*.

Перейдём теперь к установлению связи между тензором скоростей деформаций и тензором напряжений в вязкой жидкости. В основу наших рассуждений мы положим два допущения.

I. *Составляющие тензора напряжений при отсутствии вязкости должны приводиться к соответствующим составляющим*

---

[1]) См., например, Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 1938, стр. 363.

тензора напряжений в идеальной жидкости. Иными словами, мы должны иметь

$$p_{xx} = -p + \tau_{xx}, \quad p_{yy} = -p + \tau_{yy}, \quad p_{zz} = -p + \tau_{zz},$$
$$p_{xy} = \tau_{xy}, \quad p_{xz} = \tau_{xz} \quad \text{и т. д.} \tag{3.8}$$

где величины τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz}, τ_{xy}, ... могут быть отличны от нуля только в случае вязкой жидкости.

II. *Величины τ_{xx}, τ_{yy}, ... являются линейными однородными функциями от составляющих тензора скоростей деформаций, причём коэффициенты этих функций не зависят от выбора прямолинейной прямоугольной системы координат.*

Линейный характер рассматриваемой нами зависимости вполне естественно допустить, ибо такой тип зависимости является простейшим. Независимость же коэффициентов рассматриваемых линейных функций от выбора координатной системы выражает, очевидно, свойство изотропности вязкой жидкости, т. е. свойство однородности по отношению к различным направлениям. Выводимые нами уравнения справедливы только для таких изотропных вязких жидкостей.

Пусть теперь оси координат x', y', z' направлены по главным осям тензора скоростей деформаций, так что $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$, и пусть e_1, e_2, e_3 суть соответствующие главные скорости удлинений, так что тензор скоростей деформаций имеет в рассматриваемой системе координат вид (2.11). Нетрудно определить общий вид величин τ в этой системе координат. Пусть, например, мы имеем:

$$\tau_{x'x'} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \tag{3.9}$$

где a_1, a_2, a_3 — некоторые, не зависящие от выбора осей координат, коэффициенты. Ясно тогда, что $\tau_{y'y'}$ и $\tau_{z'z'}$ должны определяться формулами:

$$\tau_{y'y'} = a_1 e_2 + a_2 e_3 + a_3 e_1; \quad \tau_{z'z'} = a_1 e_3 + a_2 e_1 + a_3 e_2, \tag{3.10}$$

ибо достаточно переименовать в соотношении (3.9) ось x' в ось y', ось y' в ось z' и, наконец, ось z' в ось x', чтобы получить первое из соотношений (3.10). Аналогично получается второе из соотношений (3.10).

Покажем теперь, что $a_2 = a_3$. Произведём для этого преобразование координат

$$\bar{x}' = x', \quad \bar{y}' = z', \quad \bar{z}' = -y';$$

ясно, что новые оси координат опять являются главными осями тензора скоростей деформаций. Очевидно, далее, что в новой системе

координат мы имеем следующие формулы:

$$v_{\bar{x}'} = v_{x'}, \quad v_{\bar{y}'} = v_{z'}, \quad v_{\bar{z}'} = -v_{y'},$$

$$\bar{e}_1 = \frac{\partial v_{\bar{x}'}}{\partial \bar{x}'} = \frac{\partial v_{x'}}{\partial x'} = e_1, \qquad \bar{e}_2 = \frac{\partial v_{\bar{y}'}}{\partial \bar{y}'} = \frac{\partial v_{z'}}{\partial z'} = e_3,$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\partial v_{\bar{z}'}}{\partial \bar{z}'} = \frac{\partial v_{y'}}{\partial y'} = e_2,$$

$$\tau_{\bar{x}'\bar{x}'} = \tau_{x'x'}.$$

Соотношение (3.9) можно применить, согласно допущению II, и к системе координат $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, $\bar{z}'$:

$$\tau_{\bar{x}'\bar{x}'} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3,$$

откуда, на основании вышеупомянутых формул, выводим:

$$\tau_{x'x'} = a_1e_1 + a_2e_3 + a_3e_2.$$

Сравнение с формулой (3.9) приводит нас к искомому соотношению $a_2 = a_3$. Вводя теперь обозначения

$$a_1 = \lambda + 2\mu, \quad a_2 = a_3 = \lambda,$$

мы можем переписать формулы (3.9) и (3.10) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{x'x'} &= \lambda(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu e_1, \\ \tau_{y'y'} &= \lambda(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu e_2, \\ \tau_{z'z'} &= \lambda(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu e_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Докажем теперь, что в системе координат x', y', z' все касательные напряжения $\tau_{x'y'}$, $\tau_{x'z'}$ и т. д. обращаются в нуль. Достаточно обнаружить, что $\tau_{x'y'} = 0$.

Согласно допущению II, мы должны иметь:

$$\tau_{x'y'} = a_4e_1 + a_5e_2 + a_6e_3, \tag{3.12}$$

где a_4, a_5, a_6 — некоторые постоянные коэффициенты. Но произведём преобразование координат

$$\bar{x}' = x', \quad \bar{y}' = -y', \quad \bar{z}' = -z'.$$

Новые оси координат опять будут главными осями тензора скоростей деформаций, причём имеют место формулы:

$$v_{\bar{x}'} = v_{x'}, \quad v_{\bar{y}'} = -v_{y'}, \quad v_{\bar{z}'} = -v_{z'},$$

$$\bar{e}_1 = \frac{\partial v_{\bar{x}'}}{\partial \bar{x}'} = \frac{\partial v_{x'}}{\partial x'} = e_1, \quad \bar{e}_2 = \frac{\partial v_{\bar{y}'}}{\partial \bar{y}'} = \frac{\partial v_{y'}}{\partial y'} = e_2,$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\partial v_{\bar{z}'}}{\partial \bar{z}'} = \frac{\partial v_{z'}}{\partial z'} = e_3, \quad \tau_{\bar{x}'\bar{y}'} = -\tau_{x'y'}.$$

Последняя формула вытекает из следующих соображений: $\tau_{x'y'}$ есть проекция на ось y' напряжения, действующего на площадку, внешняя нормаль к которой имеет направление оси x'; $\tau_{\bar{x}'\bar{y}'}$ есть проекция на ось $\bar{y}'$ напряжения, действующего на ту же самую площадку, ибо оси $\bar{x}'$ и x' одинаково направлены. И так как оси $\bar{y}'$ и y' имеют прямо противоположное направление, то ясно, что $\tau_{\bar{x}'\bar{y}'} = -\tau_{x'y'}$.

Вследствие допущения II, мы должны иметь формулу:

$$\tau_{\bar{x}'\bar{y}'} = a_4\bar{e}_1 + a_5\bar{e}_2 + a_6\bar{e}_3.$$

На основании предыдущих равенств мы выводим отсюда, что

$$-\tau_{x'y'} = a_4e_1 + a_5e_2 + a_6e_3,$$

но тогда сравнение с формулой (3.12) показывает, что

$$a_4 = a_5 = a_6 = 0,$$

иными словами, что

$$\tau_{x'y'} = 0.$$

Итак, мы показали, что

$$\tau_{x'y'} = \tau_{x'z'} = \tau_{y'z'} = \tau_{y'x'} = \tau_{z'y'} = \tau_{z'x'} = 0. \tag{3.13}$$

Собирая вместе формулы (3.8), (3.11) и (3.13) и припоминая, что

$$e_1 + e_2 + e_3 = \operatorname{div} \boldsymbol{v},$$

приходим к следующим выражениям для составляющих тензора напряжений в системе осей x', y', z', служащих главными осями тензора скоростей деформаций:

$$\left.\begin{aligned} p_{x'x'} &= -p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu e_1, \\ p_{y'y'} &= -p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu e_2, \\ p_{z'z'} &= -p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu e_3, \\ p_{x'y'} &= p_{x'z'} = p_{y'x'} = p_{y'z'} = p_{z'x'} = p_{z'y'} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Из этих формул следует, что *главные оси тензора напряжений совпадают с главными осями тензора скоростей деформации*:

Выведем теперь выражения для составляющих тензора напряжений в произвольной прямолинейной прямоугольной системе координат.

Предварительно остановимся на нескольких элементарных понятиях из теории тензоров.

Легко прежде всего убедиться, что таблица девяти величин, заданных в любой системе координат следующим образом:

$$I=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{3.15}$$

определяет тензор; этот тензор называется *единичным тензором*. Пусть, далее, мы имеем два тензора:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}; \quad B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix},$$

тогда под *суммой этих тензоров* $A+B$ *и под произведением* $kA=Ak$ *тензора* A *на постоянное число* k понимаются следующие тензоры:

$$\left.\begin{aligned} A+B&=\begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{Vmatrix}, \\ kA=Ak&=\begin{Vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{Vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

При этих обозначениях девять равенств (3.14) могут быть следующим образом записаны в тензорной форме:

$$\begin{Vmatrix} p_{x'x'} & p_{x'y'} & p_{x'z'} \\ p_{y'x'} & p_{y'y'} & p_{y'z'} \\ p_{z'x'} & p_{z'y'} & p_{z'z'} \end{Vmatrix}=(-p+\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v})\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}+2\mu\begin{Vmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{Vmatrix}$$

или, вследствие (3.4), (3.15) и (2.11):

$$\Pi=(-p+\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v})I+2\mu\Phi. \tag{3.17}$$

Но если соответствующие составляющие двух тензоров равны в какой-либо системе координат, то они будут равны и в любой

другой системе координат. Поэтому предыдущее равенство в системе осей x, y, z принимает вид:

$$\begin{Bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{Bmatrix} =$$

$$= (-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v}) \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} + 2\mu \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2 \\ \frac{1}{2}\theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1 \\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix},$$

откуда вытекают следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu\varepsilon_1, & p_{xy} &= p_{yx} = \mu\theta_3, \\ p_{yy} &= -p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu\varepsilon_2, & p_{xz} &= p_{zx} = \mu\theta_2, \\ p_{zz} &= -p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu\varepsilon_3, & p_{yz} &= p_{zy} = \mu\theta_1. \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Из этих выражений ясно видна *симметричность тензора напряжений*.

Складывая первые три формулы (3.18) и вспоминая, что

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \operatorname{div} \boldsymbol{v},$$

легко получим равенство

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = -3p + (3\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \boldsymbol{v}, \tag{3.19}$$

В несжимаемой жидкости, где $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, коэффициент λ сам собой выпадает в выражениях для напряжений, и последние принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}; & p_{xy} &= p_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right), \\ p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}; & p_{xz} &= p_{zx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; & p_{yz} &= p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

В частном случае, когда мы имеем течение, параллельное оси Ox, так что $v_y = v_z = 0$, причём скорость течения $v_x = v$ есть функция одного только y, мы получаем из формул (3.20) для касательного напряжения выражение

$$p_{xy} = p_{yx} = \mu \frac{dv}{dy},$$

совпадающее с формулой (1.3), с рассмотрения которой мы начали эту главу.

Мы уже упоминали, что постоянная μ называется *коэффициентом внутреннего трения или коэффициентом вязкости*. Нетрудно установить размерность этого коэффициента. Если M есть символ единицы массы, L — единицы длины и T — единицы времени, то символом единицы ускорения будет LT^{-2} и единицы силы — MLT^{-2}, поэтому символом единицы напряжения p_{xy}, являющегося силой, отнесённой к единице площади, будет $ML^{-1}T^{-2}$, с другой стороны, размерностью величины $\partial v_x/\partial y$ служит, очевидно, T^{-1}. Так как

$$\mu = \frac{p_{xy}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}},$$

то для размерности μ получаем выражение $ML^{-1}T^{-1}$. Так, например, в системе CGS μ будет измеряться в *г/см · сек*. Например, коэффициент вязкости для воды при температуре 0° С равняется 0,018 *г/см · сек*, а при температуре 20° С этот коэффициент имеет значение 0,010 *г/см · сек*; для воздуха при температуре 0° С и давлении 760 *мм* ртутного столба коэффициент вязкости равняется 0,00017 *г/см · сек*.

Часто для характеристики вязкости употребляют вместо μ другую величину, а именно

$$\nu = \frac{\mu}{\rho};$$

эта величина носит название *кинематического коэффициента вязкости*. Так как размерность ρ есть ML^{-3}, то размерностью ν является L^2T^{-1}; в системе CGS значения ν измеряются в *см²/сек*; например, при температуре 0° С кинематический коэффициент вязкости для воды равняется 0,018 *см²/сек*, а для воздуха при вышеуказанных условиях 0,133 *см²/сек*.

В общем случае сжимаемой жидкости коэффициент λ остаётся наряду с μ, так что формулы для напряжений принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&p_{xx} = -p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad p_{xy} = p_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right),\\
&p_{yy} = -p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad p_{xz} = p_{zx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right),\\
&p_{zz} = -p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad p_{yz} = p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (3.21)$$

Чтобы определить коэффициент λ, можем сделать следующее допущение: примем, что давление в вязкой жидкости всегда равно взятому с обратным знаком среднему арифметическому из трёх напряжений, приложенным к трём взаимно перпендикулярным площадкам. Формулы (3.19) показывают, что это само собой выполнится для

несжимаемой жидкости. Чтобы это допущение выполнялось и в общем случае, надо, очевидно, положить

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \text{ [1]}. \tag{3.22}$$

§ 4. Уравнения движения вязкой жидкости. В главе II, § 2 части первой было выведено общее уравнение движения сплошной среды:

$$\int_\tau (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{w})\rho\, d\tau + \int_S \boldsymbol{p}_n\, dS = 0. \tag{4.1}$$

Здесь τ означает произвольный объём, вырезаемый внутри жидкости поверхностью S, ρ — плотность частицы жидкости, $\boldsymbol{F}$ — вектор массовой силы, отнесённой к единице массы, $\boldsymbol{w}$ — ускорение частицы жидкости, n — направление внешней нормали к поверхности S, $\boldsymbol{p}_n$ — вектор напряжения поверхностной силы. Мы имеем при этом равенство

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_x \cos(n,\ x) + \boldsymbol{p}_y \cos(n,\ y) + \boldsymbol{p}_z \cos(n,\ z). \tag{4.2}$$

Преобразуем теперь поверхностный интеграл, входящий в формулу (4.1), в объёмный. Для этого заметим, что имеет место следующая формула:

$$\int_S \boldsymbol{a} \cos(n,\ x)\, dS = \int_\tau \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x}\, d\tau, \tag{4.3}$$

где $\boldsymbol{a}$ есть произвольный вектор, непрерывный вместе со своей производной по x в объёме τ.

В самом деле, если составляющие вектора $\boldsymbol{a}$ суть a_x, a_y, a_z, так что

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k},$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — координатные орты, то мы имеем, применяя формулу Гаусса, следующие три формулы:

$$\int_S a_x \cos(n,\ x)\, dS = \int_\tau \frac{\partial a_x}{\partial x}\, d\tau,$$

$$\int_S a_y \cos(n,\ x)\, dS = \int_\tau \frac{\partial a_y}{\partial x}\, d\tau,$$

$$\int_S a_z \cos(n,\ x)\, dS = \int_\tau \frac{\partial a_z}{\partial x}\, d\tau.$$

[1]) Некоторые физики склонны вводить понятие второго коэффициента вязкости или «второй вязкости» и не пользоваться допущением, приводящим к формуле (3.22), см., например, Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошной среды, Гостехиздат, 1944.

Умножая первое из этих равенств на $\boldsymbol{i}$, второе на $\boldsymbol{j}$, третье на $\boldsymbol{k}$ и складывая три полученные формулы, мы докажем равенство (4.3).

Но тогда ясно, что на основании равенства (4.3) и аналогичных ему равенств, мы имеем:

$$\int\limits_S \boldsymbol{p}_n\, dS = \int\limits_S [\boldsymbol{p}_x \cos(n,\ x) + \boldsymbol{p}_y \cos(n,\ y) + \boldsymbol{p}_z \cos(n,\ z)]\, dS =$$

$$= \int\limits_\tau \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z}\right) d\tau.$$

Потому равенство (4.1) принимает вид:

$$\int\limits_\tau \left[(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{w})\rho + \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z}\right] d\tau = 0.$$

Мы, конечно, предполагаем при этом, что все те функции и их производные, которые мы рассматриваем, являются непрерывными функциями от своих независимых переменных. Но при этом условии предыдущее равенство, в котором τ есть *произвольный* объём жидкости, может иметь место только в том случае, если в каждой жидкости в любой момент движения подынтегральная функция будет равна нулю.

Мы приходим таким образом к следующему уравнению движения:

$$\boldsymbol{F} - \boldsymbol{w} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z}\right) = 0. \tag{4.4}$$

Его можно записать также в форме

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \frac{1}{\rho}\operatorname{div} \Pi, \tag{4.5}$$

если условиться называть расхождением тензора Π и обозначать через $\operatorname{div} \Pi$ вектор

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = \operatorname{div} \Pi. \tag{4.6}$$

Проекциями этого вектора на оси координат, очевидно, являются:

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{div}\Pi)_x &= \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}, \\ (\operatorname{div}\Pi)_y &= \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}, \\ (\operatorname{div}\Pi)_z &= \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

ибо проекциями вектора $\boldsymbol{p}_x$ являются p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} и т. д.

Обозначая проекции массовой силы F на оси координат через X, Y, Z и вспоминая, что проекциями ускорения w являются величины dv_x/dt, dv_y/dt, dv_z/dt, найдём из (4.5) уравнения движения в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= X+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right),\\ \frac{dv_y}{dt} &= Y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}\right),\\ \frac{dv_z}{dt} &= Z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Воспользуемся теперь формулами (3.21), (3.22) и предположим, что $\mu = \text{const}$. Тогда без труда получим, что, например:

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}\Pi)_x = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial \operatorname{div} v}{\partial x}+2\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\\ &+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\,\partial y}+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}+\mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\,\partial z}=\\ =-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial \operatorname{div} v}{\partial x}&+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\\ +\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial \operatorname{div} v}{\partial x}+\mu\,\Delta v_x.\end{aligned}$$

Поэтому, выписывая ещё в полном виде проекции ускорения, получим из (4.8) следующие окончательные уравнения движения вязкой жидкости:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} &= X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\nu}{3}\frac{\partial \operatorname{div} v}{\partial x}+\nu\Delta v_x,\\ \frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\nu}{3}\frac{\partial \operatorname{div} v}{\partial y}+\nu\Delta v_y,\\ \frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\nu}{3}\frac{\partial \operatorname{div} v}{\partial z}+\nu\Delta v_z.\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

К этим уравнениям нужно присоединить ещё уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0. \tag{4.10}$$

Уравнения (4.9) называются *уравнениями Навье-Стокса*. Они были опубликованы французскими учёными Навье (Navier), рассматривавшим только случай несжимаемой жидкости, в 1827 г., и Пуассоном (Poisson), рассматривавшим случай сжимаемой жидкости,

в 1831 г.[1]). И тот и другой исходили из гипотетических представлений о молекулярных силах. В 1843 г. Сен-Венан (Saint-Venant) и в 1845 г. Стокс[2]) (Stokes) дали новые выводы уравнений (4.9), по образцу которых построено и наше рассуждение.

Уравнения (4.9) имеют очень сложный вид, поэтому их точное интегрирование удаётся лишь в редких случаях. Однако в ряде случаев получается хорошее совпадение результатов экспериментов с результатами вычислений, основанных на использовании их. Это показывает, что уравнения (4.9) с большой степенью точности описывают движения действительных жидкостей. Можно поэтому сказать, что построение теории движения вязких жидкостей сводится к всестороннему исследованию этих уравнений.

§ 5. Различные формы уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости. Если мы имеем дело с движением вязкой несжимаемой жидкости, то четырёх уравнений (4.9) и (4.10) недостаточно для определения пяти неизвестных функций p, ρ, v_x, v_y, v_z. В этом случае необходимо учитывать также и термодинамические свойства изучаемых процессов.

В § 10 этой главы мы дадим подробный вывод дополнительного соотношения — «уравнения притока тепла» для вязкой сжимаемой жидкости, а пока обратимся к жидкости несжимаемой.

Уравнениям движения вязкой несжимаемой жидкости можно придать различную форму; в одних случаях выгодно пользоваться одной формой уравнений, в других — другой.

Прежде всего, уравнения (4.9) и (4.10) для случая несжимаемой жидкости упрощаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta v_x,\\
\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta v_y,\\
\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta v_z,\\
\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(5.1)$$

---

[1]) Navier C. L., M. H. Mémoire sur les Lois du Mouvement des Fluides, Mém. de l'Acad. des Sciences **6** (1872), Poisson, S. D., Mémoire sur les Équations générales de l'équilibre et du Mouvement des Corps solides élastiques et des Fluides. Journal de l'École Polytechnique **13** (1831).

[2]) Saint-Venant, Note á joindre au mémoire sur la dynamique des fluides, Comptes Rendus de l'Acad. a Paris **17** (1843), 240; Stokes G. G., On the Theories of the Jnternal Friction of Fluids in Motion, Math. and Phys. Papers **1**, 75.

В векторной форме эти уравнения имеют вид:

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\Delta v; \quad \operatorname{div} v = 0. \tag{5.2}$$

При $\nu = 0$ эти уравнения приводятся к уравнениям движения идеальной жидкости.

Последние уравнения были записаны нами в § 6—7 второй главы части первой, в так называемой форме Ламба. Дадим обобщение этой формы на случай вязкой жидкости. Для этого заметим, что мы имеем для любого вектора a следующее тождество:

$$\Delta a = \operatorname{grad}\operatorname{div} a - \operatorname{rot}\operatorname{rot} a. \tag{5.3}$$

Применим теперь это тождество к вектору скорости несжимаемой жидкости v, причём воспользуемся последним равенством (5.2) и обозначением

$$\Omega = \operatorname{rot} v,$$

тогда получим

$$\Delta v = -\operatorname{rot}\Omega.$$

Вспоминая уравнение (6.4) главы II части первой, можем поэтому переписать первое уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{v^2}{2} + \Omega \times v = F - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p - \nu \operatorname{rot}\Omega.$$

Предположим ещё, что массовая сила F имеет потенциал V:

$$F = -\operatorname{grad} V,$$

и введём обозначение

$$H = \frac{p}{\rho} + V + \frac{v^2}{2},$$

тогда уравнения гидромеханики вязкой несжимаемой жидкости примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega \times v &= -\operatorname{grad} H - \nu \operatorname{rot}\Omega, \\ \operatorname{div} v &= 0, \\ \Omega &= \operatorname{rot} v, \\ H &= \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + V. \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Во многих случаях, как, например, при изучении вопроса об обтекании цилиндра или сферы, бывает удобно пользоваться, вместо прямолинейных прямоугольных координат x, y, z, криволинейными координатами, чаще всего ортогональными, например, цилиндрическими или сферическими. Представляет поэтому интерес иметь

уравнения гидромеханики вязкой несжимаемой жидкости в криволинейных ортогональных координатах.

Пусть q_1, q_2, q_3 суть криволинейные координаты, так что в некоторой области изменения этих координат имеются зависимости (для краткости мы обозначаем x через x_1, y через x_2 и z через x_3):

$$x_i = f_i(q_1, q_2, q_3) \qquad (i = 1, 2, 3);$$

решая эти три уравнения относительно q_1, q_2, q_3, получим обратные зависимости:

$$q_i = F_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Мы будем рассматривать только ортогональные криволинейные координаты; условием для этого является тождественное выполнение следующих трёх равенств:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = 0 \qquad (j \neq k).$$

Вводим далее в рассмотрение коэффициенты Ламэ:

$$H_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)^2} \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Тогда, как было показано в § 20 главы I части первой, мы имеем следующие выражения для основных операций векторного анализа — градиента, расхождения и вихря:

$$(\operatorname{grad} \varphi)_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{5.5}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right], \tag{5.6}$$

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{rot} \boldsymbol{a})_1 &= \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial (H_3 a_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (H_2 a_2)}{\partial q_3} \right], \\ (\operatorname{rot} \boldsymbol{a})_2 &= \frac{1}{H_3 H_1} \left[\frac{\partial (H_1 a_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (H_3 a_3)}{\partial q_1} \right], \\ (\operatorname{rot} \boldsymbol{a})_3 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (H_2 a_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (H_1 a_1)}{\partial q_2} \right]. \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

Исходя из этих формул и пользуясь тождеством (5.3), нетрудно найти выражения для проекций на оси криволинейных координат вектора $\Delta \boldsymbol{a}$. Обозначая через $(\Delta \boldsymbol{a})_i$ проекцию этого вектора на напра-

вление касательной к координатной линии q_1, будем, очевидно, иметь, что:

$$(\Delta \boldsymbol{a})_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left\{\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial (a_1H_2H_3)}{\partial q_1}+\frac{\partial (a_2H_3H_1)}{\partial q_2}+\frac{\partial (a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right]\right\}-$$
$$-\frac{1}{H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial (H_2a_2)}{\partial q_1}\right]-\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial (H_1a_1)}{\partial q_2}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial (H_1a_1)}{\partial q_3}\right]+\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial (H_3a_3)}{\partial q_1}\right]\right\}.$$

Для $(\Delta \boldsymbol{a})_2$ и $(\Delta \boldsymbol{a}_3)$ имеем две аналогичные формулы. Если раскрыть предыдущее выражение, то после длинных, но совершенно элементарных вычислений получим следующую окончательную формулу:

$$(\Delta \boldsymbol{a})_1 = \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_1^2}+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_2^2}+\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_3^2}+$$
$$+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial a_1}{\partial q_1}\frac{\partial\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\right)}{\partial q_1}+\frac{\partial a_1}{\partial q_2}\frac{\partial\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\right)}{\partial q_2}+\frac{\partial a_1}{\partial q_3}\frac{\partial\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\right)}{\partial q_3}\right\}+$$
$$+\frac{2}{H_1^2H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial a_2}{\partial q_1}-\frac{2}{H_1H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\frac{\partial a_2}{\partial q_2}+\frac{2}{H_1^2H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\frac{\partial a_3}{\partial q_1}-$$
$$-\frac{2}{H_1H_3^2}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\frac{\partial a_3}{\partial q_3}+\left\{\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial (H_2H_3)}{\partial q_1}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right]+\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{H_2}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right]\right\}a_1+$$
$$+\left\{\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial (H_3H_1)}{\partial q_2}\right]-\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{H_3}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right]\right\}a_2+$$
$$+\left\{\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial (H_1H_2)}{\partial q_3}\right]-\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\frac{H_2}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right]\right\}a_3. \quad (5.8)$$

Точно так же, применяя для вычисления проекций ускорения $\boldsymbol{w}$ на оси криволинейных координат формулу

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\operatorname{grad}\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}+\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}$$

и пользуясь формулами (5.5) и (5.7), после несложных вычислений получим:

$$w_1 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}+\frac{v_3}{H_3}\frac{\partial v_1}{\partial q_3}+\frac{v_1v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+$$
$$+\frac{v_1v_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{v_2^2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}-\frac{v_3^2}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} \quad (5.9)$$

и две аналогичные формулы для w_2 и w_3.

Теперь мы могли бы уже написать уравнения движения в проекциях на криволинейные оси координат, но предварительно мы хотим ещё показать, как вычисляются в криволинейных координатах составляющие тензора скоростей деформаций и тензора напряжений. Пусть M_1 и M_2 — две бесконечно близкие частицы жидкости, и пусть M_1' и M_2' — положения этих частиц через бесконечно малый промежуток времени dt. Обозначим криволинейные координаты точки M_1 через q_1, q_2, q_3, а точки M_2 — через $q_1+\delta q_1$, $q_2+\delta q_2$, $q_3+\delta q_3$. Криволинейные координаты точки M_1' будут (точка над буквой означает дифференцирование по времени):

$$q_i' = q_i + dq_i = q_i + \dot{q}_i\, dt,$$

но так как мы имеем равенства

$$ds_i = H_i\, dq_i, \qquad v_i = \frac{ds_i}{dt} = H_i \dot{q}_i,$$

то будем иметь:

$$q_i' = q_i + \frac{v_i(q_1, q_2, q_3, t)}{H_i(q_1, q_2, q_3)}\, dt.$$

Точно так же, обозначая координаты точки M_2' через $q_i'+\delta q_i'$, будем иметь:

$$q_i'+\delta q_i' = q_i+\delta q_i + \frac{v_i(q_1+\delta q_1, q_2+\delta q_2, q_3+\delta q_3, t)}{H_i(q_1+\delta q_1, q_2+\delta q_2, q_3+\delta q_3)}\, dt.$$

Сравнивая это равенство с предыдущим, находим:

$$\delta q_i' = \delta q_i + \delta\left(\frac{v_i}{H_i}\right) dt.$$

Но ясно, что $\delta q_i'$ означает значение δq_i в момент $t+dt$; можно поэтому, с другой стороны, написать, что

$$\delta q_i' = \delta q_i + d\,\delta q_i.$$

Поэтому мы имеем следующее равенство:

$$d\,\delta q_i = \delta\left(\frac{v_i}{H_i}\right) dt \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Рассмотрим теперь бесконечно малый жидкий отрезок $M_1M_2 = \delta s$ и его удлинение $d\,\delta s = M_1'M_2' - M_1M_2$. Для квадрата бесконечно малого элемента длины $\delta s = M_1M_2$ мы имеем в криволинейных координатах выражение

$$\delta s^2 = \sum_{i=1}^{3} H_i^2(q_1, q_2, q_3)\,\delta q_i^2.$$

Дифференцирование даёт:

$$\delta s \cdot d\,\delta s = \sum_{i=1}^{3} H_i\, dH_i\, \delta q_i^2 + \sum_{i=1}^{3} H_i^2\, \delta q_i\, d\,\delta q_i.$$

Мы имеем далее очевидные формулы:

$$dH_i = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} dq_k = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} q_k \, dt = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \frac{v_k}{H_k} dt,$$

$$d\,\delta q_i = \delta\left(\frac{v_i}{H_i}\right) dt = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial\left(\frac{v_i}{H_i}\right)}{\partial q_k} \delta q_k \, dt,$$

поэтому предыдущая формула может быть приведена к виду:

$$\frac{\delta s \cdot d\,\delta s}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left\{ \frac{v_k H_i}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \delta q_i^2 + \frac{\partial\left(\frac{v_i}{H_i}\right)}{\partial q_k} H_i^2 \delta q_i \, \delta q_k \right\}.$$

Обозначим теперь через $\delta s_i = H_i \delta q_i$ элементарные перемещения в направлении координатных линий, тогда можем написать:

$$\frac{\delta s \cdot d\,\delta s}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{v_k}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \delta s_i^2 + \frac{H_i}{H_k} \frac{\partial\left(\frac{v_i}{H_i}\right)}{\partial q_k} \delta s_i \delta s_k \right). \quad (5.10)$$

В случае прямоугольных координат x, y, z мы имеем $H_1 = H_2 = H_3 = 1$, $v_1 = v_x$, $v_2 = v_y$, $v_3 = v_z$, $\delta s_1 = \delta x$, $\delta s_2 = \delta y$, $\delta s_3 = \delta z$, и легко убедиться, что предыдущее выражение принимает вид:

$$\frac{\delta s \cdot d\,\delta s}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x^2 + \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y^2 + \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta z^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \delta x \, \delta y +$$

$$+ \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \delta x \, \delta z + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \delta y \, \delta z =$$

$$= \varepsilon_1 \delta x^2 + \varepsilon_2 \delta y^2 + \varepsilon_3 \delta z^2 + \theta_1 \delta y \, \delta z + \theta_2 \delta z \, \delta x + \theta_3 \delta x \, \delta y. \quad (5.11)$$

Но теперь, сравнивая выражение (5.10) с (5.11) и обозначая в случае криволинейных координат составляющие тензора скоростей деформаций

$$\Phi = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2 \\ \frac{1}{2}\theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1 \\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3 \end{Vmatrix}$$

теми же буквами, что и в случае прямолинейных координат, легко найдём искомые выражения, например:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1 = \sum_{k=1}^{3} \frac{v_k}{H_1 H_k}\frac{\partial H_1}{\partial q_k} + \frac{\partial\left(\frac{v_1}{H_1}\right)}{\partial q_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3},\\
&\theta_1 = \frac{H_2}{H_3}\frac{\partial\left(\frac{v_2}{H_2}\right)}{\partial q_3} + \frac{H_3}{H_2}\frac{\partial\left(\frac{v_3}{H_3}\right)}{\partial q_2} =\\
&\quad = \frac{1}{H_3}\frac{\partial v_2}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial v_3}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{v_3}{H_2 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}.
\end{aligned}\right\} \quad (5.12)$$

Выражения для ε_2, ε_3, θ_2, θ_3 получаются из предыдущих циклической перестановкой.

Так как тензор напряжений

$$\Pi = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Vmatrix}$$

связан с тензором скоростей деформаций для случая несжимаемой жидкости соотношением

$$\Pi = -pI + 2\mu\Phi,$$

то для составляющих тензора напряжений получим формулы следующего типа:

$$\left.\begin{aligned}
&p_{11} = -p + 2\mu\varepsilon_1 = -p + 2\mu\left\{\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right\},\\
&p_{12} = \mu\theta_3 = \mu\left\{\frac{1}{H_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (5.13)$$

Напишем теперь уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических и сферических координатах.

Рассмотрим сначала цилиндрические координаты r, θ, z, связанные с декартовыми координатами формулами:

$$\begin{aligned}
&x = r\cos\theta, && r = \sqrt{x^2 + y^2},\\
&y = r\sin\theta, && \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},\\
&z = z, && z = z.
\end{aligned}$$

В этой системе координат коэффициенты Ламэ имеют следующие значения:

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_z = 1.$$

Обозначим через F_r, F_θ, F_z проекции массовой силы F на оси цилиндрических координат. Тогда, производя вычисление всех чле-

нов уравнений (5.2) по формулам (5.9), (5.5), (5.8) и (5.6), найдём окончательно уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r}=\\
&\quad=F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{v_r}{r^2}\right),\\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r}=\\
&\quad=F_\theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2}\right),
\end{aligned}\right\}\qquad(5.14)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=$$
$$=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right),$$
$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0.$$

Формулы (5.13) позволяют составить составляющие тензора напряжений в цилиндрических координатах

$$\left.\begin{aligned}
&p_{rr}=-p+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}, && p_{r\theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right),\\
&p_{\theta\theta}=-p+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r}{r}\right), && p_{\theta z}=\mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right),\\
&p_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}, && p_{zr}=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(5.15)$$

Сферические координаты r, θ, λ связаны с декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$x=r\sin\theta\cos\lambda,\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$y=r\sin\theta\sin\lambda,\quad \theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z},$$
$$z=r\cos\theta,\quad \lambda=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Коэффициенты Ламэ имеют следующие значения:

$$H_r=1,\quad H_\theta=r,\quad H_\lambda=r\sin\theta.$$

Поэтому уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в сферических координатах имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \lambda}-\frac{v_\theta^2+v_\lambda^2}{r}=\\
&=F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 r_r}{\partial \lambda^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\right.\\
&\left.+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda}-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2}v_\theta\right),\\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\lambda^2\operatorname{ctg}\theta}{r}=\\
&=F_\theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \lambda^2}+\right.\\
&\left.+\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right),\\
&\frac{\partial v_\lambda}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\lambda}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta}+\frac{v_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda}+\frac{v_r v_\lambda}{r}+\frac{v_\theta v_\lambda\operatorname{ctg}\theta}{r}=\\
&=F_\lambda-\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \lambda}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial \lambda^2}+\right.\\
&\left.+\frac{2}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \lambda}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda}-\frac{v_\lambda}{r^2\sin^2\theta}\right),\\
&\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda}+\frac{2v_r}{r}+\frac{v_\theta\operatorname{ctg}\theta}{r}=0,
\end{aligned}\right\}\quad(5.16)$$

причем для составляющих тензора напряжений получаются формулы:

$$\left.\begin{aligned}
&p_{rr}=-p+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r},\qquad p_{r\theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right),\\
&p_{\theta\theta}=-p+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r}{r}\right),\\
&p_{\theta\lambda}=\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta}-\frac{v_\lambda\operatorname{ctg}\theta}{r}\right),\\
&p_{\lambda\lambda}=-p+2\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda}+\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta\operatorname{ctg}\theta}{r}\right),\\
&p_{\lambda r}=\mu\left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \lambda}-\frac{v_\lambda}{r}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(5.17)$$

В этом параграфе мы рассматривали переменные Эйлера. Для некоторых задач представляет интерес использование переменных Лагранжа.

Чтобы записать уравнение (5.1) в переменных Лагранжа, представим сперва в этих переменных величины Δv_x, Δv_y, Δv_z.

Заметим сперва, что для любой функции $f(x, y, z, t)$ мы можем написать

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{D(f, y, z)}{D(x, y, z)},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{D(x, f, z)}{D(x, y, z)},\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{D(x, y, f)}{D(x, y, z)}$$

или, если ввести переменные Лагранжа a, b, c,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{D(f, y, z)}{D(a, b, c)}\frac{D(a, b, c)}{D(x, y, z)},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{D(x, f, z)}{D(a, b, c)}\frac{D(a, b, c)}{D(x, y, z)},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{D(x, y, f)}{D(a, b, c)}\frac{D(a, b, c)}{D(x, y, z)}.$$

В несжимаемой жидкости $\frac{D(a, b, c)}{D(x, y, z)}=1$. Для сокращения письма введём обозначение

$$\frac{D(A, B, C)}{D(a, b, c)}=[A, B, C].$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=[f, y, z],\quad \frac{\partial f}{\partial y}=[x, f, z],\quad \frac{\partial f}{\partial z}=[x, y, f],$$
$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial x}[f, y, z]+\frac{\partial}{\partial y}[x, f, z]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}[x, y, f]=[[f, y, z], y, z]+[x, [x, f, z], z]+[x, y[x, y, f]].$$

Поэтому взамен уравнения (5.1) мы получим в переменных Лагранжа

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=X-\frac{1}{\rho}[p, y, z]+\nu\left\{\left[\left[\frac{\partial x}{\partial t}, y, z\right], y, z\right]+\right.$$
$$\left.+\left[x, \left[x, \frac{\partial x}{\partial t}, z\right], z\right]+\left[x, y, \left[x, y, \frac{\partial x}{\partial t}\right]\right]\right\},$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=Y-\frac{1}{\rho}[x, p, z]+\nu\left\{\left[\left[\frac{\partial y}{\partial t}, y, z\right], y, z\right]+\right.$$
$$\left.+\left[x, \left[x, \frac{\partial y}{\partial t}, z\right], z\right]+\left[x, y\left[x, y, \frac{\partial y}{\partial t}\right]\right]\right\},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=Z-\frac{1}{\rho}[x, y, p]+\nu\left\{\left[\left[\frac{\partial z}{\partial t}, y, z\right], y, z\right]+\right.$$
$$\left.+\left[x, \left[x, \frac{\partial z}{\partial t}, z\right], z\right]+\left[x, y\left[x, y\frac{\partial z}{\partial t}\right]\right]\right\}^{1}).$$

§ 6. Начальные и граничные условия. Начальные условия для задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости не отличаются от таковых же условий для случая идеальной жидкости. И в том и в другом случае должно быть задано в начальный момент $t=0$ распределение скорости во всей рассматриваемой области, т. е. должны быть заданы три следующие функции:

$$\left.\begin{aligned} v_x(x, y, z, 0)=f_1(x, y, z),\quad v_y(x, y, z, 0)=f_2(x, y, z),\\ v_z(x, y, z, 0)=f_3(x, y, z).\end{aligned}\right\}\quad (6.1)$$

[1]) См. Монин А. С., О лагранжевых уравнениях гидродинамики несжимаемой жидкости, ПММ, 1962.

Впрочем, в очень многих задачах приходится рассматривать движение или стационарное, или сводящееся к стационарному, и тогда вопроса о начальных условиях вовсе не возникает.

Напротив, граничные условия в случае вязкой жидкости будут иными, чем в случае идеальной жидкости. Это обстоятельство имеет громадное принципиальное значение. Нужно особенно подчеркнуть, что с математической точки зрения исследование движений вязкой жидкости отличается не только усложнённостью уравнений движения по сравнению со случаем идеальной жидкости, но и своеобразием пограничных условий.

Переходим теперь к формулировке пограничных условий в случае вязкой жидкости. Мы рассмотрим три случая, которые в дальнейшем нам понадобятся: 1) жидкость примыкает к неподвижной стенке, 2) жидкость примыкает к подвижной стенке и 3) жидкость ограничена свободной поверхностью.

Мы будем считать, что *в точках, где вязкая жидкость примыкает к твёрдой неподвижной стенке, скорость жидкости обращается в нуль.* Иными словами, в точках соприкосновения вязкой жидкости с твёрдой неподвижной стенкой не только нормальная составляющая скорости обращается в нуль, как это имеет место и для случая идеальной жидкости, но и касательная составляющая скорости тоже равна нулю. Таким образом, вязкая жидкость прилипает к твёрдым стенкам. В настоящее время считается, что это допущение достаточно хорошо подтверждается опытом.

В точках, в которых вязкая жидкость примыкает к подвижной стенке, мы потребуем выполнения следующего условия: *в этих точках скорость жидкости должна по величине и направлению совпадать со скоростью соответствующей точки стенки.*

Рассмотрим теперь случай свободной поверхности жидкости, граничащей с пустотой, где давление p_0 принимается равным нулю, или с воздухом, где давление принимается имеющим постоянное значение p_0. На такой поверхности должно выполняться, во-первых, кинематическое условие: *нормальная к свободной поверхности составляющая скорости должна совпадать со скоростью перемещения поверхности разрыва*, и во-вторых, динамическое условие: *вектор напряжения $\boldsymbol{p}_n$ для площадок, касательных к свободной поверхности, должен быть направлен по нормали к этим площадкам внутрь и по численной величине должен быть равен p_0*, так что мы должны иметь $p_{nn} = -p_0$, $p_{ns} = 0$, если s есть любое направление, касательное к поверхности в рассматриваемой точке.

Приведём теперь несколько соображений, показывающих, какое большое значение имеет правильный учёт граничных условий. Рассмотрим уравнения вязкой несжимаемой жидкости (5.4). Эти уравнения отличаются от уравнений идеальной жидкости только членом

$\nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}$. Если вектор $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ есть потенциальный вектор, т. е. если

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \chi,$$

то $\operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega} = 0$, и уравнения вязкой жидкости совпадут с уравнениями идеальной жидкости. В частности, это имеет место для безвихревого движения, когда $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$, т. е. когда

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi, \tag{6.2}$$

причём, вследствие уравнения неразрывности, φ есть гармоническая функция, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \tag{6.3}$$

Итак, мы имеем довольно общее решение уравнений движения несжимаемой жидкости, как вязкой, так и идеальной. Однако это решение, в случае идеальной жидкости позволяющее рассмотреть целый ряд задач, в случае вязкой жидкости оказывается почти совершенно бесполезным. Допустим, например, что мы рассматриваем задачу о прямолинейном и равномерном движении твёрдого тела в жидкости со скоростью U параллельно оси x. Тогда в случае идеальной жидкости мы имеем всего лишь одно граничное условие, которое должно выполняться во всех точках поверхности S, ограничивающей тело, а именно

$$v_n = U \cos(n, x) \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = U \cos(n, x), \tag{6.4}$$

где n есть направление нормали к поверхности S. Как известно, условие (6.4) определяет гармоническую вне поверхности S функцию φ единственным образом, если отвлечься от постоянного слагаемого, которое, по (6.2), не играет никакой роли при определении $\boldsymbol{v}$.

В случае вязкой жидкости мы имеем, вместо (6.4), во всех точках поверхности S три граничных условия:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = U, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \tag{6.5}$$

и легко видеть, что не существует решения уравнения (6.3), удовлетворяющего всем условиям (6.5).

Этот пример показывает нам, что трудность решения задач гидромеханики вязкой жидкости кроется не только в усложнённом виде уравнений движения, но и в бо́льшем, по сравнению со случаем идеальной жидкости, количестве пограничных условий.

Мы видим далее, что безвихревые движения не дают решений задач гидромеханики вязкой жидкости не потому, что они не удовлетворяют основным уравнениям движения, а потому, что они не выполняют пограничных условий. А это означает, что завихренность движений вязкой жидкости обусловливается наличием граничных условий, т. е. существованием прилипания жидкости к стенкам.

Поэтому в движениях вязкой жидкости следует, вообще говоря, ожидать наличия большой завихренности в областях вблизи стенок, в то время как в областях, далёких от стенок, движение может приближаться к потенциальному.

Особенно большое значение приобретают эти рассуждения в случае жидкостей с очень малыми коэффициентами вязкости. В самом деле, в этом случае уравнения движения всюду очень мало отличаются от уравнений движения идеальной жидкости и поэтому казалось бы, что соответствующие решения уравнений идеальной жидкости должны давать движения жидкости, очень мало отличающиеся от истинных движений вязкой жидкости. Но вся беда в том, что указанные решения уравнений идеальной жидкости не могут, вообще говоря, удовлетворить пограничным условиям, имеющим место для вязкой жидкости. Это приводит к тому, что движение даже маловязкой жидкости может очень сильно отличаться от движения идеальной жидкости и притом, главным образом, вблизи стенок.

§ 7. Диссипация энергии. В этом и двух следующих параграфах мы рассмотрим ряд общих свойств движений вязкой жидкости, причём будем исходить из выведенных выше общих уравнений движения.

Вглядываясь внимательным образом в уравнения (5.1), мы можем прежде всего подметить необратимость процессов, описываемых этими уравнениями. Это означает следующее: рассмотрим некоторое движение вязкой жидкости, происходящее под действием сил, не зависящих от времени, и в некоторый момент времени $t=0$ определим поле скоростей; переменим теперь направления всех скоростей на обратные и примем это распределение скоростей за начальное; тогда жидкость будет совершать некоторое движение. Если бы жидкость была идеальной, то каждая частица жидкости проходила бы в обратном порядке ту траекторию, по которой она двигалась до момента $t=0$ и притом с теми же самыми скоростями, но только прямо противоположно направленными; в случае вязкой жидкости этого обстоятельства существовать не будет — новое движение не будет уже иметь такой непосредственной связи с первоначальным. С математической точки зрения это последнее утверждение сводится к тому, что если мы имеем решения $v(x, y, z, t)$ и $p(x, y, z, t)$ уравнений (5.1), то функции

$$\left.\begin{aligned} v_1(x, y, z, t) &= -v(x, y, z, -t), \\ p_1(x, y, z, t) &= p(x, y, z, -t) \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

не будут уже давать решения уравнений (5.1). В самом деле, соотношения (7.1) приводят к равенствам типа:

$$\frac{\partial v_{1x}}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad v_{1x}\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} = v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad v_{1y}\frac{\partial v_{1x}}{\partial y} = v_y\frac{\partial v_x}{\partial y},$$

$$v_{1z}\frac{\partial v_{1x}}{\partial z} = v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x},$$

причём в левых частях этих равенств аргументами являются x, y, z, t, а в правых x, y, z, $-t$. С другой стороны, мы, очевидно, имеем равенства:

$$\Delta v_{1x} = -\Delta v_x, \quad \Delta v_{1y} = -\Delta v_y, \quad \Delta v_{1z} = -\Delta v_z,$$

а тогда ясно, что функции v_1 и p_1 не удовлетворяют системе (5.1), что и доказывает необратимость движения вязкой жидкости.

С этим обстоятельством тесно связано наличие так называемой *диссипации энергии*, которая состоит в том, что при движениях вязкой жидкости некоторая часть механической энергии переходит в энергию тепловую. Исходя из уравнений движения, мы можем, конечно, обнаружить только потерю механической энергии, причём можем подсчитать количество теряемой энергии. О том, что эта энергия переходит в тепловую, мы судим уже на основании общего принципа сохранения энергии, по которому при потере энергии в одном каком-либо виде должно появиться эквивалентное количество энергии в других формах.

Рассмотрим внутри жидкости произвольный объём τ, ограниченный поверхностью S. Как выше, обозначим через $\boldsymbol{F}$ массовую силу. Элемент $d\tau$ имеет массу $\rho\, d\tau$, поэтому массовая сила, приложенная к элементу $d\tau$, будет равна $\boldsymbol{F}\rho\, d\tau$, а работа этой силы за время dt будет равна $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\rho\, d\tau\, dt$, ибо перемещение элемента жидкости $d\tau$ равно $\boldsymbol{v}\, dt$. Работа всех массовых сил, приложенных ко всем элементам объёма τ, будет равна:

$$A_1 = \int_\tau \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\rho\, d\tau\, dt. \tag{7.2}$$

Далее, к элементу dS поверхности S приложена сила $\boldsymbol{p}_n\, dS$, работа которой за время dt будет равна $\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v}\, dS\, dt$, а работа поверхностных сил, приложенных ко всем элементам поверхности S, будет равна:

$$A_2 = \int_S \boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v}\, dS\, dt. \tag{7.3}$$

Пользуясь формулой (3.1) и формулой Гаусса, мы можем преобразовать выражение A_2:

$$A_2 = \int_S \{\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{v}\cos(n, x) + \boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{v}\cos(n, y) + \boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{v}\cos(n, z)\}\, dS\, dt =$$
$$= \int_\tau \left\{\frac{\partial(\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{v})}{\partial z}\right\} dt\, d\tau;$$

мы имеем далее:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{v})}{\partial z} = \left(\frac{\partial\boldsymbol{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial\boldsymbol{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial\boldsymbol{p}_z}{\partial z}\right)\cdot\boldsymbol{v} +$$
$$+ \boldsymbol{p}_x\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x} + \boldsymbol{p}_y\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y} + \boldsymbol{p}_z\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z} = \operatorname{div}\Pi\cdot\boldsymbol{v} + E,$$

причём мы пользуемся следующим обозначением:

$$E = \boldsymbol{p}_x \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + \boldsymbol{p}_y \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + \boldsymbol{p}_z \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} =$$

$$= p_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x} + p_{xy}\frac{\partial v_y}{\partial x} + p_{xz}\frac{\partial v_z}{\partial x} + p_{yx}\frac{\partial v_x}{\partial y} + p_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y} + p_{yz}\frac{\partial v_z}{\partial y} +$$

$$+ p_{zx}\frac{\partial v_x}{\partial z} + p_{zy}\frac{\partial v_y}{\partial z} + p_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

или, что то же,

$$E = p_{xx}\varepsilon_1 + p_{yy}\varepsilon_2 + p_{zz}\varepsilon_3 + p_{xy}\theta_3 + p_{xz}\theta_2 + p_{yz}\theta_1. \qquad (7.4)$$

Итак,

$$A_1 + A_2 = \int_\tau [\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\rho + \operatorname{div} \Pi \cdot \boldsymbol{v} + E]\, d\tau\, dt.$$

Воспользуемся теперь уравнениями движения (4.5), тогда получим

$$A_1 + A_2 = \int_\tau [\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}\rho + E]\, d\tau\, dt.$$

Но если обозначить через T кинетическую энергию рассматриваемого объёма:

$$T = \int_\tau \frac{\rho v^2}{2}\, d\tau, \qquad (7.5)$$

то будем, очевидно, иметь:

$$dT = \int_\tau \rho d\left(\frac{v^2}{2}\right) d\tau,$$

и так как

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{1}{2} d(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}\, dt,$$

то

$$dT = \int_\tau \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}\, d\tau\, dt.$$

Поэтому окончательно получаем:

$$A_1 + A_2 = dT + \int_\tau E\, d\tau\, dt. \qquad (7.6)$$

Это равенство говорит, что производимая массовыми и поверхностными силами работа только частью идёт на увеличение кинетической энергии T. Другая часть этой работы, которая, будучи отнесена к единице объёма и единице времени, численно равняется E, в случае несжимаемой жидкости пропадает, как механическая работа.

Таким образом, в случае несжимаемой жидкости количество диссипирующейся энергии, т. е. количество механической энергии, превращающейся в тепловую, будучи отнесено к единице времени и единице объёма, определяется выражением (7.4).

Если воспользоваться формулами типа

$$p_{xx} = -p + 2\mu\varepsilon_1, \qquad p_{xy} = \mu\theta_3$$

и условием несжимаемости

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

то легко получим другое выражение для

$$E = \mu\left[2\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right] =$$
$$= \mu\left\{2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2\right\}. \qquad (7.7)$$

Эта формула показывает, что диссипация энергии отсутствует только в таких движениях жидкости, когда все составляющие тензора скоростей деформаций приводятся к нулю, т. е., когда движение сводится к комбинации поступательного и вращательного движений, иначе говоря, сводится к движению твёрдого тела.

§ 8. Обобщение уравнений Гельмгольца. В главе V части первой при рассмотрении вихревых движений в идеальной жидкости были выведены уравнения Гельмгольца. Смысл этих уравнений заключается в том, что они дают возможность количественного учёта изменений, происходящих с вихрями. Выше было отмечено, что громадное большинство движений вязкой жидкости является движениями вихревыми. Понятно поэтому то большое значение, которое должны иметь в случае вязкой жидкости уравнения, аналогичные уравнениям Гельмгольца. К выводу этих уравнений, протекающему совершенно аналогично случаю идеальной жидкости, мы теперь и приступим, причём мы предположим для определённости, что имеем дело с вязкой несжимаемой жидкостью, находящейся под действием массовых сил, имеющих потенциал. Тогда основные уравнения гидромеханики даются формулами (5.4), первая из которых имеет вид:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} H - \nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}.$$

Возьмём от обеих частей этого равенства операцию rot, тогда получим:

$$\operatorname{rot} \frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{rot}\left[\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}\right] = -\nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}, \qquad (8.1)$$

ибо $\operatorname{rot}\operatorname{grad} H = 0$. Заметим теперь, что, с одной стороны,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

с другой стороны,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\Omega} = \operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0.$$

Поэтому формула векторного анализа

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b}$$

сразу даёт нам, что

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}.$$

Тогда так же формула (5.3) сразу показывает, что

$$\Delta \boldsymbol{\Omega} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}.$$

Замечая, наконец, что

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial \operatorname{rot} \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t},$$

мы можем записать уравнение (8.1) в виде:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \nu \Delta \boldsymbol{\Omega}$$

или короче:

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\Omega}. \tag{8.2}$$

Это уравнение, равносильно трём скалярным уравнениям, первое из которых мы выписываем:

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Omega_x}{\partial z} = \\ = \Omega_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \nu \Delta \Omega_x, \tag{8.3}$$

и представляет собою обобщение уравнения Гельмгольца. Полагая $\nu = 0$, мы получим уравнения, установленные Гельмгольцем для случая идеальной несжимаемой жидкости. В главе V части первой было подробно исследовано физическое значение этих последних уравнений. Из сказанного там вытекает, что уравнение (8.2) при $\nu = 0$ является математическим выражением следующего факта: вихри с течением времени изменяются таким образом, что вихревая линия все время совпадает с той жидкой линией, с которой она совпадала в начальный момент времени, причём интенсивность любой вихревой трубки с течением времени не изменяется. Иными словами, вихри перемещаются вместе с частицами. Таким образом, те члены уравнения (8.2), которые не зависят от вязкости, определяют такое изменение вихрей, которое можно коротко охарактеризовать как перенос вихрей вместе с частицами жидкости.

Остаётся выяснить какое значение имеет последний член в уравнении (8.2) или в уравнениях (8.3). Рассмотрим, например, уравнение (8.3) и заметим, что, как показывается в векторном анализе [1]),

$$(\Delta\varphi)_{M_0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{6}{S\varepsilon^2} \int_S (\varphi_M - \varphi_{M_0})\, dS,$$

где M есть переменная точка сферы S с центром в точке M_0, радиус которой равен ε. Отсюда вытекает, что если $(\Delta\varphi)_{M_0} > 0$, то среднее значение функции φ на бесконечно малой сфере с центром в точке M_0 больше значения функции φ в центре M_0 этой сферы; если же $(\Delta\varphi)_{M_0} < 0$, то среднее значение функции φ на сфере меньше значения этой функции в центре сферы. Вглядываясь теперь в уравнение (8.3), мы замечаем, что если $\Delta\Omega_x > 0$, то от члена с вязкостью величина $\partial\Omega_x/\partial t$ получает положительную слагаемую, т. е. в этом случае влияние вязкости сказывается в уравнении Ω_x. Но, как мы только что указывали, в этом случае среднее значение Ω_x на бесконечно малой сфере больше значения Ω_x в центре этой сферы. Таким образом вязкость стремится сравнять значение Ω_x в какой-либо точке со значениями Ω_x в окружающих точках. Аналогичные обстоятельства имеют место и в случае $\Delta\Omega_x < 0$. Отсюда мы можем вывести заключение, что действие вязкости сводится к выравниванию значений вихрей внутри жидкости. Коротко этот процесс выравнивания величин вихрей можно назвать *диффузией* вихрей. Итак, член $\nu\Delta\Omega$ в уравнении (8.2), зависящий от вязкости, определяет изменение вихрей, сводящееся к их диффузии. В дальнейшем мы будем иметь несколько конкретных примеров диффузии вихрей.

Особенно простой и важный вид получает уравнение Гельмгольца в случае плоского движения. В этом случае $v_z = 0$, а v_x и v_y не зависит от z. Уравнение неразрывности принимает вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

и показывает, что существует функция тока $\Psi(x, y, t)$, через которую проекции скорости выражаются формулами:

$$v_x = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \tag{8.4}$$

Из трёх составляющих вихря только одна Ω_z может быть отлична от нуля. А именно, мы имеем:

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\Delta\Psi. \tag{8.5}$$

[1]) См., например, Кочин Н. Е., Векторное исчисление, ГОНТИ, 1938, стр. 197.

Обобщённое уравнение Гельмгольца сводится к одному уравнению, аналогичному уравнению (8.3), имеющему вид:

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} = \nu \Delta \Omega_z. \tag{8.6}$$

Подставляя сюда значения v_x, v_y и Ω_z, окончательно находим следующее уравнение для функции тока Ψ:

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \Psi. \tag{8.7}$$

Это уравнение, играющее фундаментальную роль при изучении плоских движений вязкой жидкости, является, таким образом, математическим выражением тех изменений, которые происходят с вихрями в этом движении.

§ 9. Закон подобия. Число Рейнольдса. В предыдущих параграфах мы уже вывели, опираясь на общие уравнения движения вязкой жидкости, целый ряд свойств этих движений, например, что эти движения должны быть вихревыми движениями, что с течением времени происходит диффузия вихрей, что кинетическая энергия движения частью переходит в тепловую и т. д.

В настоящем параграфе мы, также исходя из общих уравнений гидромеханики вязкой жидкости, рассмотрим очень важный вопрос о законах подобия в гидромеханике, а также приведём ряд связанных с этим вопросом соображений.

Вопрос о подобии в гидромеханике особенно важен потому, что экспериментальные исследования могут быть произведены зачастую только над моделями тел и по этим экспериментальным данным необходимо бывает выяснить, как будут вести себя в соответствующем потоке сами тела.

Положим, для определенности, в основу наших рассуждений уравнение гидромеханики вязкой несжимаемой жидкости. Выпишем одно из этих уравнений:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z. \tag{9.1}$$

Рассмотрим теперь какое-нибудь движение жидкости, например обтекание сферы радиуса a потоком, имеющим на бесконечности скорость U, или течение жидкости внутри цилиндрической трубы радиуса a со средней скоростью U и т. п.

Производя соответствующие экспериментальные исследования, мы будем иметь дело с различными размерами обтекаемых тел, с различными скоростями движения и с жидкостями различной вязкости. В соответствии с этим, в результате опытов получается зависимость формы течения и других интересующих нас величин, как, например, численного значения сопротивления, испытываемого телом при его движении в жидкости, от целого ряда параметров. Оказывается,

однако, что, изучая движения жидкости около или внутри геометрически подобных тел, мы при определённых соотношениях параметров получаем геометрически подобные течения. А это имеет своим следствием, что интересующие нас величины, как, например, величина сопротивления, испытываемого телом, могут зависеть только от определённых комбинаций упомянутых выше параметров. Для целей обработки экспериментальных данных это обстоятельство имеет громаднейшее значение, так как оно позволяет в большом числе случаев сводить результаты экспериментов к выявлению функциональной зависимости от одного или двух независимых переменных.

Переходим теперь к более подробному рассмотрению всего этого комплекса вопросов.

Установим прежде всего достаточные условия механического подобия двух течений жидкости около или внутри двух геометрически подобных тел.

Обозначим через t_1, x_1, y_1, z_1, v_1, X_1, Y_1, Z_1, ρ_1, p_1, ν_1 величины, относящиеся к первому течению, а через t_2, x_2, y_2, z_2, v_2, X_2, Y_2, Z_2, ρ_2, p_2, ν_2 — величины, относящиеся ко второму течению. Если рассматриваемые течения механически подобны, то после надлежащего выбора начала координат и начала отсчёта мы будем иметь соотношения:

$$\frac{t_2}{t_1} = C_t, \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{x_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{l_2}{l_1} = C_l, \tag{9.2}$$

где t_1 и t_2 — соответствующие моменты времени, x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 — координаты соответствующих точек, l_1 и l_2 — соответствующие размеры; C_t и C_l суть постоянные. При этих обозначениях мы имеем далее, в силу самого понятия механического подобия:

$$v_2(x_2, y_2, z_2, t_2,) = C_v v_1(x_1, y_1, z_1, t_1), \tag{9.3}$$

где C_v есть новая постоянная, равная при этом C_l/C_t, ибо, например,

$$v_{2x} = \frac{dx_2}{dt_2} = \frac{C_l}{C_t}\frac{dx_1}{dt_1} = \frac{C_l}{C_t} v_{1x}.$$

Допустим далее, что для соответствующих точек мы имеем соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{X_2(x_2, y_2, z_2, t_2)}{X_1(x_1, y_1, z_1, t_1)} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1} = C_F, \\ \rho_2 = C_\rho \rho_1, \\ \nu_2 = C_\nu \nu_1, \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

где C_F, C_ρ, C_ν — тоже постоянные величины.

Составляя уравнение (9.1) для второго течения, мы на основании только что выписанных равенств (9.2), (9,3), (9.4) легко перепишем

его в виде:

$$\frac{C_v}{C_t}\frac{\partial v_{1z}}{\partial t}+\frac{C_v^2}{C_l}\left(v_{1x}\frac{\partial v_{1z}}{\partial x_1}+v_{1y}\frac{\partial v_{1z}}{\partial y_1}+v_{1z}\frac{\partial v_{1z}}{\partial z_1}\right)=$$

$$=C_FZ_1-\frac{1}{C_\rho C_l\rho_1}\frac{\partial p_2}{\partial z_1}+\frac{C_\nu C_v}{C_l^2}\nu_1\Delta v_{1z}. \quad (9.5)$$

Но если первое течение действительно имеет место, то должно удовлетворяться равенство

$$\frac{\partial v_{1z}}{\partial t}+v_{1x}\frac{\partial v_{1z}}{\partial x_1}+v_{1y}\frac{\partial v_{1z}}{\partial y_1}+v_{1z}\frac{\partial v_{1z}}{\partial z_1}=Z_1-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial z_1}+\nu_1\Delta v_{1z}. \quad (9.6)$$

Отсюда мы заключаем, что если

$$\frac{C_v}{C_t}=\frac{C_v^2}{C_l}=C_F=\frac{C_\nu C_v}{C_l^2}, \quad (9.7)$$

и

$$p_2=\frac{C_vC_\rho C_l}{C_t}p_1, \quad (9.8)$$

то уравнение (9.5) и ему аналогичные будут удовлетворены и, следовательно, второе течение, по условию подобное первому, тоже может иметь место в действительности.

Равенства (9.7) позволяют выразить все постоянные C через две из них, за которые мы примем C_v и C_l. А именно, мы имеем:

$$\frac{C_tC_v}{C_l}=1,\quad \frac{C_FC_l}{C_v^2}=1,\quad \frac{C_\nu}{C_vC_l}=1,\quad p_2=C_\rho C_v^2p_1.$$

Подставляя сюда значения постоянных C из равенств (9.2), (9.3) и (9.4), мы легко придём к следующим соотношениям:

$$\frac{t_2v_2}{l_2}=\frac{t_1v_1}{l_1},\quad \frac{Z_2l_2}{v_2^2}=\frac{Z_1l_1}{v_1^2},\quad \frac{\nu_2}{v_2l_2}=\frac{\nu_1}{v_1l_1},\quad \frac{p_2}{\rho_2v_2^2}=\frac{p_1}{\rho_1v_1^2}. \quad (9.9)$$

Следовательно, достаточными условиями механического подобия является выполнение соотношений (9.9) для любых двух соответствующих точек рассматриваемых течений. Первое из этих соотношений является, собственно говоря, условием кинематического подобия, последнее же из соотношений (9.9) определяет p_2 и, следовательно, всегда может быть выполнено. Таким образом, по существу говоря, *мы получаем в рассматриваемом случае два условия механического подобия*:

$$\frac{v_2^2}{Z_2l_2}=\frac{v_1^2}{Z_1l_1}, \quad (9.10)$$

$$\frac{v_2l_2}{\nu_2}=\frac{v_1l_1}{\nu_1}. \quad (9.11)$$

Обозначим через l характерный для данного движения размер, например, в случае задачи об обтекании сферы это будет радиус сферы; точно так же обозначим через V характерную для данного движения скорость, например скорость на бесконечности в случае задачи об обтекании сферы. Положим, наконец, что внешний массовой силой является сила тяжести, так что $Z = -g$.

Введём в рассмотрение два числа:

$$\mathsf{R} = \frac{Vl}{\nu}, \tag{9.12}$$

называемое *числом Рейнольдса*, и

$$\mathsf{F} = \frac{V^2}{gl}, \tag{9.13}$$

называемое *числом Фруда*.

Мы видим, таким образом, что *для вязкой несжимаемой жидкости, находящейся под действием силы тяжести, два течения, обладающие одинаковыми числами Рейнольдса и Фруда, являются подобными*. Конечно здесь, как и в дальнейшей части этого параграфа, всегда предполагается, что речь идёт о течениях около или внутри геометрически подобных тел. Примером, где закон подобия должен был бы применяться в только что полученной форме, является испытание моделей кораблей. В самом деле, сопротивление корабля слагается как из сопротивления трения, так и из волнового сопротивления, обязанного своим происхождением волнам, образующимся на свободной поверхности жидкости под действием силы тяжести. Однако на практике мы встречаемся со следующим затруднением: пусть величина модели в 100 раз меньше величины судна в натуре; по уравнению (9.13), для того чтобы число Фруда F осталось неизменным, нужно взять скорость V в 10 раз меньше скорости судна в натуре. Чтобы число Рейнольдса R тоже осталось неизменным, коэффициент вязкости ν нужно взять в 1000 раз меньше коэффициента вязкости воды; практически этого осуществить нельзя. Поэтому при испытаниях применяют тоже воду и сопротивление трения определяют по особым опытным формулам. Остаточное же сопротивление — волновое — пересчитывается по закону подобия для идеальной несжимаемой жидкости, находящейся под действием силы тяжести; по этому закону

два течения с одинаковыми числами Фруда будут подобными (*закон подобия Фруда*).

Таким образом, при испытаниях моделей судов линейные размеры модели должны быть пропорциональны квадрату скорости движения модели.

Если жидкость находится под действием силы тяжести, но свободных поверхностей в рассматриваемом течении нет, то закон

подобия сильно упрощается. В самом деле, в этом случае в уравнения движения можно ввести вместо давления p новую величину

$$q = p + \rho g z, \tag{9.14}$$

если считать ось Oz направленной вертикально вверх. Тогда уравнения движения принимают вид:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} q + \nu \Delta v, \tag{9.15}$$

т. е. сила тяжести является исключённой. В случае наличия свободной поверхности этот искусственный приём не дал бы результата, так как на свободной поверхности имеется граничное условие, в которое входит величина p, а не q.

Но раз внешняя сила оказалась исключённой, то условия (9.10) уже более не получается, и мы приходим к следующему закону подобия, открытому *Осборном Рейнольдсом*:

для вязкой несжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил или при действии силы тяжести, но при отсутствии свободных поверхностей, два течения, обладающие одинаковыми числами Рейнольдса, являются подобными.

Отсюда вытекает, что при рассмотрении течений вязкой жидкости число Рейнольдса должно играть колоссальную роль. Так, например, мы указывали в самом начале этой главы, что кроме правильных, так называемых *ламинарных течений* жидкости, существуют течения беспорядочные, так называемые *турбулентные*. Когда мы рассматриваем различные течения жидкости около или внутри геометрически подобных тел, то оказывается, что при малых числах Рейнольдса эти течения ламинарны, при больших же числах Рейнольдса они становятся турбулентными. Таким образом, число Рейнольдса определяет даже самый характер течения.

Подойдём теперь к вопросу о подобии с несколько другой точки зрения. Рассматривая какое-либо течение жидкости, введём, как выше было указано, характерную для данного течения скорость V и характерную длину l. Так как можно принять, что характерная скорость V равна отношению характерной длины l к характерному для данного течения промежутку времени T, то характерным промежутком времени будет $T = l/V$. Наконец, характерным ускорением будет V/T или V^2/l.

Введём в рассмотрение безразмерные величины, а именно, положим:

$$\left.\begin{aligned} x &= l\xi; \quad & y &= l\eta; \quad & z &= l\zeta; \\ v &= Vu; \quad & t &= \frac{l}{V}\tau; \quad & p &= P\bar{p}. \end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

Преобразуем теперь уравнения движения, например, уравнение (9.1), к введённым безразмерным величинам, причём для определённости будем считать, что массовая сила есть сила тяжести. Так, например, мы имеем:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{V^2}{l}\frac{\partial u_z}{\partial \tau},$$

$$\Delta v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = \frac{V}{l^2}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial \zeta^2}\right) = \frac{V}{l^2}\Delta_\xi u_z.$$

Простые вычисления показывают тогда, что уравнение (9.1) после указанного преобразования и умножения на l/V^2 принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u_z}{\partial \tau} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial \xi} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial \eta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial \zeta} = \frac{lZ}{V^2} - \frac{P}{\rho V^2}\frac{d\bar{p}}{\partial \zeta} + \frac{\nu}{lV}\Delta_\xi u_z.$$

Мы положим:

$$P = \rho V^2,$$

и введём, как выше, числа Рейнольдса и Фруда:

$$\mathsf{R} = \frac{lV}{\nu}, \qquad \mathsf{F} = \frac{V^2}{lg};$$

тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial u_z}{\partial \tau} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial \xi} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial \eta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\mathsf{F}} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\mathsf{R}}\Delta_\xi u_z. \quad (9.17)$$

Из этого уравнения ясно видно, что характер течения зависит от значений чисел F и R. Обратно, если для двух течений около геометрически подобных тел числа Рейнольдса и Фруда одинаковы, то уравнения движения в безразмерных величинах для обоих течений будут одинаковы, так же как и граничные условия и, следовательно, u_x, u_y, u_z будут для обоих течений одинаковыми функциями от ξ, η, ζ, τ. Но тогда из уравнений (9.16) ясно видно, что

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{l_2}{l_1}, \qquad \frac{t_2}{t_1} = \frac{l_2 V_1}{l_1 V_2}, \qquad v_2 = \frac{V_2}{V_1}v_1,$$

а это и означает, что два рассматриваемых течения подобны между собою. Итак, при совпадении для двух движений чисел Рейнольдса и Фруда эти движения подобны между собою.

Наконец, третий способ вывода условий подобия основан на соображениях теории размерностей [1]). Возьмём определённое течение жидкости, характеризуемое в некоторой системе единиц величинами

[1]) В книге Бриджмэн П. В., Анализ размерностей, ГТТИ, 1934, содержится подробное изложение теории размерностей, см. также: Седов Л. И., Методы теории размерностей и теории подобия в механике, Гостехиздат, 1944.

x, y, z, t, v_x, v_y, v_z, ρ, p, ν, g. Пусть мы имеем дело с физической системой единиц, так что основными единицами являются: единица длины, единица времени и единица массы. Изменим теперь эти единицы, положив старую единицу равной L новым единицам длины, старую единицу времени — T новым единицам времени и старую единицу массы — M новым единицам массы. Принимая во внимание размерности всех вышеперечисленных величин, а именно

$$[x]=[y]=[z]=L, \quad [t]=T, \quad [v_x]=[v_y]=[v_z]=\frac{L}{T},$$

$$[\rho]=ML^{-3}, \quad [p]=ML^{-1}T^{-2}, \quad [\nu]=L^2T^{-1}, \quad [g]=LT^{-2},$$

и обозначая численные значения всех вышеприведенных величин в новой системе единиц теми же буквами с чертой наверху, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x}=Lx, && \bar{y}=Ly, && \bar{z}=Lz, && \bar{t}=Tt,\\ &\bar{v}_x=\frac{L}{T}v_x, && \bar{v}_y=\frac{L}{T}v_y, && \bar{v}_z=\frac{L}{T}v_z, &&\\ &\bar{\rho}=\frac{M}{L^3}\rho, && \bar{p}=\frac{M}{LT^2}p, && \bar{\nu}=\frac{L^2}{T}\nu, && \bar{g}=\frac{L}{T^2}g. \end{aligned}\right\} \tag{9.18}$$

Обратим внимание на то, что в новой системе численные значения всех рассматриваемых величин изменились, но так как нами рассматривается одно и то же движение жидкости, то уравнения движения всё равно будут удовлетворяться.

Итак, величины $\bar{v}_x$, $\bar{v}_y$, $\bar{v}_z$, $\bar{\rho}$, $\bar{p}$ удовлетворяют уравнениям движения, в которых вместо g стоит $\bar{g}$ и вместо ν стоит $\bar{\nu}$. Но тогда никто не может нам помешать вернуться к старым единицам и рассматривать такое новое движение новой жидкости (коэффициент вязкости которой в старых единицах равен $\bar{\nu}$) и находящейся под действием силы тяжести, ускорение которой равно $\bar{g}$, в котором численные значения составляющих скорости, плотности и давления, измеренные в старых единицах, равны как раз $\bar{v}_x$, $\bar{v}_y$, $\bar{v}_z$, $\bar{\rho}$, $\bar{p}$.

Из первых двух строк равенств (9.18) сразу видно, что старое и новое движения будут подобны между собою. Последние два равенства (9.18), определяющие значения, которые должны иметь для нового движения величины $\bar{\nu}$ и $\bar{g}$, дают нам искомые условия механического подобия. Обозначая опять через l и V и соответственно через $\bar{l}$ и $\bar{V}$ характерные длину и скорость, мы будем иметь:

$$L=\frac{\bar{l}}{l}, \quad \frac{L}{T}=\frac{\bar{V}}{V}, \quad \frac{L^2}{T}=\frac{\bar{l}\bar{V}}{lV}, \quad \frac{L}{T^2}=\frac{\bar{V}\bar{l}^2}{\bar{l}V^2},$$

и поэтому два последних условия (9.18) принимают вид:

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu}=\frac{\bar{l}\bar{V}}{lV},\quad \frac{\bar{g}}{g}=\frac{\bar{V}^2\bar{l}}{lV^2}\quad \text{или}\quad \frac{lV}{\nu}=\frac{\bar{l}\bar{V}}{\bar{\nu}},\quad \frac{V^2}{lg}=\frac{\bar{V}^2}{\bar{l}\bar{g}}.$$

Короче говоря, должно быть:

$$R=\bar{R},\quad F=\bar{F},$$

т. е. в двух рассматриваемых нами подобных движениях числа Рейнольдса и Фруда совпадают.

Этот вывод, может быть, не столь простой, как предыдущие, замечателен тем, что нам совершенно не понадобилось использовать вид уравнений движения вязкой жидкости: нам достаточно было знать только, какие величины входят в эти уравнения. С другой стороны, этот вывод уясняет нам до некоторой степени связь, которая существует между законами подобия и теорией размерности.

К уяснению этой связи можно подойти ещё иным способом.

Допустим, что нами рассматривается вопрос о сопротивлении Q, испытываемом телом определённой геометрической формы, движущимся в вязкой несжимаемой жидкости прямолинейно и равномерно со скоростью V. Обозначим характерный размер тела через l, плотность жидкости через ρ, коэффициент вязкости через ν. Если свободных границ нет, то действие силы тяжести скажется только в гидростатической подъёмной силе, т. е. на сопротивлении Q никак не отразится. Нам нет теперь надобности знать точный вид уравнений движения, а достаточно только точно перечислить все величины, от которых может зависеть сопротивление Q. В данном случае мы будем иметь:

$$Q=\Phi(l,\ V,\ \rho,\ \nu). \tag{9.19}$$

Применим теперь соображения теории размерностей. Формула (9.19) должна иметь место, какой бы системой единиц мы ни пользовались. Пусть, как выше, мы пользуемся физической системой единиц и пусть мы вводим новые единицы длины, времени и массы, соответственно в L, T и M раз меньшие старых единиц. Обозначая, как выше, численные значения всех рассматриваемых величин в новой системе единиц теми же буквами с чертой наверху, будем иметь

$$\bar{l}=Ll,\quad \bar{V}=\frac{L}{T}V,\quad \bar{\rho}=\frac{M}{L^3}\rho,\quad \bar{\nu}=\frac{L^2}{T}\nu,\quad \bar{Q}=\frac{ML}{T^2}Q.$$

Поэтому равенство (9.19), которое должно иметь место и в новой системе единиц, принимает вид:

$$\frac{ML}{T^2}Q=\Phi\left(Ll,\ \frac{L}{T}V,\ \frac{M}{L^3}\rho,\ \frac{L^2}{T}\nu\right). \tag{9.20}$$

Сравнивая (9.19) и (9.20), мы приходим к выводу, что должно существовать следующее тождество:

$$\Phi\left(Ll,\ \frac{L}{T}V,\ \frac{M}{L^3}\rho,\ \frac{L^2}{T}\nu\right)=\frac{ML}{T^2}\Phi(l,\ V,\ \rho,\ \nu). \tag{9.21}$$

Положим теперь в этом тождестве:

$$L=\frac{1}{l},\quad T=\frac{V}{l},\quad M=\frac{1}{\rho l^3},$$

тогда получим равенство:

$$\Phi(l,\ V,\ \rho,\ \nu)=\rho V^2 l^2\Phi\left(1,\ 1,\ 1,\ \frac{\nu}{lV}\right). \tag{9.22}$$

Чтобы подойти к обычной форме для сопротивления, обозначим через S величину площади проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения. Ясно, что $S=\alpha l^2$, где α есть безразмерная величина. Пусть, далее,

$$\mathsf{R}=\frac{lV}{\nu}$$

есть число Рейнольдса. Если ввести теперь обозначение

$$\frac{2}{\alpha}\Phi\left(1,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{\mathsf{R}}\right)=f(\mathsf{R}),$$

то формула (9.22) принимает вид:

$$\Phi(l,\ V,\ \rho,\ \nu)=S\frac{\rho V^2}{2}f(\mathsf{R}).$$

Итак, при сделанных допущениях мы получаем следующее выражение для испытываемого телом сопротивления:

$$Q=S\frac{\rho V^2}{2}f(\mathsf{R}). \tag{9.23}$$

Таким образом, чтобы уметь вычислить сопротивление, испытываемое телом данной геометрической формы при его равномерном движении во всех жидкостях, при всевозможных скоростях и размерах тела, достаточно знать функцию $f(\mathsf{R})$ одного только аргумента R. Эта функция в некоторых случаях может быть найдена теоретически, в громадном же большинстве случаев её можно получить только экспериментально. Заметим ещё раз, что для каждой формы тела и даже для одной и той же формы тела, но в различных его положениях (например, для эллипсоида, движущегося в направлении наибольшей оси и для того же эллипсоида, движущегося в направлении наименьшей оси) функции $f(\mathsf{R})$ будут различными.

Если мы имеем дело с движением тела в вязкой несжимаемой жидкости при наличии свободной поверхности, то формула для

сопротивления усложняется. А именно, вместо (9.19) мы имеем в этом случае формулу:

$$Q = \Phi(l, V, \rho, \nu, g).$$

Те же самые рассуждения, что и выше, приводят в этом случае к формуле:

$$Q = S\frac{\rho V^2}{2} f(\mathsf{R}, \mathsf{F}), \tag{9.24}$$

где $\mathsf{F} = V^2/lg$ есть число Фруда.

До сих пор мы всюду предполагали, что имеем дело с несжимаемой жидкостью. В случае сжимаемой жидкости все наши выводы усложняются. Как известно, в случае сжимаемой жидкости фундаментальное значение имеет скорость a распространения звука. В связи с этим для сжимаемой жидкости появляется, кроме чисел Фруда и Рейнольдса, ещё число Маха

$$\mathsf{M} = \frac{V}{a}. \tag{9.25}$$

При одновременном действии сил тяжести и вязкости в случае сжимаемой жидкости два течения около или внутри геометрически подобных тел с одинаковыми числами Фруда, Рейнольдса и Маха будут подобными.

Точно так же закон сопротивления (9.24) усложняется и принимает следующий вид:

$$Q = S\frac{\rho V^2}{2} f(\mathsf{R}, \mathsf{F}, \mathsf{M}). \tag{9.26}$$

Если число Маха M невелико, то $f(\mathsf{R}, \mathsf{F}, \mathsf{M}) \approx f(\mathsf{R}, \mathsf{F}, 0)$ и коэффициент Маха пропадает из закона сопротивления. Таким образом, влияние сжимаемости начинает сказываться только тогда, когда характерная скорость достигает значений, сравнимых со скоростью звука.

§ 10. Уравнение притока тепла для вязкой сжимаемой жидкости. Начиная с § 5 и далее, мы занимались лишь несжимаемой вязкой жидкостью. Уже было указано, что в случае вязкой сжимаемой жидкости четырёх уравнений (4.9), (4.10) недостаточно для определения пяти функций p, ρ, v_x, v_y, v_z. С подобным обстоятельством мы столкнулись ещё в главе по газовой динамике. Там нам пришлось прибавить пятое, заимствованное из термодинамики соотношение, и лишь тогда мы сумели замкнуть систему дифференциальных уравнений. Однако то уравнение, которое мы называли в предыдущей главе уравнением притока тепла, носило частный характер — мы рассматривали там движение с большими скоростями и считали, что частицы не успевают обмениваться теплом с окружающим пространством. Сейчас мы рассмотрим общий случай. Имея в виду конкретные приложения, мы, как и прежде, ограничимся рассмотрением совершенных газов.

Уравнение притока тепла мы выведем из принципа сохранения энергии. Рассмотрим произвольный объём (τ) конечный или бесконечно малый, вырезанный внутри жидкости замкнутой поверхностью (S). Этот объём обладает массой:

$$\int_{(\tau)} \rho \, d\tau,$$

где $d\tau$ — элемент объёма (τ). Так же как и в случае газовой динамики, этот объём обладает двумя видами энергии: кинетической K и так называемой внутренней. Первая может быть представлена в виде

$$K = \int_{(\tau)} \rho \frac{v \cdot v}{2} d\tau,$$

вторая, для совершенных газов, имеет вид:

$$\int_{(\tau)} c_v T \rho \, d\tau,$$

где c_v — теплоёмкость при постоянном объёме, T — температура.

Изменение энергии частицы (τ) происходит теперь, в отличие от того, что было в газовой динамике, не только за счёт работы объёмных и поверхностных сил, приложенных к частице, но и за счёт притока тепла к этой частице извне. Основным видом притока тепла к частице является приток, происходящий при помощи теплопроводности. Если обозначим коэффициент теплопроводности через k, то количество тепла, прошедшего благодаря теплопроводности через поверхность частицы внутрь её за промежуток времени от t_1 до t_2 будет:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{(S)} k \frac{\partial T}{\partial n} dS \, dt,$$

где n — внешняя нормаль к элементу dS нашей частицы.

Пусть, кроме того, ε будет происходящей за счёт других причин приток тепла за единицу времени и в единице объёма частицы. Это может быть, например, притоком тепла от излучения. Тогда к предыдущему интегралу мы должны прибавить величину

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{(\tau)} \varepsilon \, d\tau \, dt.$$

Работа объёмных и поверхностных сил за тот же промежуток времени будет:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{(\tau)} \rho \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \, d\tau \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{(S)} \boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{v} \, dS \, dt,$$

где $\boldsymbol{F}$ — вектор силы, отнесённой к единице объёма.

Итак, мы можем записать:

$$\left\{A\int\limits_{(\tau)}\rho\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}d\tau+\int\limits_{(\tau)}c_vT\rho\,d\tau\right\}_{t=t_2}-\left\{A\int\limits_{(\tau)}\rho\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}d\tau+\int\limits_{(\tau)}c_vT\rho\,d\tau\right\}_{t=t_1}=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\int\limits_{(\tau)}\varepsilon\,d\tau+\int\limits_{(S)}k\frac{\partial T}{\partial n}dS+A\int\limits_{(\tau)}\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,d\tau+A\int\limits_{(S)}\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v}\,dS\right\}dt, \tag{10.1}$$

где интегралы в левой части берутся, как показывают значки, один раз в момент t_2, другой раз в момент t_1, а A — термический эквивалент работы.

Деля обе части нашего равенства на t_2-t_1, устремляя t_2 к t_1 и переходя к пределу, получим:

$$A\frac{d}{dt}\int\limits_{(\tau)}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}\rho\,d\tau+\frac{d}{dt}\int\limits_{(\tau)}c_vT\rho\,d\tau=$$

$$=\int\limits_{(\tau)}\varepsilon\,d\tau+\int\limits_{(S)}k\frac{\partial T}{\partial n}dS+A\int\limits_{(\tau)}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\rho\,d\tau+A\int\limits_{(S)}\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v}\,dS. \tag{10.2}$$

По самому смыслу составления уравнения (10.1) мы следим за движением одной и той же частицы, так что в уравнении (10.2) мы слева имеем индивидуальные производные по времени.

Так как масса частицы сохраняется, мы можем заменить выражение вида

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(\tau)}\Phi\rho\,d\tau,$$

где Φ — какая-то функция координат и времени, на

$$\int\limits_{(\tau)}\rho\frac{d\Phi}{dt}d\tau\,^{1}).$$

С другой стороны, по теореме Грина,

$$\int\limits_{(S)}k\frac{\partial T}{\partial n}dS=\int\limits_{(\tau)}\operatorname{div}(k\operatorname{grad}T)\,d\tau$$

---

[1]) Подробно это доказано было в первой главе при выводе уравнения притока тепла в § 3.

и

$$A\int\limits_{(S)} \boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v}\,dS = A\int\limits_{(S)}\{\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{v}\cos(n,\ x)+\boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{v}\cos(n,\ y)+$$
$$+\boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{v}\cos(n,\ z)\}\,dS =$$
$$= A\int\limits_{(\tau)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{v})\right\}d\tau.$$

Таким образом мы можем записать (10.2) в виде:

$$A\int\limits_{(\tau)}\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\,d\tau+\int\limits_{(\tau)}c_v\rho\frac{dT}{dt}\,d\tau=\int\limits_{(\tau)}\varepsilon\,d\tau+\int\limits_{(\tau)}\operatorname{div}(k\operatorname{grad}T)\,d\tau+$$
$$+A\int\limits_{(\tau)}\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,d\tau+A\int\limits_{(\tau)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{v})\right\}d\tau.$$

Собирая все члены в обеих сторонах под один знак интеграла, вспоминая, что объём (τ) совершенно произволен и предполагая непрерывность подынтегральных функций, получим уравнение притока тепла в виде

$$\frac{A}{2}\rho\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+c_v\rho\frac{dT}{dt}=\varepsilon+\operatorname{div}(k\operatorname{grad}T)+A\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}+$$
$$+A\left\{\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{p}_x\cdot\boldsymbol{v}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{p}_y\cdot\boldsymbol{v}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{p}_z\cdot\boldsymbol{v}\right\}. \qquad (10.3)$$

Соотношение это и является тем пятым уравнением, которое следует прибавить к четырём уравнениям § 4 в случае сжимаемой жидкости. Температура T связана с давлением p и плотностью ρ соотношением (для совершенного газа) Клапейрона:

$$p = R\rho T.$$

Вид ε следует, конечно, уточнить при решении той или иной задачи. В приложениях этого уравнения, которые будут иметь место в этой главе, мы будем считать $\varepsilon = 0$.

Уравнение (10.3) может быть преобразовано к более простой форме, если использовать уравнения движения (4.8). Действительно, умножая скалярно обе части (4.4) на $\boldsymbol{v}$, получим

$$\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}-\rho\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{p}_x}{\partial x}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{p}_y}{\partial y}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{p}_z}{\partial z}=0. \qquad (10.4)$$

Но $\boldsymbol{w}=d\boldsymbol{v}/dt$, так что

$$\rho\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}=\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v},$$

и мы можем написать по (10.4):

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{p}_x}{\partial x}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{p}_y}{\partial y}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{p}_z}{\partial z}.$$

Вставляя это значение $\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ в (10.3) и производя сокращения, получим

$$c_v\rho\frac{dT}{dt}=\varepsilon+\operatorname{div}(k\operatorname{grad}T)+A\left\{\boldsymbol{p}_x\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}+\boldsymbol{p}_y\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}+\boldsymbol{p}_z\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\right\}.$$

Вспоминая, наконец, как выражаются компоненты векторов $\boldsymbol{p}_x$, $\boldsymbol{p}_y$, $\boldsymbol{p}_z$ [формулы (3.21)], получим, после простого приведения членов, уравнение притока энергии в виде:

$$\begin{aligned}c_v\rho\frac{dT}{dt}=\varepsilon+\operatorname{div}(k\operatorname{grad}T)-Ap\operatorname{div}\boldsymbol{v}+A\Big\{&\lambda(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2+\\&+2\mu\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2+\\&+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2\Big\}.\end{aligned}\qquad(10.5)$$

Так же как это мы делали при выводе уравнения притока тепла в идеальной жидкости, преобразуем в (10.5) $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ на основании уравнения неразрывности и соотношения Клапейрона. Тогда получим

$$-Ap\operatorname{div}\boldsymbol{v}=Ap\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=A\frac{dp}{dt}-A\frac{p}{T}\frac{dT}{dt}=A\frac{dp}{dt}-AR\rho\frac{dT}{dt}.$$

Вставляя это в (10.5), собирая члены и вспоминая, что

$$c_p-c_v=AR,$$

получим окончательно

$$\begin{aligned}c_p\rho\frac{dT}{dt}-A\frac{dp}{dt}=\varepsilon+\operatorname{div}(k\operatorname{grad}T)+A\Big\{&\lambda(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2+\\&+2\mu\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]+\\&+\mu\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2\right]\Big\}.\end{aligned}\qquad(10.6)$$

Уравнение (10.6) отчётливо показывает, за счёт чего происходит изменение температуры движущейся частицы и является существенным дополнением к рассуждениям § 7.

При $\lambda=\mu=k=0$ мы получим вновь уравнение притока тепла для идеальной сжимаемой жидкости, которое в случае, когда $\varepsilon=0$, даст условие адиабатичности.

Отметим ещё форму, которую примет (10.5) для несжимаемой жидкости при $\varepsilon = 0$. Здесь

$$c_v\rho\frac{dT}{dt} = \operatorname{div}(k\operatorname{grad}T) + A\mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2\right\}. \quad (10.7)$$

Так как температура не входит в уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости, уравнение (10.7) можно решать отдельно, после того как поле скоростей определено. Это — обобщение на случай жидкости классического уравнения теплопроводности для твёрдого тела:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(a^2\operatorname{grad}T), \quad (10.8)$$

где a^2 — так называемый «коэффициент температуропроводности». Новые краевые и новые начальные условия, которые следует вводить при решении нового уравнения (10.5), мы будем давать в каждом конкретном случае приложений этого уравнения в различных разделах этой главы.

Заметим ещё, что в сжимаемой жидкости часто нельзя будет считать коэффициенты вязкости постоянными. Это же относится и к коэффициенту теплопроводности k. Дело в том, что и вязкость и теплопроводность могут зависеть от температуры T. Зависимость эта определяется в физике, и мы используем её в отдельных конкретных приложениях (см. ниже). Здесь отметим только, что отношение $\mu c_p/k$ (10.9) будет уже, для данного газа, постоянным. В этом отношении c_p — теплоёмкость при постоянном давлении, которая, как мы отмечали в главе по газовой динамике, связана с c_v формулой

$$c_p - c_v = AR.$$

Безразмерная величина $\mu c_p/k$ носит название числа Прандтля и обозначается буквой P. Эта величина вместе с отношением

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$$

должна быть прибавлена в случае сжимаемой жидкости к числам Рейнольдса, Фруда и Маха в рассуждениях о подобии.

Б. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

§ 11. Одномерное течение между двумя параллельными плоскими стенками. В предыдущем разделе мы вывели основные уравнения гидромеханики вязкой жидкости в различных формах и установили ряд свойств, присущих либо всем движениям вязкой

жидкости, либо большим классам таких движений. Теперь же мы переходим к исследованию отдельных конкретных движений вязкой жидкости и, в первую очередь, к исследованию важнейших из тех случаев, когда можно точно проинтегрировать уравнения движения вязкой жидкости. При этом мы будем иметь дело, как правило, с несжимаемой жидкостью.

В качестве первого примера мы рассмотрим течение несжимаемой жидкости *между двумя параллельными плоскими стенками*. Пусть уравнения этих плоскостей будут соответственно

$$z = -h, \quad z = h;$$

допустим ещё, *что внешних сил нет, что движение стационарно и происходит параллельно оси Ox*, так что

$$X = Y = Z = 0, \quad v_y = v_z = 0, \quad v_x = v(x, y, z).$$

Основные уравнения гидромеханики (5.1) при сделанных допущениях сильно упрощаются:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \qquad (11.1)$$

Последнее из этих уравнений показывает, что v может зависеть только от y и z; средние же уравнения показывают, что p может зависеть только от x; но тогда первое уравнение (11.1), в левой части которого стоит функция от одного только x, а в правой части функция от y и z, может выполняться только в том случае, если левая и правая части этого уравнения являются постоянными величинами. Итак, должно быть:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}.$$

Для определения v имеем уравнение:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (11.2)$$

и граничные условия

$$v = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h, \qquad (11.3)$$

вытекающие из требования прилипания жидкости к ограничивающим неподвижным стенкам. Легко найти частное решение уравнений (11.2) и (11.3), зависящее только от z; в самом деле, в этом случае мы имеем:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x},$$

и интегрирование этого уравнения даёт нам:

$$v = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} z^2 + Az + B,$$

где A и B — две произвольные постоянные, для определения которых служат два уравнения (11.3). Из этих последних уравнений мы выводим, что

$$\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}h^2 + Ah + B = 0; \quad \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}h^2 - Ah + B = 0,$$

откуда

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}h^2$$

и, следовательно:

$$v = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(z^2 - h^2).$$

Легко доказать, что полученное нами решение и есть то решение уравнений (11.2) и (11.3), которое нам нужно. В самом деле, положим:

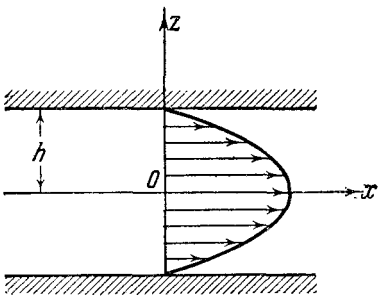

Рис. 153.

$$v = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(z^2 - h^2) + u(y, z);$$

тогда ясно, что функция $u(y, z)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (11.4)$$

и двум граничным условиям

$$u = 0 \quad \text{или} \quad z = \pm h. \qquad (11.5)$$

Но если потребовать, *чтобы* v, а, следовательно, и u *оставались ограниченными в рассматриваемой нами области*, то единственным решением уравнений (11.4) и (11.5) будет $u \equiv 0$ [1]).

Итак, при сделанных допущениях, течение жидкости определяется следующей зависимостью:

$$v = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(h^2 - z^2). \qquad (11.6)$$

На рис. 153 графически изображено полученное распределение скорости по закону параболы.

Вычислим количество жидкости Q, протекающее в единицу времени в призме, ограниченной стенками и двумя плоскостями $y = 0$ и $y = b$. Так как

$$\int_{-h}^{h} v\,dz = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\int_{-h}^{h}(h^2 - z^2)\,dz = -\frac{2h^3}{3\mu}\frac{\partial p}{\partial x},$$

[1]) В противном случае функция u, будучи ограниченной при указанных граничных условиях, достигала бы максимума или минимума.

то

$$Q = -\frac{2h^3 b}{3\mu}\frac{dp}{dx}. \tag{11.7}$$

Деля это выражение на поперечное сечение $2hb$ вышеупомянутой призмы, получаем для средней скорости жидкости $\bar{v}$ выражение:

$$\bar{v} = -\frac{h^2}{3\mu}\frac{dp}{dx}. \tag{11.8}$$

Если взять на оси Ox две точки M_0 и M_1 на расстоянии l друг от друга и обозначить давления в этих точках соответственно через p_0 и p_1, то, замечая, что

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_0}{l},$$

получим из (11.7) для падения давления формулу:

$$\frac{p_0 - p_1}{l} = \frac{3\mu Q}{2bh^3}. \tag{11.9}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае *падение давления на единицу длины прямо пропорционально коэффициенту вязкости и протекающему количеству жидкости и обратно пропорционально кубу расстояния между стенками.*

Рассмотрим теперь другой частный подслучай. А именно, допустим, что жидкость ограничена двумя параллельными стенками, одна из которых $z = 0$ остаётся всё время неподвижной, в то время как другая $z = h$ перемещается в своей собственной плоскости параллельно оси Ox со скоростью U. При тех же допущениях, что и выше, мы найдём, что

$$\frac{dp}{dx} = \text{const}.$$

Для простоты примем, что

$$\frac{dp}{dx} = 0. \tag{11.10}$$

Тогда те же рассуждения, что и выше, покажут нам, что v должно определяться дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = 0, \tag{11.11}$$

но только теперь граничные условия будут

$$\left.\begin{aligned} v &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \\ v &= U \quad \text{»} \quad z = h, \end{aligned}\right\} \tag{11.12}$$

ибо частицы жидкости, прилегающие к нижней стенке, должны оставаться неподвижными вместе со стенкой, частицы же, прилегающие

к верхней стенке, должны перемещаться с той же скоростью, что и эта стенка.

Интегрирование уравнения (11.11) даёт:

$$v = Az + B,$$

где A и B — произвольные постоянные, определяющиеся из уравнений (11.12):

$$B = 0, \quad A = \frac{U}{h}.$$

Итак, в рассматриваемом случае течение определяется формулой

$$v = \frac{Uz}{h}. \tag{11.13}$$

Как раз с рассмотрения этого течения мы начали нашу главу и уже представили графически полученный линейный закон распределения скорости на рис. 151. Простые вычисления дают для протекающего количества жидкости и для средней скорости выражения

$$Q = \frac{U}{2} hb, \quad \bar{v} = \frac{U}{2}. \tag{11.14}$$

Вычислим ещё силу трения, действующую на каждую единицу площади стенки. Мы имеем формулу

$$\tau_{xz} = \mu \frac{dv}{dz},$$

и, следовательно, для искомой силы трения получаем выражение

$$\tau_{xz} = \frac{\mu U}{h}. \tag{11.15}$$

Наконец, чтобы показать пример того, как надо учитывать граничные условия на свободной поверхности, разберём ещё один частный подслучай. Пусть на жидкость действует сила тяжести, и пусть жидкость ограничена сверху свободной поверхностью, снизу же неподвижной плоскостью Oxy, наклонённой к горизонту под углом α, причём ось Oy горизонтальна, а ось Oz направлена перпендикулярно к плоскости вверх, так что

$$X = g \sin \alpha, \quad Y = 0, \quad Z = -g \cos \alpha. \tag{11.16}$$

Будем опять считать движение происходящим параллельно оси Ox и стационарным. Рассмотрение основных уравнений гидромеханики снова приводит к выводу, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}.$$

Примем для простоты, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{11.17}$$

Уравнения (5.1) приведутся тогда к виду:

$$\left.\begin{aligned} &\rho g \sin \alpha + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = 0; \\ &\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \cos \alpha = 0, \end{aligned}\right\} \tag{11.18}$$

так что

$$p = C - \rho g z \cos \alpha,$$

где C – некоторая постоянная величина.

Граничные условия, согласно § 6, имеют следующий вид. На неподвижной плоскости

$$v = 0 \quad \text{при} \quad z = 0;$$

на свободной же поверхности $z = h$ должны выполняться условия:

$$p_{zz} = -p_0, \quad p_{zx} = p_{zy} = 0.$$

Но так как $v_y = v_z = 0$ и $v_x = v$ есть функция только от y и z, то

$$p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} = -p, \quad p_{zx} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = \mu \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = 0,$$

следовательно, мы приходим к следующим граничным условиям:

$$p = p_0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h. \tag{11.19}$$

Первое из этих условий определяет постоянную C:

$$C = p_0 + \rho g h \cos \alpha,$$

так что

$$p = p_0 + \rho g (h - z) \cos \alpha. \tag{11.20}$$

Отыскиваем теперь частное решение уравнения (11.18), зависящее только от z, так что

$$\rho g \sin \alpha + \mu \frac{d^2 v}{dz^2} = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$v = -\frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} z^2 + Az + B;$$

постоянные A и B определяются из граничных условий

$$v = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,$$

$$\frac{dv}{dz} = 0 \quad \text{»} \quad z = h,$$

которые дают

$$B = 0, \quad A = \frac{\rho g h \sin \alpha}{\mu}.$$

Итак,

$$v = \frac{\rho g z (2h - z) \sin \alpha}{2\mu}. \tag{11.21}$$

Легко теперь убедиться, что это и есть то решение рассматриваемой задачи, которое нам нужно. В самом деле, если положить

$$v = \frac{\rho g z (2h - z) \sin \alpha}{2\mu} + u(y, z),$$

то для функции $u(y, z)$ получится уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

при граничных условиях

$$u = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h;$$

если потребовать ещё ограниченности u во всей рассматриваемой нами области, то непременно должно быть $u \equiv 0$, что и доказывает высказанное утверждение.

Распределение скоростей получается по параболическому закону (рис. 154). Для протекающего количества жидкости Q и для средней скорости легко получаем формулы:

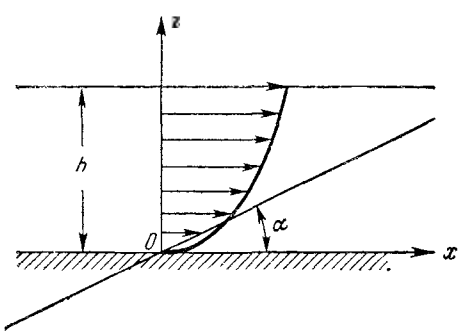

Рис. 154.

$$Q = \frac{\rho g b h^3 \sin \alpha}{3\mu},$$

$$\bar{v} = \frac{\rho g h^2 \sin \alpha}{3\mu}, \tag{11.22}$$

так что *протекающее количество жидкости обратно пропорционально коэффициенту вязкости жидкости и прямо пропорционально кубу глубины жидкости.*

Осветим ещё на этом последнем примере вопрос о диссипации энергии.

Рассмотрим то количество жидкости, которое находится над прямоугольной площадью основания, одно ребро которой, параллельное оси Ox, имеет длину l, а другое, параллельное оси Oy, имеет длину b. Сила тяжести, действуя на отдельные частицы этого объёма

жидкости, производит некоторую работу. А именно, частицы объёма $lb\,dz$ и массы $\rho\,lb\,dz$, для которых координата z лежит между z и $z+dz$, за единицу времени опустятся на $v\sin\alpha$, так что работа силы тяжести будет

$$\rho lb\,dz\cdot vg\sin\alpha.$$

Интегрируя это выражение по z от 0 до h, мы найдём работу силы тяжести, производимую за единицу времени:

$$A=\int_0^h \rho lbgv\sin\alpha\,dz=\rho glb\sin\alpha\cdot\frac{\rho g h^3\sin\alpha}{3\mu}=\frac{\rho^2 g^2 h^3 lb\sin^2\alpha}{3\mu}.$$

Но так как никакого увеличения кинетической энергии жидкости не получается, то, очевидно, вся энергия, получаемая за счёт силы тяжести, диссипируется. Действительно, если мы вычислим по формуле (7.7) диссипирующуюся энергию E, отнесённую к единице времени и единице объёма

$$E=\mu\left(\frac{dv}{dz}\right)^2=\frac{\rho^2 g^2\sin^2\alpha\,(h-z)^2}{\mu}$$

и проинтегрируем это выражение по рассматриваемому объёму, то получим:

$$\frac{lb\rho^2 g^2\sin^2\alpha}{\mu}\int_0^h (h-z)^2\,dz=\frac{lbh^3\rho^2 g^2\sin^2\alpha}{3\mu},$$

т. е. величину, равную как раз A.

В заключение отметим, что при больших числах Рейнольдса рассматриваемое течение становится турбулентным, следовательно, полученные нами формулы применимы только к случаю очень малых глубин и сравнительно малых скоростей и неприменимы, например, к случаю течений воды в реке, имеющих уже турбулентный характер.

§ 12. Течение Пуазейля. Мы займёмся теперь теорией ламинарного течения в цилиндрических трубах. Исследование течений в трубах имеет, как это вполне очевидно, громадное практическое значение; понятно поэтому, что этому вопросу посвящены были многочисленные работы, приведшие к открытию важных закономерностей. Так, например, Гаген (Hagen) на опытах с трубами изучал как ламинарную, так и турбулентную формы течений, а также переход от одной формы течения к другой. Осборн Рейнольдс установил известное условие перехода от ламинарной формы течения к турбулентной, заключающееся в том, что число Рейнольдса переходит через некоторое критическое значение, также на основании своих опытов с течениями в трубах.

Задача о течении в трубе имеет, как мы сейчас увидим, вполне точное и строгое решение. Однако это относится только к случаю ламинарной формы течения. Для турбулентной формы течения мы такого строгого решения пока ещё не имеем. Однако преобладающее большинство течений в трубах, с которыми приходится иметь дело на практике, — течения турбулентные. Наиболее важным случаем ламинарных течений являются течения в тонких трубках, так называемых капиллярах.

Несмотря на это обстоятельство, теория ламинарного течения в трубах имеет весьма большое значение. Дело в том, что поскольку мы имеем в этом случае строгое решение уравнений гидромеханики вязкой жидкости, получается возможность сравнить результаты теории с результатами опыта. Оказалось, что опыт блестяще подтверждает выводы теории, а это показывает, что основные предпосылки теории: уравнения Навье — Стокса и принятые нами граничные условия (прилипание жидкости к стенкам сосуда) являются оправданными. С другой стороны, целый ряд приборов для определения вязкости имеет главной своей частью капиллярную трубку, через которую происходит течение жидкости, так что теория этих приборов основана на теории ламинарного течения жидкости через трубы.

В основу наших рассуждений естественно положить основные уравнения гидромеханики вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах (5.14) и (5.15).

Сформулируем основные допущения. Пусть мы имеем цилиндрическую трубу кругового сечения, радиус которого равен a. Ось этой трубы примем за ось Oz цилиндрической системы координат. Пусть несжимаемая жидкость течёт вдоль этой трубы, причём внешние силы отсутствуют. Допустим, наконец, что течение стационарно и что в каждой точке скорость направлена параллельно оси трубы, так что

$$v_r = v_\theta = 0, \quad v_z = v(r, \theta, z).$$

При этих допущениях уравнения (5.14) принимают, как легко видеть, следующий простой вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right), \\ &\frac{\partial v}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

Первые два из этих уравнений показывают, что p может зависеть только от z; последнее же уравнение показывает, что v есть функция только r и θ. Но так как правая часть третьего уравнения (12.1) не зависит от z, то и левая часть не может зависеть от z и,

следовательно, $\frac{\partial p}{\partial z}$ есть постоянная величина

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}.$$

Если давления в двух точках M_1 и M_2 на оси Oz, отстоящих одна от другой на расстоянии l, обозначить соответственно через p_1 и p_2, то будем, очевидно, иметь:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_2 - p_1}{l} = -\frac{p_1 - p_2}{l}. \tag{12.2}$$

Итак, функция $v(r, \theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{12.3}$$

и очевидно граничному условию на стенке

$$v = 0 \quad \text{при} \quad r = a. \tag{12.4}$$

Мы можем легко найти решение уравнения (12.3), зависящее только от r и удовлетворяющее условию (12.4). В самом деле, если $v = v(r)$, то (12.3) может быть переписано так:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} r;$$

интегрируя, получаем:

$$r\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial z} r^2 + A;$$

деля на r и ещё раз интегрируя по r, находим:

$$v = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z} r^2 + A \ln r + B. \tag{12.5}$$

Произвольные постоянные A и B нужно определить из граничного условия (12.4) и добавочного условия, что скорость v остаётся ограниченной во всей рассматриваемой области. Но если $A \neq 0$, то, как показывает формула (12.5), скорость v становится бесконечной при $r = 0$, т. е. на оси трубы; поэтому надо непременно положить

$$A = 0.$$

Условие (12.4) даёт теперь:

$$\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z} a^2 + B = 0,$$

откуда

$$B = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z} a^2.$$

Итак, мы нашли решение уравнений (12.3) и (12.4):

$$v = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}(a^2 - r^2).$$

Никакого другого решения задачи не существует. В самом деле, положим

$$v = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}(a^2 - r^2) + u(r, \theta),$$

тогда ясно, что функция $u(r, \theta)$ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0,$$

т. е. должна быть гармонической функцией и, кроме того, должна удовлетворять условию

$$u = 0 \quad \text{при} \quad r = a.$$

Но известно, что гармоническая функция достигает своего максимума и минимума на контуре, следовательно, должно быть $u \equiv 0$, откуда и вытекает наше утверждение.

Заменяя, наконец, $\partial p/\partial z$ его значением по (12.2), окончательно находим:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}(a^2 - r^2). \tag{12.6}$$

Распределение скорости подчиняется, очевидно, параболическому закону. Наибольшая скорость, равная

$$v_0 = \frac{(p_1 - p_2)a^2}{4\mu l}, \tag{12.7}$$

имеет место на оси трубы. Объём жидкости, протекающей в единицу времени через поперечное сечение трубы, определяется, очевидно, по формуле

$$Q = \int_0^a 2\pi r\, v\, dr = \frac{\pi a^4}{8\mu}\frac{p_1 - p_2}{l}. \tag{12.8}$$

Деля это выражение на πa^2, найдём среднюю скорость течения

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{a^2}{8\mu}\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{1}{2}v_0. \tag{12.9}$$

Определим, наконец, силу трения τ_0, действующую на стенки трубки. Для этого вычислим по формуле (5.15) значение величины

$$p_{rz} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = \mu\frac{dv}{dr} = -\frac{(p_1 - p_2)r}{2l}$$

при $r=a$ и изменим знак (p_{rz} даёт силу, действующую на элементы жидкости; на стенку же будет действовать та же сила, но в прямо противоположном направлении); в результате получим:

$$\tau_0 = \frac{(p_1 - p_2)\,a}{2l} = \frac{4\mu\bar{v}}{a}. \tag{12.10}$$

В опытах обычно определяется величина $p_1 - p_2 = \Delta p$. Поэтому решим уравнения (12.8) и (12.9) относительно Δp:

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{8\mu l Q}{\pi a^4}; \quad \Delta p = \frac{8\mu l \bar{v}}{a^2}. \tag{12.11}$$

Мы получаем, таким образом, *закон Гагена — Пуазейля*:

При ламинарном течении падение давления пропорционально секундному объёму протекающей жидкости и длине трубы и обратно пропорционально четвёртой степени радиуса трубы. Или иначе: *падение давления пропорционально средней скорости течения и длине трубы и обратно пропорционально квадрату радиуса трубы.*

Только что выведенные соотношения были экспериментально найдены независимо друг от друга *Г. Гагеном* в 1839 г. и *Пуазейлем* (Poiseuille) в 1840—1841 гг. Мы имеем, таким образом, в этом случае блестящее совпадение результатов опыта с выводами теории.

В заключение настоящего параграфа остановимся ещё на вопросе о пределах применимости полученного нами теоретически течения Пуазейля. Мы уже несколько раз упоминали, что существуют две формы течений жидкости: ламинарная и турбулентная. Ламинарная форма течения характеризуется правильным движением частиц жидкости, как, например, это имеет место в течении Пуазейля. Напротив, в турбулентном движении частицы двигаются весьма беспорядочным образом, так что при турбулентном движении в трубе на главное движение в направлении оси трубы налагаются беспорядочные пульсации движения как в направлении оси трубы, так и перпендикулярно к этому направлению. Наглядно можно показать различие этих двух форм течений, если ввести в некотором месте оси трубы небольшое количество окрашивающей субстанции; тогда при ламинарной форме течения мы увидим одну резко окрашенную струйку жидкости, в то время как при турбулентной форме течения вся жидкость окажется окрашенной, что показывает на сильное перемешивание частиц жидкости.

Мы уже упоминали выше, что закон Гагена — Пуазейля, выражающийся формулами (12.11), для турбулентной формы течения перестаёт иметь силу. Таким образом, закон сопротивления при переходе от ламинарной формы течения к турбулентной резко меняется. Это изменение закона сопротивления является, пожалуй, наиболее важным критерием для различения ламинарной формы течения от турбулентной.

Осборн Рейнольдс показал, что при движении воды в трубе ламинарный или турбулентный характер течения зависит от значения соответствующего числа Рейнольдса

$$\mathsf{R} = \frac{\bar{v}a}{\nu}. \tag{12.12}$$

Если число Рейнольдса меньше некоторого критического значения R_k, то течение будет ламинарным, в противном случае оно будет турбулентным. Позднейшие исследования внесли в это положение целый ряд уточнений, о которых будет идти речь в главе о турбулентности, но сейчас для нас только что приведённая грубая формулировка условий перехода ламинарного течения в турбулентное будет вполне достаточна.

Итак, движение жидкости будет ламинарным, если или скорости течения достаточно малы, или диаметр трубы достаточно мал, или жидкость достаточно вязка.

Опыты показывают, что для течений в цилиндрических трубах критическое число Рейнольдса равняется приблизительно 1000—1100.

В качестве примера рассмотрим течение воды в трубе диаметра 1 *см*. Так как $\nu = 0{,}018$ *см*^{2}/*сек*, $a = 0{,}5$ *см*, то, принимая $\mathsf{R}_k = 1000$, найдём, что движение будет ламинарным при $\bar{v} < 36$ *см*/*сек*. При диаметре трубы в 1 *мм* движение остаётся ламинарным при скорости $\bar{v} < 3{,}6$ *м*/*сек*.

§ 13. Общий случай стационарного одномерного течения. В двух предыдущих параграфах мы рассмотрели наиболее важные случаи стационарных одномерных течений. Рассмотрим теперь общий случай стационарного течения.

Допустим, что движение стационарно и происходит вдоль оси Oz, так что

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = v(x, y, z).$$

Считая внешние силы отсутствующими и повторяя рассуждения начала § 11, мы легко придём к выводу, что

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const},$$

и что функция v зависит только от x и y и удовлетворяет уравнению

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{13.1}$$

Мы различим теперь два случая, смотря по тому, обращается ли $\partial p/\partial z$ в нуль или нет.

I. $\partial p/\partial z = 0$. В этом случае скорость v удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{13.2}$$

Рассмотрим теперь вопрос о граничных условиях. Ясно, что в данном случае границами жидкости могут служить только цилиндры с образующими, параллельными оси Oz, которые могут оставаться неподвижными или перемещаться параллельно оси Oz с постоянной скоростью.

Пусть, например, рассматривается движение жидкости между двумя цилиндрами, сечения которых плоскостью Oxy суть кривые C_1 и C_2, охватывающие одна другую (рис. 155). Пусть первый цилиндр перемещается параллельно оси Oz со скоростью v_1, а второй со скоростью v_2. В этом случае граничные условия, которым должна удовлетворять гармоническая функция v, будут:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_1 \quad \text{на} \quad C_1, \\ v &= v_2 \quad » \quad C_2. \end{aligned}\right\} \tag{13.3}$$

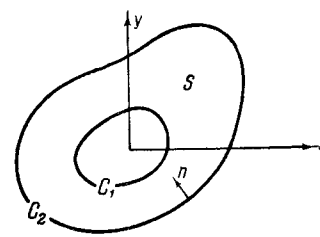

Рис. 155.

Но тогда ясно, что рассматриваемая задача сразу может быть сведена к эквивалентной задаче о плоском безвихревом движении несжимаемой жидкости. В самом деле, рассмотрим такое плоское течение жидкости в области S, расположенной между контурами C_1 и C_2, причём потребуем, чтобы сами контуры C_1 и C_2 были бы линиями тока этого течения и чтобы на контуре C_1 значение функции тока равнялось бы v_1, а на контуре C_2 равнялось бы v_2. Если комплексный потенциал этого вспомогательного течения обозначить через

$$w = \varphi + i\psi,$$

то ясно, что ψ тоже должна удовлетворять как уравнению Лапласа

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0,$$

так и тем же граничным условиям, что и функция v:

$$\begin{aligned} \psi &= v_1 \quad \text{на} \quad C_1, \\ \psi &= v_2 \quad » \quad C_2. \end{aligned}$$

Но ясно, что при этих условиях функции $\psi(x, y)$ и $v(x, y)$ должны совпадать. Таким образом, рассматриваемый случай стационарного одномерного движения вязкой жидкости полностью свёлся к хорошо изученной ранее задаче о безвихревом движении несжимаемой жидкости.

Эту аналогию можно продолжить ещё дальше. Известно, что для плоских движений несжимаемой жидкости важную роль играет понятие циркуляции скорости. Посмотрим, что является аналогом

циркуляции скорости для рассматриваемого случая движения вязкой жидкости.

Подсчитаем для этого силу трения, которая действует на один из ограничивающих цилиндров, например второй, со стороны жидкости. Достаточно рассмотреть часть поверхности этого цилиндра, заключённую между плоскостью Oxy и параллельной плоскостью, отстоящей от плоскости Oxy на расстоянии, равном единице длины. Рассмотрим элемент ds контура C_2 и обозначим через n направление внутренней (т. е. направленной внутрь области S) нормали. Тогда на элемент ds рассматриваемой части поверхности будет действовать сила трения, равная

$$\tau_{nz}\, dS = \mu \frac{\partial v}{\partial n}\, ds,$$

а на всю рассматриваемую часть цилиндра будет действовать сила трения

$$T = \mu \oint_{C_2} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds. \tag{13.4}$$

Переходя к соответствующему плоскому течению, получим для силы трения выражение

$$T = \mu \oint_{C_2} \frac{\partial \psi}{\partial n}\, ds.$$

Но, как известно:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad \text{и} \quad \oint_{C} \frac{\partial \varphi}{\partial s}\, ds = \Gamma,$$

где Γ есть циркуляция скорости по контуру C. Следовательно, мы находим, что

$$T = \mu \Gamma_2, \tag{13.5}$$

где Γ_2 есть циркуляция скорости по контуру C_2.

Итак, *сила трения, испытываемая каким-либо ограничивающим цилиндром и отнесённая к единице длины этого цилиндра, равняется произведению коэффициента трения μ на циркуляцию скорости по контуру поперечного сечения цилиндра в соответствующем плоском течении, причём контур пробегается в положительном направлении, т. е. так, что область при обходе этого контура остаётся слева.*

Теперь остановимся на примерах [1]). В качестве первого возьмём следующий пример. Пусть C_1 и C_2 — окружности радиусов r_1 и r_2 с общим центром в начале координат, и пусть $v_1 = U$, $v_2 = 0$, так

[1]) См. также Brillouin M., Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz, 1 (1907), стр. 61—73, Paris.

что имеем дело со скольжением внутреннего цилиндра внутри другого неподвижного цилиндра. Известно, что безвихревое течение между двумя окружностями определяется комплексным потенциалом

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln Z + \text{const.},$$

где мы вводим, как обычно это делается в теории плоского течения, комплексную координату

$$Z = x + iy,$$

причём Γ есть циркуляции скорости как по окружности C_1, так и по окружности C_2. Вводя полярные координаты r и θ, будем иметь:

$$Z = re^{i\theta}; \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + C.$$

Граничные условия

$$\psi = U \quad \text{при} \quad r = r_1,$$
$$\psi = 0 \quad » \quad r = r_2,$$

определяют нам Γ и C:

$$\Gamma = \frac{2\pi U}{\ln r_2 - \ln r_1}, \quad C = \frac{U \ln r_2}{\ln r_2 - \ln r_1}.$$

Следовательно, мы получаем, что

$$v = U \frac{\ln r_2 - \ln r}{\ln r_2 - \ln r_1} \tag{13.6}$$

и что сила трения со стороны жидкости на подвижный цилиндр, отнесённая к единице длины, равна

$$T = -\frac{2\pi\mu U}{\ln r_2 - \ln r_1}. \tag{13.7}$$

Знак минус берётся потому, что циркуляция скорости по контуру C_1, пробегаемому по часовой стрелке, равна $-\Gamma$. Из формулы (13.7) видно, что при заданном диаметре внешнего цилиндра сила трения будет тем больше, чем уже зазор между цилиндрами.

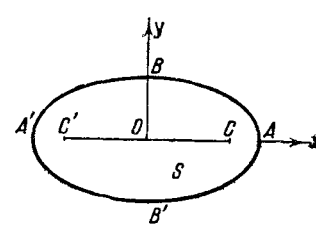

Рис. 156.

В качестве второго примера возьмём движение пластинки шириной $2c = C'C$ внутри эллиптического цилиндра $ABA'B'$, полуосями которого являются a и b, а фокусы лежат как раз в точках C и C' (рис. 156). Таким образом, здесь C_1 есть дважды пробегаемый отрезок CC', а C_2 есть эллипс $ABA'B'$. При этом эллиптический цилиндр мы считаем неподвижным, а пластинку CC' предполагаем перемещающейся параллельно оси Oz со скоростью U.

Конформное отображение области S на кольцо $1 < |\zeta| < R$ плоскости ζ даётся в данном случае, как известно, формулой

$$Z = \frac{c}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right),$$

причём

$$\frac{c}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right) = a, \quad \frac{c}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right) = b,$$

так что

$$R = \frac{a+b}{c} = \frac{a+b}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$

Мы можем теперь применить формулы (13.6) и (13.7), в которых надо принять $r_1 = 1$, $r_2 = R$, $r = |\zeta|$. В результате для скорости вязкой жидкости получаем общее выражение

$$v = \frac{U}{\ln R} \ln \frac{R}{|\zeta|}, \tag{13.8}$$

а для силы трения, испытываемой пластинкой CC' (с обеих её сторон) и отнесённой к единице этой пластинки:

$$T = -\frac{2\pi\mu U}{\ln R} = -\frac{4\pi\mu U}{\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right)}. \tag{13.9}$$

II. $\frac{dp}{dz} \neq 0$. В этом случае скорость v удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -k, \tag{13.10}$$

если для краткости ввести обозначение

$$k = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} = \frac{p_1 - p_2}{\mu l}, \tag{13.11}$$

где $p_1 - p_2$ есть падение давления на отрезке длины l, расположенном параллельно оси Oz.

Наиболее важным случаем этого типа является вопрос о движении вязкой жидкости в неподвижной цилиндрической трубе с образующими, параллельными оси Oz. Если поперечное сечение этой трубы есть кривая C, то граничным условием для искомой функции v будет служить

$$v = 0 \quad \text{на} \quad C. \tag{13.12}$$

Мы имеем в этом случае обобщение течения Пуазейля на случай трубы произвольного сечения.

К задаче решения уравнения (13.10) при граничном условии (13.12) приводится также задача теории упругости о кручении призмы, а также задача о плоском движении идеальной несжимаемой

жидкости в области S, контур которой C вращается с постоянной угловой скоростью и, наконец, задача о прогибе мембраны под действием равномерной нагрузки. В связи с этим задача интегрирования уравнения (13.10) при граничном условии (13.12) решена для весьма большого числа контуров [1]).

Мы ограничимся одним простым примером. А именно, легко найти решение уравнения (13.10) в виде полинома второй степени

$$v(x, y) = Ax^2 + By^2 + D.$$

Достаточно для этого принять

$$A + B = -\frac{k}{2}. \tag{13.13}$$

Условие (13.12) показывает, что уравнением контура C является

$$Ax^2 + By^2 + D = 0.$$

Теперь легко добиться того, чтобы контур C оказался контуром эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{13.14}$$

Для этого достаточно принять

$$A = -\frac{D}{a^2}, \quad B = -\frac{D}{b^2};$$

чтобы удовлетворить также и условию (12.13), нужно принять

$$D = \frac{ka^2b^2}{2(a^2 + b^2)} = \frac{(p_1 - p_2)\, a^2b^2}{2\mu l\,(a^2 + b^2)}$$

и, следовательно,

$$v(x, y) = \frac{(p_1 - p_2)\, a^2b^2}{2\mu l\,(a^2 + b^2)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right). \tag{13.15}$$

Итак, функция (13.15) решает задачу о ламинарном течении вязкой жидкости через трубу эллиптического сечения. Полагая $a = b$, мы вновь восстановим решение задачи о течении Пуазейля. Простое вычисление даёт для объёма протекающей в единицу времени через трубу жидкости выражение:

$$Q = \frac{(p_1 - p_2)\,\pi}{4\mu l} \frac{a^3b^3}{a^2 + b^2}. \tag{13.16}$$

§ 14. Нестационарное одномерное течение. Рассмотрим теперь случай движения вязкой жидкости более общий, чем тот, с которым мы имели дело в предыдущем параграфе, а именно отбросим условие стационарности.

---

[1]) См., например, обзорную статью Pöschl Th., Bisherige Lösungen des Torsionsproblems, Zs. f. angew. Math. u. Mech., **1** (1921), стр. 312—328.

Итак, допустим, что движение вязкой несжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил происходит параллельно оси Ox

$$v_y = v_z = 0.$$

Уравнение неразрывности показывает, что v_x не зависит от x, т. е.

$$v_x = v(y, z, t).$$

Уравнения гидромеханики поэтому сильно упрощаются:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial v}{\partial t}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{14.1}$$

Из последних уравнений видно, что p зависит только от x и t. Но тогда в первом уравнении левая часть не зависит от y и z, а правая часть не зависит от x; следовательно, как левая, так и правая части являются функциями одного только t:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = f(t). \tag{14.2}$$

Если $f(t) = 0$, уравнение для v принимает вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right). \tag{14.3}$$

Если же $f(t) \neq 0$, то введём вместо v новую функцию $\tilde{v}$, положив

$$\tilde{v} = v + \int_0^t f(t)\, dt; \tag{14.4}$$

тогда

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + f(t)$$

и, следовательно, $\tilde{v}$ будет удовлетворять тому же уравнению (14.3); правда, граничные условия при этом несколько изменяются.

Итак, во всех случаях нестационарного одномерного течения дело сводится к интегрированию уравнения (14.3). Это уравнение есть основное уравнение теории теплопроводности; известно решение большого числа частных задач, связанных с этим уравнением, что даёт возможность определить большое число соответствующих течений вязкой жидкости. Конечно, при решении уравнения (14.3) необходимо также учитывать соответствующие граничные и начальные условия; последние сводятся к заданию функции v для начального момента времени $t = 0$. Если и граничные и начальные условия не зависят от координаты y, то и решение v уравнения (14.3) не будет зависеть от y, а тогда функция $v(z, t)$ будет удовлетворять уравнению теплопроводности для линейного случая

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \tag{14.5}$$

Мы рассмотрим задачу о движении вязкой жидкости, занимающей всё пространство, причём будем считать распределение скорости в начальный момент известным и заданным формулой

$$v(z, 0) = F(z). \tag{14.6}$$

Для интегрирования уравнения (14.5) можно было бы применить метод Фурье; мы применим другой метод — метод источников.

Допустим сначала, что функция $F(z)$ отлична от нуля только в окрестности точки $z = 0$ и что

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, dz = Q. \tag{14.7}$$

Ясно, что в этом случае скорость $v(z, t)$ в какой-либо точке будет функцией следующих четырёх величин:

$$v(z, t) = \Phi(z, t, \nu, Q),$$

причём очевидно также, что v будет прямо пропорционально Q, так что

$$v(z, t) = Q\Psi(z, t, \nu).$$

Применим теперь соображения теории размерностей. Мы имеем, очевидно, следующие размерности отдельных величин:

$$[v] = LT^{-1}, \quad [z] = L, \quad [t] = T, \quad [\nu] = L^2T^{-1}, \quad [Q] = L^2T^{-1}.$$

Но тогда, применяя те же соображения, что в § 9, мы легко придём к тождеству

$$\frac{1}{L}\Psi(z, t, \nu) = \Psi\left(Lz, Tt, \frac{L^2}{T}\nu\right).$$

Полагая здесь $T = \frac{1}{t}$, $L = \frac{1}{\sqrt{\nu t}}$, легко получим:

$$\Psi(z, t, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\nu t}}\Psi\left(\frac{z}{\sqrt{\nu t}}, 1, 1\right) \quad \text{или} \quad \Psi(z, t, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\nu t}} f\left(\frac{z^2}{\nu t}\right).$$

Итак,

$$v(z, t) = \frac{Q}{\sqrt{\nu t}} f\left(\frac{z^2}{\nu t}\right) = \frac{Q}{\sqrt{\nu t}} f(\xi),$$

где положено

$$\xi = \frac{z^2}{\nu t}.$$

Но функция $v(z, t)$ должна удовлетворять уравнению (14.5). Составляя $\partial v/\partial t$, $\partial v/\partial z$, $\partial^2 v/\partial z^2$, находим:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{Q}{2\sqrt{\nu t^3}} f(\xi) - \frac{Q}{\sqrt{\nu t}} f'(\xi)\frac{z^2}{\nu t^2} = -\frac{Q}{2\sqrt{\nu t^3}}[f(\xi) + 2\xi f'(\xi)],$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{Q}{\sqrt{\nu t}} f'(\xi)\cdot\frac{2z}{\nu t},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{Q}{\sqrt{\nu t}} f'(\xi)\cdot\frac{2}{\nu t} + \frac{Q}{\sqrt{\nu t}} f''(\xi)\left(\frac{2z}{\nu t}\right)^2 = \frac{2Q}{\nu t\sqrt{\nu t}}[f'(\xi) + 2\xi f''(\xi)].$$

Поэтому уравнение (14.5) даёт нам равенство

$$-\frac{1}{2}[f(\xi) + 2\xi f'(\xi)] = 2[f'(\xi) + 2\xi f''(\xi)];$$

поделив обе части этого равенства на $\sqrt{\xi}$, получим:

$$\frac{1}{2\sqrt{\xi}} f(\xi) + \sqrt{\xi} f'(\xi) + 4\left[\frac{1}{2\sqrt{\xi}} f'(\xi) + \sqrt{\xi} f''(\xi)\right] = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\xi}[\sqrt{\xi} f(\xi)] + 4\frac{d}{d\xi}[\sqrt{\xi} f'(\xi)] = 0,$$

откуда

$$\sqrt{\xi}[f(\xi) + 4f'(\xi)] = C.$$

Но при $\xi = 0$ левая часть этого равенства обращается в нуль (если считать $f(0)$ и $f'(0)$ ограниченными) и, следовательно, $C = 0$. Итак,

$$4f'(\xi) + f(\xi) = 0.$$

Интегрирование этого уравнения даёт нам

$$f(\xi) = Ae^{-\frac{\xi}{4}},$$

где A есть некоторая численная постоянная. Итак,

$$v(z, t) = \frac{AQ}{\sqrt{\nu t}} e^{-\frac{z^2}{4\nu t}}.$$

Чтобы найти значение постоянной A, составим

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(z, t)\, dz = \frac{AQ}{\sqrt{\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4\nu t}}\, dz.$$

Но известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{14.8}$$

Полагаясь здесь

$$x = \frac{z}{2\sqrt{\nu t}},$$

получим, что

$$\frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} dz = \sqrt{\pi}. \tag{14.9}$$

Таким образом, имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(z, t)\, dz = 2AQ\sqrt{\pi},$$

в частности,

$$\lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} v(z, t)\, dz = 2AQ\sqrt{\pi};$$

но по условию (14.7) левая часть должна равняться Q, поэтому необходимо взять

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

и мы окончательно находим следующее выражение для v:

$$v(z, t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi\nu t}} e^{-\frac{z^2}{4\nu t}}. \tag{14.10}$$

Нетрудно теперь разобрать и общий случай начального задания (14.6). В самом деле, уравнение (14.5) линейно, поэтому сумма частных его решений тоже будет решением этого уравнения. Разобьём теперь всю ось Oz на малые участки и, рассматривая участок $\alpha < z < \alpha + d\alpha$, положим:

$$v(z, 0) = 0 \quad \text{вне участка} \quad \alpha < z < \alpha + d\alpha,$$
$$v(z, 0) = F(\alpha) \quad \text{на участке} \quad \alpha < z < \alpha + d\alpha.$$

Ясно, что для величины Q мы получаем в этом случае значение

$$\int_{\alpha}^{\alpha + d\alpha} F(z)\, dz = F(\alpha)\, d\alpha.$$

Поэтому рассматриваемый элемент $d\alpha$ даёт, согласно формуле (14.10), в которой надо, очевидно, заменить z на $z - \alpha$, для функции

$v(z, t)$ следующее выражение:

$$v(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} e^{-\frac{(z-\alpha)^2}{4\nu t}} F(\alpha)\, d\alpha.$$

Интегрируя полученное выражение по всем элементам $d\alpha$, мы и найдём требуемое выражение для функции $v(z, t)$, удовлетворяющей уравнению (14.5) и начальному условию (14.6):

$$v(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-\alpha)^2}{4\nu t}} F(\alpha)\, d\alpha. \tag{14.11}$$

Можно, впрочем, если не считать предыдущий вывод достаточно строгим, непосредственной проверкой показать, что функция (14.11) удовлетворяет как уравнению (14 5), так и начальному условию (14.6). Покажем, например, последнее. Для этого сделаем в интеграле (14.11) замену переменной, положив

$$\alpha = z + 2\zeta\sqrt{\nu t},$$

тогда интеграл примет вид:

$$v(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} F\left(z + 2\zeta\sqrt{\nu t}\right) d\zeta. \tag{14.12}$$

Положив теперь $t = 0$, увидим, что вследствие равенства (14.8)

$$v(z, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} F(z)\, d\zeta = F(z),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь два простых примера применения полученной формулы. Пусть в начальный момент распределение скорости имеет следующий вид:

$$v(z, 0) = \begin{cases} v_0, & \text{если } z > 0, \\ -v_0, & \text{» } z < 0, \end{cases} \tag{14.13}$$

так что плоскость Oxy является в начальный момент поверхностью разрыва скорости. Можно сказать, что в начальный момент вдоль плоскости Oxy расположен вихревой слой. Посмотрим, что будет происходить с этим вихревым слоем с течением времени. Применяя формулу (14.12) к данному случаю, получим:

$$v(z, t) = -\frac{v_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\zeta^2} d\zeta + \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\zeta^2} d\zeta,$$

ибо

$$\int_{-\infty}^{-q} e^{-\zeta^2}\,d\zeta = \int_{q}^{\infty} e^{-\zeta^2}\,d\zeta.$$

Точно так же

$$\int_{-q}^{0} e^{-\zeta^2}\,d\zeta = \int_{0}^{q} e^{-\zeta^2}\,d\zeta;$$

поэтому получаем окончательную формулу:

$$v(z,t) = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\zeta^2}\,d\zeta. \tag{14.14}$$

Функция

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\zeta^2}\,d\zeta, \tag{14.15}$$

играющая большую роль в теории вероятностей, носит название функции Крампа или интеграла вероятности. Для этой функции имеются таблицы. Из формулы (14.8) следует, что $\Phi(\infty) = 1$, с другой стороны, ясно, что $\Phi(0) = 0$.

Итак,

$$v(z,\ t) = v_0 \Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right). \tag{14.16}$$

При $t > 0$ функция $v(z,\ t)$ будет уже непрерывной функцией от z, так что при $t > 0$ скачка скорости уже нет. Можно сказать, что он рассеялся по всей жидкости. Рассматриваемое движение целесообразно поэтому назвать *диффузией вихревого слоя*. Из формулы (14.14) видно, что при $z > 0$ значение скорости непрестанно падает от величины v_0 при $t = 0$ до нуля при $t \to \infty$. Простое вычисление по таблице функций Крампа показывает, что скорость уменьшится вдвое через промежуток времени $t = 1{,}1\,\frac{z^2}{\nu}$.

Составим ещё выражение для вихря скорости

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v_0}{\sqrt{\pi \nu t}}\, e^{-\frac{z^2}{4\nu t}}. \tag{14.17}$$

Мы видим, что в каждый данный момент максимальное значение вихря будет при $z = 0$, т. е. на месте бывшего разрыва скорости. Далее, простое исследование функции (14.17) показывает, что в данном месте величина вихря сначала нарастает, достигает максимума

в момент $t = z^2/2\nu$ и затем падает до нуля; при этом значении максимума равно, очевидно,

$$\frac{v_0}{\sqrt{\pi \nu t e}} = \frac{v_0}{|z|}\sqrt{\frac{2}{\pi e}}.$$

В качестве второго примера рассмотрим движение жидкости, расположенной выше плоскости Oxy и находящейся в начальный момент в состоянии покоя, так что

$$v(z, 0) = 0 \text{ при } z > 0, \tag{14.18}$$

и допустим, что ограничивающая жидкость бесконечная плоскость Oxy внезапно получает в момент $t = 0$ скорость v_0 в направлении оси Ox, которую затем сохраняет. Решение этой задачи легко получается на основании предыдущего. В самом деле, функция (14.16) обращается при $z = 0$ в 0; поэтому, если образовать функцию

$$v(z, t) = v_0 - v_0 \Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right), \tag{14.19}$$

то ясно, что при $t = 0$ эта функция обратится в нуль, а при $z = 0$ в v_0, т. е. удовлетворит всем поставленным требованиям.

При любом $z > 0$ функция $v(z, t)$ стремится при $t \to \infty$ к значению v_0. Это означает, что в вязкой жидкости, ограниченной с одной стороны твёрдой стенкой, последняя при своём движении увлекает за собой всю жидкость.

Заметим ещё, что вследствие соотношения $\Phi(\infty) = 1$ мы имеем:

$$1 - \Phi(x) = \Phi(\infty) - \Phi(x) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta \tag{14.20}$$

и, следовательно, формулу (14.19) можно заменить такой:

$$v(z, t) = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta. \tag{14.21}$$

Полученные выше результаты можно применить к решению ещё одной частной задачи.

Пусть жидкость занимает полупространство ниже плоскости Oxy и находится в начальный момент в состоянии покоя, так что, считая ось Oz направленной вертикально вниз, будем иметь:

$$v(z, 0) = 0 \quad \text{при} \quad z > 0. \tag{14.22}$$

Положим, далее, что на свободную границу жидкости действует, помимо нормального давления p_0, ещё касательное напряжение T по-

стоянной величины и направленное по положительной оси Ox. Определим возникающее движение жидкости.

К такой постановке задачи сводится, очевидно, в первом приближении вопрос о возникновении морских течений под действием ветра.

Вспоминая выражение для касательных составляющих напряжения, запишем граничное условие, которое должно выполняться на свободной поверхности, в виде

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} = -T \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{14.23}$$

Итак, нам нужно решить уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{14.24}$$

при начальном условии (14.22) и граничном условии (14.23).

Покажем, как решение поставленной задачи можно сразу вывести из только что полученных результатов.

Для этого заметим, что функция

$$w = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$$

тоже удовлетворяет уравнению (14.24) и, кроме того, начальному условию

$$w(z, 0) = 0 \quad \text{при} \quad z > 0.$$

На свободной же поверхности граничное условие, вследствие (14.23), имеет, очевидно, вид

$$w = -T \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Но легко видеть теперь, что если заменить v_0 на $-T$, то функция $v(z, t)$, построенная нами во втором из рассмотренных выше примеров, будет полностью удовлетворять всем условиям для функции $w(z, t)$. Поэтому, применяя формулу (14.21), находим, что в нашей задаче

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{2T}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Дифференцируя это выражение по z, определим $\mu\, \partial^2 v/\partial z^2$, а тогда из уравнения (14.24) найдем:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{2T}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} = \frac{T}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-\frac{z}{4\nu t}}.$$

Интегрируя полученную функцию по t и замечая, что при $t=0$ v обращается, вследствие (14.22), в нуль, находим:

$$v=\frac{T}{\sqrt{\pi\rho\mu}}\int_0^t e^{-\frac{z^2}{4\nu t}}\frac{dt}{\sqrt{t}}. \tag{14.25}$$

Для численных подсчётов удобнее преобразовать эту формулу. Введём вместо t новую переменную ζ, положив

$$\zeta=\frac{z}{2\sqrt{\nu t}},\quad \sqrt{t}=\frac{z}{2\zeta\sqrt{\nu}},\quad \frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{z\,d\zeta}{\zeta^2\sqrt{\nu}}.$$

Так как при $t=0$ имеем $\zeta=\infty$, то получим:

$$v(z,\ t)=-\frac{Tz}{\mu\sqrt{\pi}}\int_\infty^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\zeta^2}\frac{d\zeta}{\zeta^2}.$$

Простое вычисление показывает, что

$$\int_\infty^x e^{-\zeta^2}\frac{d\zeta}{\zeta^2}=-\int_\infty^x e^{-\zeta^2}d\left(\frac{1}{\zeta}\right)=-\frac{e^{-x^2}}{x}+\int_\infty^x\frac{1}{\zeta}e^{-\zeta^2}(-2\zeta)\,d\zeta=$$

$$=-\frac{e^{-x^2}}{x}+2\int_x^\infty e^{-\zeta^2}d\zeta.$$

В результате получаем для функции $v(z,\ t)$ выражение:

$$v(z,\ t)=\frac{T}{\mu}\left\{2\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}\,e^{-\frac{z^2}{4\nu t}}-\frac{2z}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}^\infty e^{-\zeta^2}d\zeta\right\}$$

или, что то же, по (14.20):

$$v(z,\ t)=\frac{T}{\mu}\left\{2\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}\,e^{-\frac{z^2}{4\nu t}}-z+z\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right\}. \tag{14.26}$$

При бесконечном возрастании t последний член в скобках стремится к нулю; второй остаётся конечным, а первый бесконечно растёт, так что мы имеем приближённое равенство

$$v(z,\ t)\approx 2\frac{T}{\mu}\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}\quad\text{при}\quad t\to\infty; \tag{14.27}$$

при $z=0$ мы имеем совершенно точно:

$$v(0,\ t)=2\frac{T}{\mu}\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} \tag{14.28}$$

Мы видим, таким образом, что течение всюду стремится принять ту скорость, которая имеет место на свободной границе. При этом на какой-либо глубине z скорость v достигает половины значения скорости на свободной границе в тот момент t, когда

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\zeta^2} - \zeta + \zeta\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \tag{14.29}$$

где

$$\zeta = \frac{z}{2\sqrt{\nu t}}. \tag{14.30}$$

Решая уравнение (14.29), находим $\zeta = 0{,}35$, так что глубина z, на которой скорость v равна половине скорости на свободной границе, определяется уравнением $z = 0{,}7\sqrt{\nu t}$.

Так, например, для воды $\nu = 0{,}018$ *см*^{2}/*сек*; примем, далее, $z = 100$ *м* $= 10^4$ *см*, тогда

$$t = \frac{z^2}{0{,}49\nu} = 1{,}13 \times 10^{10} \text{ сек.} = 359 \text{ лет.}$$

Отсюда видно, что указанным образом морские течения объяснить нельзя, так как в движение приводятся только поверхностные массы воды; следует, по-видимому, думать, что движение воды будет не ламинарным, а турбулентным; грубо можно учесть турбулентный характер движения таким образом, что вместо коэффициента вязкости ν нужно взять значительно больший *коэффициент турбулентной вязкости* ν'; тогда время, в течение которого внутренние массы жидкости придут в движение, значительно уменьшится. Кроме того, в задаче о морских течениях очень существенную роль играет отклоняющая сила вращения земли, которой мы в нашем примере пренебрегали. Мы заметим только, что при учёте отклоняющей силы вращения Земли течение жидкости не будет уже одномерным и что скорость не будет с течением времени возрастать до бесконечности, как в нашем примере, а будет оставаться ограниченной.

§ 15. Стационарное течение жидкости между двумя цилиндрами. Переходя к рассмотрению плоских течений вязкой несжимаемой жидкости, начнём с простейшего примера движения жидкости между двумя концентрическими цилиндрами. Пусть жидкость заключена между двумя круговыми соосными цилиндрами радиусов r_1 и r_2 (рис. 157), вращающимися около общей оси с постоянными угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Определим движение жидкости, считая его стационарным, а внешние силы отсутствующими. Вводя цилиндрические координаты r, θ, z, можем, очевидно, считать, что движение происходит по окружностям с центрами на оси Oz, так что

$$v_z = v_r = 0, \qquad v_\theta = v(r), \qquad p = p(r).$$

Очевидно, проще всего использовать уравнения движения вязкой жидкости в цилиндрических координатах (5.14), которые в данном

случае сильно упрощаются:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}=\frac{v^2}{r},$$

$$\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r^2}=0. \qquad (15.1)$$

Уравнение для v есть уравнение типа Эйлера, поэтому два его частных решения должны иметь вид:

$$v=r^k,$$

подстановка этого значения v в уравнение (15.1) даёт

$$k(k-1)+k-1=0,$$

откуда получаем следующие значения k:

$$k_1=1, \quad k_2=-1$$

и следующие частные решения:

$$v_1=r, \quad v_2=\frac{1}{r}.$$

Итак, общее решение уравнения (15.1) есть

$$v=Ar+\frac{B}{r}. \qquad (15.2)$$

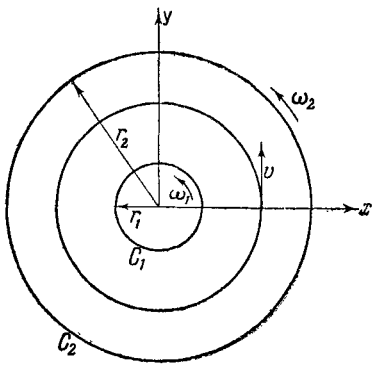

Рис. 157

Произвольные постоянные A и B нужно определить из граничных условий, которые, очевидно, имеют вид:

$$v=\omega_1 r_1 \quad \text{при} \quad r=r_1,$$
$$v=\omega_2 r_2 \quad » \quad r=r_2,$$

так как имеет место прилипание жидкости к поверхности цилиндров. Простое вычисление определяет A и B и даёт окончательное выражение для v:

$$v=\frac{(\omega_2 r_2^2-\omega_1 r_1^2)r^2+(\omega_1-\omega_2)r_1^2 r_2^2}{r(r_2^2-r_1^2)}. \qquad (15.3)$$

Вычислим, какая сила трения действует на элементы внутреннего и внешнего цилиндров. Применяя формулы (5.15), находим:

$$p_{r\theta}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)=-\frac{2\mu B}{r^2}=-\frac{2\mu(\omega_1-\omega_2)r_1^2 r_2^2}{r^2(r_2^2-r_1^2)}. \qquad (15.4)$$

Рассмотрим, например, часть цилиндра C_1, высота которой в направлении оси Oz равна единице. На элемент $r_1\,d\theta$ этой части поверхности действует в направлении, касательном к цилиндру, сила $p_{r\theta}r_1\,d\theta$, момент которой относительно оси цилиндра равен $p_{r\theta}r_1^2\,d\theta$.

Поэтому полный момент сил трения, приложенных к элементам рассматриваемой части цилиндра C_1, равен

$$M_1 = -\frac{4\pi\mu(\omega_1-\omega_2)r_1^2r_2^2}{r_2^2-r_1^2}. \tag{15.5}$$

Точно так же полный момент относительно оси Oz сил трения, приложенных к части цилиндра C_2, отнесённый к единице длины этого цилиндра, равен:

$$M_2 = -\frac{4\pi\mu(\omega_2-\omega_1)r_1^2r_2^2}{r_2^2-r_1^2}. \tag{15.6}$$

Таким образом, чтобы заставить цилиндры вращаться с предписанными угловыми скоростями, нужно приложить к цилиндру C_1 на каждую единицу длины этого цилиндра вращающий момент $-M_1$, а к цилиндру C_2 — вращающий момент $-M_2$. По известному правилу вычисления работы необходимо при этом затрачивать в каждую единицу времени количество работы, равное

$$R = -M_1\omega_1 - M_2\omega_2 = \frac{4\pi\mu(\omega_1-\omega_2)^2r_1^2r_2^2}{r_2^2-r_1^2}. \tag{15.7}$$

Всё это количество энергии, очевидно, диссипируется. Диссипация энергии отсутствует, если $\omega_1 = \omega_2$, но в этом случае $v = \omega_1 r$, и движение жидкости состоит в чистом вращении около оси Oz, тождественном с вращением твёрдого тела. В этом и только в этом случае оба момента M_1 и M_2 тоже обращаются в нуль.

В частном случае, когда $r_2 = \infty$, $\omega_2 = 0$, получаем движение жидкости вне цилиндра, вращающегося с заданной угловой скоростью

$$v = \frac{\omega_1 r_1^2}{r}. \tag{15.8}$$

Как известно, в таком движении жидкости вихри отсутствуют. Для вращающего момента получаем выражение:

$$M = 4\pi\mu\omega_1 r_1^2, \tag{15.9}$$

пропорциональное коэффициенту вязкости, угловой скорости вращения цилиндра и квадрату радиуса цилиндра.

Опыты показывают для рассматриваемого случая удовлетворительное согласие величин, получаемых экспериментально, с величинами, вычисленными на основании вышеприведённых формул. Конечно, это имеет место только в случае ламинарных течений, т. е. пока угловые скорости вращения цилиндров остаются достаточно малыми и не переходят критических значений, после чего наступает турбулентный режим.

§ 16. Диффузия вихря. В качестве важнейшего примера нестационарного плоского движения вязкой жидкости рассмотрим вопрос о диффузии прямолинейной вихревой нити.

Пусть в начальный момент времени имеется распределение скоростей, соответствующее прямолинейной вихревой нити, расположенной по оси Oz и имеющей интенсивность Γ.

Таким образом, в момент времени $t=0$ проекции скорости на оси цилиндрических координат r, θ, z имеют следующие значения:

$$v_r=0, \quad v_\theta=\frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad v_z=0. \tag{16.1}$$

Требуется определить движение жидкости в любой следующий момент времени. Совершенно ясно, что в этом движении v_r и v_z всё время равны нулю, а v_θ зависит только от r и t:

$$v_r=v_z=0, \quad v_\theta=v(r, t), \quad p=p(r, t).$$

Уравнения (5.14) показывают нам, что

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right). \tag{16.2}$$

Введём ещё в рассмотрение вихрь скорости

$$\Omega=\frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}. \tag{16.3}$$

В § 8 мы вывели уравнение (8.6), определяющее изменение вихря с течением времени. В цилиндрических координатах это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}+v_r\frac{\partial \Omega}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial \theta}=\nu\,\Delta\Omega=\nu\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\theta^2}\right).$$

В нашем случае, когда $v_r=0$ и Ω не зависит от θ, это уравнение сильно упрощается:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)=\frac{\nu}{r}\frac{\partial\left(r\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}\right)}{\partial r}. \tag{16.4}$$

Впрочем ясно, что (16.4) вытекает из (16.2) вследствие (16.3).

При рассматриваемых начальных условиях мы без всякого труда проинтегрируем уравнение (16.2) или (16.4), если воспользуемся соображениями теории размерностей. Рассмотрим, например, уравнение (16.4). Функция Ω, кроме переменных r и t, может зависеть только от двух параметров ν и Γ, причём ясно, что Ω прямо пропорционально Γ; итак,

$$\Omega=\Gamma\Phi(r, t, \nu). \tag{16.5}$$

Выписываем теперь размерности всех входящих в эту формулу величин:

$$[\Omega]=T^{-1}, \quad [\Gamma]=L^2T^{-1}, \quad [r]=L, \quad [t]=T, \quad [\nu]=L^2T^{-1}.$$

Если мы произведём изменение единиц длины и времени, уменьшив единицу длины в L раз, а единицу времени в T раз, то численное значение r увеличится в L раз, численное значение t — в T раз, численное значение Ω — в $1/T$ раз и т. д. Поэтому в новых единицах мы будем иметь

$$\frac{\Omega}{T} = \frac{L^2}{T}\Gamma\Phi\left(rL,\ tT,\ \nu\frac{L^2}{T}\right).$$

Заменяя здесь Ω его выражением (16.5), получаем следующее тождество:

$$\Phi(r,\ t,\ \nu) = L^2\Phi\left(rL,\ tT,\ \nu\frac{L^2}{T}\right).$$

Положим теперь $T = \frac{1}{t}$, $L = \frac{1}{\sqrt{\nu t}}$, тогда будем иметь:

$$\Phi(r,\ t,\ \nu) = \frac{1}{\nu t}\Phi\left(\frac{r}{\sqrt{\nu t}},\ 1,\ 1\right),$$

т. е.

$$\Phi(r,\ t,\ \nu) = \frac{1}{\nu t}f\left(\frac{r^2}{\nu t}\right).$$

Итак,

$$\Omega = \frac{\Gamma}{\nu t}f\left(\frac{r^2}{\nu t}\right).$$

Полагая

$$\xi = \frac{r^2}{\nu t},$$

вычисляем:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = -\frac{\Gamma}{\nu t^2}f(\xi) - \frac{\Gamma}{\nu t}\frac{r^2}{\nu t^2}f'(\xi) = -\frac{\Gamma}{\nu t^2}[f(\xi) + \xi f'(\xi)],$$

$$r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{\Gamma}{\nu t}f'(\xi)\frac{2r^2}{\nu t} = \frac{2\Gamma}{\nu t}f'(\xi)\xi,$$

$$\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) = \frac{4\Gamma}{\nu t^2}[f'(\xi) + \xi f''(\xi)].$$

Составляя теперь уравнение (16.4), легко находим уравнение для функции $f(\xi)$:

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) + 4[f'(\xi) + \xi f''(\xi)] = 0.$$

Его можно переписать также в форме

$$f(\xi) + 4f'(\xi) + \xi\frac{d}{d\xi}[f(\xi) + 4f'(\xi)] = 0,$$

откуда видно, что

$$\xi[f(\xi) + 4f'(\xi)] = C.$$

Но если считать, что $f(\xi)$ и $f'(\xi)$ при $\xi = 0$ остаются конечными, то следует принять $C = 0$, как это видно из предыдущего равенства,

если в нём положить $\xi = 0$. Итак,

$$f(\xi) + 4f'(\xi) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$f(\xi) = Ae^{-\frac{\xi}{4}},$$

где A — постоянная, подлежащая определению. Итак,

$$\Omega = \frac{A\Gamma}{\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}.$$

Вычислим циркуляцию Γ_R по окружности радиуса R, с центром в начале координат. По формуле Стокса мы имеем:

$$\Gamma_R = \int\int \Omega \, dS = \int_0^R \Omega \cdot 2\pi r \, dr = \frac{2\pi A\Gamma}{\nu t} \int_0^R e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} r \, dr =$$

$$= -4\pi A\Gamma e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \Big|_{r=0}^{r=R} = 4\pi A\Gamma \left(1 - e^{-\frac{R^2}{4\nu t}}\right). \tag{16.6}$$

Если устремить t к 0, то $e^{-\frac{R^2}{4\nu t}}$ тоже будет стремиться к нулю, поэтому

$$\lim_{t \to 0} \Gamma_R = 4\pi A\Gamma.$$

Но, по условию, в начальный момент времени $\Gamma_R = \Gamma$, следовательно, должно быть

$$A = \frac{1}{4\pi}. \tag{16.7}$$

Итак, мы окончательно получаем следующее решение нашей задачи:

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \tag{16.8}$$

Мы имеем далее, из равенств (16.6) и (16.7), следующее выражение для циркуляции скорости по окружности радиуса r с центром в начале координат:

$$\Gamma_r = \Gamma\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \tag{16.9}$$

Но так как $\Gamma_r = 2\pi r v$, то

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \tag{16.10}$$

Легко, впрочем, проверить и непосредственной подстановкой, что функция (16.10) удовлетворяет уравнению (16.2). Очевидно далее, что при $t \to 0$ мы имеем предельное равенство

$$\lim_{t \to 0} v(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

так что удовлетворены и начальные условия (16.1).

Исследуем полученное нами решение задачи о диффузии вихря. Формула (16.8) показывает, что вихрь, сосредоточенный в начальный момент времени в начале координат, с течением времени всё более и более расплывается. При этом видно, однако, что наибольшая завихренность будет в том месте, где первоначально находился вихрь; по мере удаления от этого места завихренность очень быстро падает. Чтобы численно охарактеризовать расплывание вихря, найдём, как изменяется с течением времени радиус той окружности с центром в начале координат, которая содержит внутри себя половину всех вихрей, иными словами, радиус r той окружности, циркуляция по которой равна $^1/_2\Gamma$. Формула (16.9) показывает, что r должно определяться равенством

$$e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$r = 1{,}665\sqrt{\nu t}. \tag{16.11}$$

Простое исследование Ω показывает, что завихренность в данном месте возрастает с течением времени от нуля до максимума, равного

$$\Omega_{\max} = \frac{\Gamma}{\pi e r^2}, \tag{16.12}$$

и затем опять падает до нуля.

Рассматриваемый пример является чрезвычайно характерным для динамики вихревого движения в вязкой жидкости. Он показывает, что основной тенденцией *внутри* вязкой жидкости является выравнивание завихренностей различных частиц жидкости. Наоборот, мы увидим далее, что в соседстве с ограничивающими жидкость стенками вязкая жидкость обладает, по сравнению с идеальной жидкостью, резко выраженной вихреобразующей способностью.

Рассмотренную нами задачу можно значительно обобщить. А именно, вместо того частного распределения скорости в начальный момент времени, которое даётся формулами (16.1) и соответствует случаю сконцентрированного вихря, рассмотрим произвольное распределение скорости v в начальный момент времени

$$v(r, 0) = v_0(r). \tag{16.13}$$

Начальное распределение вихря даётся в этом случае формулой:

$$\Omega(r, 0) = \Omega_0(r) = \frac{1}{r}\frac{d(rv_0)}{dr}. \tag{16.14}$$

Но, как мы видели выше, искомая нами функция $\Omega(r, t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \Delta \Omega = \nu\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}\right).$$

Поэтому сумма отдельных частных решений этого уравнения тоже будет его решением. Но заданное начальное распределение вихря можно заменить бесчисленным множеством отдельных сосредоточенных вихрей; для этого введём на плоскости цилиндрические координаты R, λ и положим, что на элементе $R\,dR\,d\lambda$ плоскости находится сосредоточенный вихрь интенсивности

$$\Omega_0(R)\,R\,dR\,d\lambda. \tag{16.15}$$

Обозначим через u расстояние между точками (R, λ) и $(r, 0)$, так что

$$u^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\lambda.$$

Тогда по формуле (16.8) получим, что от вихря (16.15) в точке $(r, 0)$ в момент t получится завихренность:

$$\frac{\Omega_0(R)\,R}{4\pi\nu t} e^{-\frac{u^2}{4\nu t}} dR\,d\lambda = \frac{\Omega_0(R)\,R}{4\pi\nu t} e^{-\frac{R^2+r^2-2Rr\cos\lambda}{4\nu t}} dR\,d\lambda.$$

Интегрируя это выражение по всем R и всем λ, мы и получим требуемое выражение вихря:

$$\Omega(r, t) = \frac{1}{4\pi\nu t}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \Omega_0(R)\, e^{-\frac{R^2+r^2-2Rr\cos\lambda}{4\nu t}} R\,d\,R\,d\lambda. \tag{16.16}$$

Но, как известно из теории бесселевых функций, мы имеем [1]):

$$\int_0^{2\pi} e^{\frac{Rr}{2\nu t}\cos\lambda} d\lambda = 2\pi J_0\left(\frac{iRr}{2\nu t}\right) = 2\pi I_0\left(\frac{Rr}{2\nu t}\right).$$

Поэтому

$$\Omega(r, t) = \frac{1}{2\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \int_0^\infty \Omega_0(R)\, e^{-\frac{R^2}{4\nu t}} I_0\left(\frac{Rr}{2\nu t}\right) R\,dR. \tag{16.17}$$

---

[1]) См., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, 3 (1939), стр. 679 и 688.

Так как $v(r, t)$ связано с $\Omega(r, t)$ формулой

$$v(r, t) = \frac{1}{r} \int_0^r \Omega(r, t)\, r\, dr,$$

то для определения скорости v отдельных жидких частиц находим равенство:

$$v(r, t) = \frac{1}{2\nu r t} \int_0^\infty \Omega_0(R)\, e^{-\frac{R^2}{4\nu t}} R \int_0^r r e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} I_0\left(\frac{Rr}{2\nu t}\right) dr\, dR. \quad (16.18)$$

Формулы (16.17) и (16.18) полностью решают поставленную нами задачу о плоском движении вязкой жидкости, в котором все частицы двигаются по концентрическим окружностям.

Рассмотрим теперь два конкретных примера.

Примем сначала, что в начальный момент времени завихренность равна нулю всюду, кроме круга радиуса a с центром в начале координат, в точках которого завихренность имеет постоянное значение Ω_0. Мы должны, таким образом, принять:

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_0(R) = \text{const.} = \Omega_0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant R < a, \\ &\Omega_0(R) = 0 \qquad\qquad\quad » \qquad\quad R > a. \end{aligned}\right\} \quad (16.19)$$

Ясно, что мы получили задачу о диффузии вихря конечных размеров, интенсивность этого вихря равна, очевидно,

$$\Gamma = \pi a^2 \Omega_0. \quad (16.20)$$

Применяя формулу (16.17), мы найдём распределение вихрей в любой следующий момент времени:

$$\Omega(r, t) = \frac{\Omega_0}{2\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \int_0^a e^{-\frac{R^2}{4\nu t}} I_0\left(\frac{Rr}{2\nu t}\right) R\, dR. \quad (16.21)$$

Преобразуем эту формулу к другому виду, более удобному для численных вычислений.

Введём прежде всего безразмерные переменные, полагая

$$\frac{a^2}{4\nu t} = \alpha, \quad \frac{r^2}{4\nu t} = \rho, \quad \frac{R^2}{4\nu t} = \zeta,$$

тогда будем иметь

$$\Omega(r, t) = \Omega_0 e^{-\rho} \int_0^\alpha e^{-\zeta} I_0\left(2\sqrt{\rho\zeta}\right) d\zeta. \quad (16.22)$$

Воспользуемся теперь первой из следующих основных формул в теории бесселевых функций [1]):

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_0} e^{u-\frac{z^2}{4u}}\,\frac{du}{u},$$

$$J_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^k \int_{l_0} e^{u-\frac{z^2}{4u}}\,u^{-k-1}\,du \qquad (k = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

где l_0 есть окружность произвольного радиуса с центром в начале координат, и интеграл берётся по контуру этой окружности в положительном направлении.

Так как

$$I_0(2\sqrt{\rho\zeta}) = J_0(2i\sqrt{\rho\zeta}),$$

то, применяя предыдущую формулу, найдём:

$$I_0(2\sqrt{\rho\zeta}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_0} e^{u+\frac{\rho\zeta}{u}}\,\frac{du}{u}$$

и, следовательно,

$$\int_0^\alpha e^{-\zeta} I_0(2\sqrt{\rho\zeta})\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_l e^u\left(\int_0^\alpha e^{-\zeta+\frac{\rho\zeta}{u}}\,d\zeta\right)\frac{du}{u}.$$

Внутренний интеграл сразу берётся

$$\int_0^\alpha e^{-\zeta\left(1-\frac{\rho}{u}\right)}\,d\zeta = -\left.\frac{e^{-\zeta\left(1-\frac{\rho}{u}\right)}}{1-\frac{\rho}{u}}\right|_{\zeta=0}^{\zeta=\alpha} = \frac{u}{u-\rho}\left(1-e^{-\alpha+\frac{\rho\alpha}{u}}\right),$$

и поэтому

$$\int_0^\alpha e^{-\zeta} I_0(2\sqrt{\rho\zeta})\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_0}\frac{e^u\,du}{u-\rho} - \frac{1}{2\pi i}\,e^{-\alpha}\int_{l_0}\frac{e^{u+\frac{\rho\alpha}{u}}}{u-\rho}\,du. \qquad (16.23)$$

Радиус окружности l_0 можно брать по произволу. Мы воспользуемся этим произволом для того, чтобы получить для Ω две формулы, одной из которых удобнее будет пользоваться для малых значений r/a, другой для больших. А именно, выберем сначала радиус окружности l_0 меньшим, чем ρ. В этом случае

$$\int_{l_0}\frac{e^u\,du}{u-\rho} = 0, \qquad (16.24)$$

---

[1]) См., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, 3 (1939), стр. 677.

так как подынтегральная функция голоморфна внутри окружности l_0. Мы имеем, далее, на окружности l_0 разложение

$$\frac{1}{u-\rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{1-\frac{u}{\rho}}=-\frac{1}{\rho}-\frac{u}{\rho^2}-\frac{u^2}{\rho^3}-\ldots=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^{k-1}}{\rho^k},$$

и поэтому

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{l_0}\frac{e^{u+\frac{\rho\alpha}{u}}}{u-\rho}\,du=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i\rho^k}\int_{l_0}u^{k-1}e^{u+\frac{\rho\alpha}{u}}\,du.$$

Но по той же основной формуле теории бесселевых функций мы имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l_0}u^{k-1}e^{u+\frac{\rho\alpha}{u}}\,du=\left(i\sqrt{\alpha\rho}\right)^k J_{-k}\left(2i\sqrt{\alpha\rho}\right)=\left(-i\sqrt{\alpha\rho}\right)^k J_k\left(2i\sqrt{\alpha\rho}\right).$$

Вводя, далее, функции Бесселя с мнимым аргументом

$$I_k(z)=\frac{1}{i^k}J_k(iz),$$

легко найдём, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l_0}u^{k-1}e^{u+\frac{\rho\alpha}{u}}\,du=\left(\sqrt{\alpha\rho}\right)^k I_k\left(2\sqrt{\alpha\rho}\right).$$

Итак,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{l_0}\frac{e^{u+\frac{\rho\alpha}{u}}}{u-\rho}\,du=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}\right)^k I_k\left(2\sqrt{\alpha\rho}\right).$$

Теперь по формулам (16.23) и (16.24) легко получим первую нужную нам формулу:

$$\Omega(r,\ t)=\Omega_0 e^{-\rho-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{\frac{k}{2}}I_k\left(2\sqrt{\alpha\rho}\right).\tag{16.25}$$

Возьмём теперь в формуле (16.23) радиус окружности l_0 превосходящим ρ. Тогда по известной теореме о вычетах будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l_0}\frac{e^u\,du}{u-\rho}=e^{\rho};\tag{16.26}$$

далее, на окружности l_0, вследствие того, что $|u|>\rho$, будем иметь разложение

$$\frac{1}{u-\rho}=\frac{1}{u}\frac{1}{1-\frac{\rho}{u}}=\frac{1}{u}+\frac{\rho}{u^2}+\frac{\rho^2}{u^3}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho^k}{u^{k+1}},$$

и поэтому

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{l_0}\frac{e^{u+\frac{\alpha\rho}{u}}}{u-\rho}\,du=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\int_{l_0}e^{u+\frac{\alpha\rho}{u}}u^{-k-1}\,du=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\left(i\sqrt{\alpha\rho}\right)^{-k}J_k\left(2i\sqrt{\alpha\rho}\right)=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\left(i\sqrt{\alpha\rho}\right)^{-k}i^kI_k\left(2\sqrt{\alpha\rho}\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{\frac{k}{2}}I_k\left(2\sqrt{\alpha\rho}\right). \tag{16.27}$$

Вследствие формул (16.23), (16.26) и (16.27), находим:

$$\Omega(r,\,t)=\Omega_0-\Omega_0e^{-\alpha-\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{\frac{k}{2}}I_k\left(2\sqrt{\alpha\rho}\right). \tag{16.28}$$

Возвращаясь к прежним независимым переменным, получим окончательные формулы:

$$\left.\begin{aligned}\Omega(r,\,t)&=\Omega_0e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^kI_k\left(\frac{ar}{2\nu t}\right),\\ \Omega(r,\,t)&=\Omega_0-\Omega_0e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^kI_k\left(\frac{ar}{2\nu t}\right).\end{aligned}\right\} \tag{16.29}$$

Совершенно ясно, что первой из этих формул следует пользоваться при $r\geqslant a$, а второй при $r<a$. Пользуясь таблицами бесселевых функций, нетрудно теперь вычислить значения $\Omega(r,\,t)$ для различных значений r и t. Рис. 158 даёт зависимость Ω/Ω_0 от r/a для значений $\frac{2\nu t}{a^2}=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1$. Ясно видно, как вихрь расплывается по всему пространству.

Чтобы иметь количественную характеристику быстроты расплывания вихря, найдём, через какой промежуток времени τ значение завихренности в центре вихря будет равно $\Omega_0/2$. Последняя из формул (16.29) показывает, что

$$\Omega(0,\,t)=\Omega_0\left(1-e^{-\frac{a^2}{4\nu t}}\right), \tag{16.30}$$

и, следовательно, τ должно определяться из формулы

$$e^{-\frac{a^2}{4\nu\tau}}=\frac{1}{2},\quad \tau=\frac{a^2}{4\nu\ln 2}\approx 0{,}36\,\frac{a^2}{\nu}. \tag{16.31}$$

Для воды при $\nu=0{,}01$ *см*^{2}/*сек* имеем $\tau=36a^2$, например при $a=1$ *см* будет $\tau=36$ сек. Для воздуха при $\nu=0{,}133$ *см*^{2}/*сек* имеем

$\tau = 2{,}7a^2$, т. е. при $a = 1$ *см* будет $\tau = 2{,}7$ сек. Но уже при $a = 1$ *м* окажется $\tau = 450$ мин. Отсюда ясно видно, что на вихрях малых размеров диффузия проявляется гораздо сильнее, чем на больших. С этой точки зрения при рассмотрении атмосферных движений больших масштабов (циклона, антициклона) мы могли бы совсем пренебрегать вязкостью, считая воздух идеальной жидкостью. Однако нужно иметь в виду, что движения атмосферы, особенно в нижних её слоях, носят часто турбулентный характер; турбулентность же действует на вихри таким же образом, как вязкость. Иногда грубо оценивают диффузию вихрей, происходящую под действием турбулентности, формулами, аналогичными вышеприведённым, только коэффициент ν берут гораздо большим (в 100 000—1 000 000 раз).

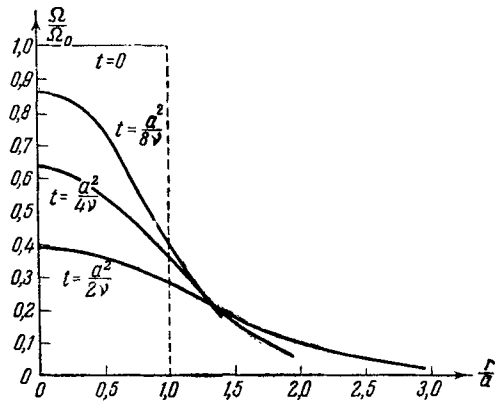

Рис. 158.

В качестве второго примера рассмотрим цилиндрический вихревой слой. Примем, что в начальный момент вихри всюду равны нулю, кроме окружности радиуса a, на которой мы имеем равномерное распределение вихрей, причём полная интенсивность этих вихрей равна Γ. Математически это означает, что функция $\Omega_0(R)$ равна нулю всюду, кроме бесконечно малой окрестности точки a, причём

$$\int_0^\infty \Omega_0(R)\, 2\pi R\, dR = \Gamma. \tag{16.32}$$

Но тогда ясно, что формула (16.17), в которой все подынтегральные элементы равны нулю, кроме элементов, соответствующих значению $R = a$ и бесконечно близким значениям, даст нам

$$\Omega(r,\ t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t}\, e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}}\, I_0\left(\frac{ar}{2\nu t}\right). \tag{16.33}$$

Рис. 159 даёт вычисленную по этой формуле зависимость Ω/Γ от r/a для значений $2\nu t/a^2 = {}^1/_6,\ {}^1/_4,\ {}^1/_2,\ 1$. Совершенно отчётливо видно, как вихрь, сконцентрированный в начальный момент времени вдоль окружности радиуса a, начинает расплываться в обе стороны,

быстро заполняет всю внутренность круга радиуса a, после чего происходит процесс расплывания вихря по всей плоскости.

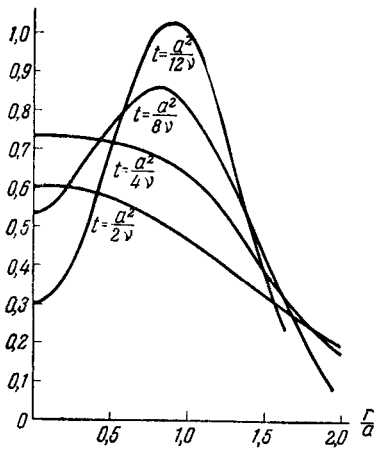

Рис. 159.

Распределение скорости в этом случае определяется формулой, вытекающей из (16.18) на основании сделанных предположений:

$$v(r,\ t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu r t}\, e^{-\frac{a^2}{4\nu t}} \int_0^r r e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} I_0\left(\frac{ar}{2\nu t}\right) dr. \tag{16.34}$$

Но выражение в правой части с точностью до перемены обозначений ($\Omega_0 = \Gamma/2\pi r$, $a = r$, $r = a$) совпадает с правой частью формулы (16.21). А тогда ясно, что, производя ту же самую перемену обозначений в формулах (16.29), мы получим для рассматриваемого нами случая цилиндрического вихревого слоя следующие результаты:

$$\left.\begin{aligned} v(r,\ t) &= \frac{\Gamma}{2\pi r} e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k I_k\left(\frac{ar}{2\nu t}\right), \\ v(r,\ t) &= \frac{\Gamma}{2\pi r} - \frac{\Gamma}{2\pi r} e^{-\frac{r^2+a^2}{4\nu t}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^k I_k\left(\frac{ar}{2\nu t}\right). \end{aligned}\right\} \tag{16.35}$$

§ 17. Течение в диффузоре. Очень важным для понимания механизма течения вязкой жидкости вблизи стенок является подробное изучение точного решения уравнений гидромеханики, определяющего течение в диффузоре, т. е. в расширяющейся трубе.

Мы будем разбирать, следуя в основном Гамелю [1]), только плоскую задачу, т. е. будем изучать движение вязкой жидкости между двумя плоскими стенками, наклонёнными друг к другу под углом α. Естественно предположить, что движение будет чисто радиальным (рис. 160). В соответствии с этим возьмём уравнения гидромеханики в цилиндрических координатах (5.14) и поставим себе задачей найти точное решение этих уравнений следующего вида:

$$v_r = v(r,\ \theta), \quad v_\theta = v_z = 0.$$

[1]) Hamel G., Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten, Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung, 25 (1916), стр. 34—60.

Уравнения (5.14) дают при этих условиях следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} v\frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right), \\ 0 &= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2\nu}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial (rv)}{\partial r} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17.1)$$

Последнее из этих уравнений показывает, что

$$rv(r, \theta) = u(\theta). \qquad (17.2)$$

Очевидно, $u(\theta)$ даёт нам распределение скоростей в единичном расстоянии от начала координат.

Среднее из равенств (17.1) приводит теперь к равенству

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{2\mu}{r^2}\frac{du}{d\theta},$$

откуда следует, что

$$p(r, \theta) = \frac{2\mu}{r^2}u(\theta) + f(r).$$

Наконец, подставляя это выражение для p в первое уравнение (17.1), легко найдём следующее дифференциальное уравнение для определения функции $u(\theta)$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + 4u + \frac{u^2}{\nu} = \frac{f'(r)\, r^3}{\mu},$$

откуда видно, что как левая, так и правая части являются постоянной величиной. Итак,

$$f'(r) = \frac{\mu C}{r^3},$$

откуда

$$f(r) = -\frac{\mu C}{2r^2} + C_1$$

и окончательно

$$p(r, \theta) = \frac{2\mu}{r^2}\left[u(\theta) - \frac{C}{4}\right] + C_1. \qquad (17.3)$$

С другой стороны, $u(\theta)$ должно удовлетворять уравнению

$$u'' + 4u + \frac{u^2}{\nu} - C = 0, \qquad (17.4)$$

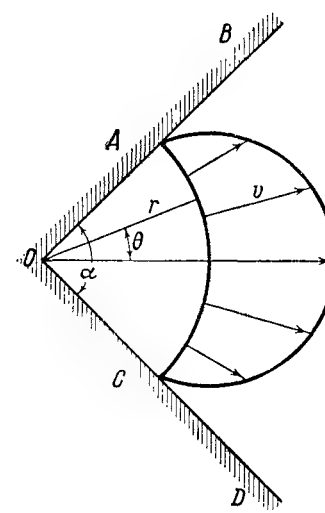

Рис. 160.

которое легко интегрируется в квадратурах. А именно, умножив предыдущее уравнение на u', мы можем после этого просто его

проинтегрировать; в результате получим:

$$\frac{u'^2}{2} + 2u^2 + \frac{u^3}{3\nu} - Cu - C_2 = 0.$$

Решаем это уравнение относительно u':

$$u' = \frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{\frac{2}{3\nu}(-u^3 - 6\nu u^2 + 3\nu Cu + 3\nu C_2)},$$

разделяем переменные и интегрируем:

$$\sqrt{\frac{2}{3\nu}}\,\theta = \pm\int \frac{du}{\sqrt{-u^3 - 6\nu u^2 + 3\nu Cu + 3\nu C_2}}. \tag{17.5}$$

Если воспользоваться эллиптическими функциями, то можно дать явное выражение зависимости u от θ. А именно, переписываем предыдущее равенство в виде:

$$\frac{i\theta}{\sqrt{6\nu}} = \pm\int \frac{du}{\sqrt{4u^3 + 24\nu u^2 - 12\nu Cu - 12\nu C_2}} \tag{17.6}$$

и полагаем

$$u(\theta) = -2\nu + u_1(\theta).$$

Тогда

$$du = du_1,\quad 4u^3 + 24\nu u^2 - 12\nu Cu - 12\nu C_2 = 4u_1^3 - g_2 u_1 - g_3,$$

где g_2 и g_2 — новые произвольные постоянные.

Если значение θ при $u = \infty$ есть θ_0 (конечно, θ_0 может оказаться комплексным числом), то, как следует из (17.6):

$$\frac{i(\theta - \theta_0)}{\sqrt{6\nu}} = \pm\int_{\infty}^{u_1} \frac{du_1}{\sqrt{4u_1^3 - g_2 u_1 - g_3}}.$$

Таким образом, θ является известной функцией от u_1 и, обратно, u_1 будет известной функцией от θ. Эта последняя хорошо исследована, а именно, она непосредственно выражается через эллиптическую функцию $\wp$ Вейерштрасса. Итак,

$$u_1 = \wp\left(\frac{i(\theta - \theta_0)}{\sqrt{6\nu}},\ g_2,\ g_3\right)$$

и, значит,

$$u(\theta) = -2\nu + \wp\left(\frac{i(\theta - \theta_0)}{\sqrt{6\nu}},\ g_2,\ g_3\right). \tag{17.7}$$

Остаётся исследовать полученное решение, представленное формулами (17.5) и (17.7). Последняя из этих формул содержит три произвольных постоянных: θ_0, g_2 и g_3, для определения которых мы имеем как раз три условия. Прежде всего на стенках диффузора, уравнения которых пусть будут $\theta = \pm\alpha/2$, должно выполняться условие прилипания жидкости к стенкам:

$$u\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = 0. \tag{17.8}$$

Кроме того, мы должны выразить ещё условие, что через любое поперечное сечение диффузора в каждую единицу времени проходит определённый объём жидкости. Этот объём выражается, очевидно, формулой:

$$Q = \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} v(r, \theta) \cdot r\, d\theta = \int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} u(\theta)\, d\theta. \tag{17.9}$$

Величину Q мы будем называть обильностью источника и будем считать её заданной. Если Q положительно, мы имеем дело с источником, т. е. с расходящимся течением в диффузоре; если же Q отрицательно, то мы имеем дело со стоком, т. е. со сходящимся течением.

Итак, для определения трёх произвольных постоянных θ_0, g_2 и g_3 мы получили три уравнения (17.8) и (17.9). Кроме того ясно, что искомая функция $u(\theta)$ не должна обращаться внутри промежутка $(-\alpha/2, \alpha/2)$ в бесконечность. Мы не будем в полном объёме решать вопрос о том, имеет ли поставленная нами задача решения и, если имеет, то сколько будет этих решений и каков будет их характер. Нашей главной задачей будет показать, что сходящиеся и расходящиеся течения в диффузоре имеют при некоторых условиях совершенно различный характер.

Целесообразно при этом сразу же ввести в рассмотрение безразмерные величины. Основной безразмерной величиной является, как мы знаем, число Рейнольдса $\mathrm{R} = \frac{Vl}{\nu}$, где V — характерная скорость, а l — характерная длина. Формула (17.9) показывает, что в нашем случае величина Q имеет как раз размерность, равную произведению размерности скорости на размерность длины. Поэтому, обозначая через $|Q|$ абсолютное значение величины Q, удобно будет определить число Рейнольдса формулой

$$\mathrm{R} = \frac{|Q|}{\nu}. \tag{17.10}$$

Вместо величины $u(\theta)$ мы введём в рассмотрение безразмерную величину $U(\theta)$, полагая

$$u(\theta) = |Q| U(\theta). \tag{17.11}$$

Ясно теперь, что уравнение (17.4) перейдёт в

$$U'' + 4U + \mathrm{R}U^2 - D = 0, \tag{17.12}$$

а формула (17.5) превратится в

$$\theta \sqrt{\frac{2\mathrm{R}}{3}} = \pm \int \frac{dU}{\sqrt{-U^3 - \frac{6}{\mathrm{R}} U^2 + D_1 U + D_2}}, \tag{17.13}$$

где D, D_1, D_2 — новые произвольные постоянные.

Наконец, формулы (17.8) и (17.9) перейдут в

$$U\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = 0; \quad \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} U(\theta)\, d\theta = \pm 1; \tag{17.14}$$

причём в последней формуле имеет место знак плюс для источника и знак минус для стока.

Разложим теперь полином, стоящий под знаком корня в формуле (17.13), на простые множители:

$$U^3 + \frac{6}{\mathrm{R}} U^2 - D_1 U - D_2 = (U - e_1)(U - e_2)(U - e_3).$$

Сравнение коэффициентов при U^2 в двух частях этого равенства показывает, что

$$e_1 + e_2 + e_3 = -\frac{6}{\mathrm{R}}. \tag{17.15}$$

Формула (17.13) принимает теперь вид:

$$\theta \sqrt{\frac{2\mathrm{R}}{3}} = \pm \int \frac{dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}}. \tag{17.16}$$

Полином третьей степени с вещественными коэффициентами, стоящий в правой части равенства, имеет три корня, один из которых всегда вещественный, два же других корня могут оказаться или вещественными, или же комплексно сопряжёнными.

Разберём сначала случай, когда имеется один вещественный корень e_1 и два комплексно сопряжённых e_2 и e_3. Тогда для всех вещественных U имеет место неравенство

$$(U - e_2)(U - e_3) > 0$$

и, следовательно, для вещественности корня, входящего в интеграл (17.16), необходимо считать

$$e_1 - U \geqslant 0,$$

так что U ограничено сверху числом e_1. Но мы знаем, что на стенках U обращается в нуль, следовательно, U меняется в пределах от 0 до e_1:

$$0 \leqslant U \leqslant e_1,$$

причём e_1 должно быть положительным. Ясно, что мы имеем дело с источником.

Пусть теперь все три корня вещественны. Расположим их в порядке убывания

$$e_1 \geqslant e_2 \geqslant e_3.$$

Ясно вследствие равенства (17.15), что e_3 отрицательно и что

$$e_3 \leqslant -\frac{2}{R}.$$

Очевидно теперь, что

$(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3) > 0$, если $-\infty < U < e_3$ или $e_2 < U < e_1$,

$(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3) < 0$, если $e_3 < U < e_2$ или $e_1 < U < \infty$.

Так как выражение, входящее под знаком корня в формулу (17.16), не может быть отрицательно, то ясно, что U должно изменяться либо в пределах от $-\infty$ до e_3, либо в пределах от e_2 до e_1. Но первый случай должен быть исключён, так как U должно принимать на стенках значение 0. Итак, мы во всяком случае должны иметь:

$$e_2 \leqslant U \leqslant e_1.$$

Различим теперь случаи источника и стока. При этом как в том, так и в другом случаях мы ограничимся рассмотрением только наиболее интересного случая, когда во всём диффузоре имеет место течение одного направления, т. е. вытекание в случае источника, втекание в случае стока. Ясно тогда, что в случае источника U положительно, причём на стенках обращается в нуль. Это может быть только, если $e_1 > 0$, $e_2 \leqslant 0$, причём U лежит в промежутке

$$0 \leqslant U \leqslant e_1.$$

Напротив, в случае стока U отрицательно, поэтому должно быть $e_2 < 0$, $e_1 \geqslant 0$ и

$$e_2 \leqslant U \leqslant 0.$$

Резюмируя сказанное, получаем: в случае стока все корни вещественны, причём

$$e_2 \leqslant U \leqslant 0, \quad e_1 \geqslant 0, \quad e_3 \leqslant -\frac{2}{R}, \tag{17.17}$$

в случае же источника есть один вещественный положительный корень e_1 и два корня e_2 и e_3 либо отрицательных, либо комплексно сопряжённых, причём

$$0 \leqslant U \leqslant e_1. \tag{17.18}$$

Рассмотрим теперь подробнее случай источника. Из симметрии ясно, что максимальное значение функции U, равное e_1, достигается на оси диффузора, т. е. при $\theta = 0$. При увеличении θ значение U уменьшается, следовательно, в формуле (17.16) нужно взять знак минус и за нижний предел нужно взять e_1. Итак, в случае источника:

$$\theta \sqrt{\frac{2\overline{R}}{3}} = -\int_{e_1}^{U} \frac{dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}} \quad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\alpha}{2}\right). \tag{17.19}$$

Значению $U = 0$ соответствует $\theta = \frac{\alpha}{2}$. Это даёт нам равенство:

$$\alpha \sqrt{\frac{\overline{R}}{6}} = \int_{0}^{e_1} \frac{dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}}. \tag{17.20}$$

Так как:

$$\sqrt{\frac{2\overline{R}}{3}}\, d\theta = -\frac{dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}},$$

последнее равенство (17.14), эквивалентное в случае источника равенству

$$\int_{0}^{\frac{\alpha}{2}} U(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2},$$

даёт нам условие

$$\sqrt{\frac{\overline{R}}{6}} = \int_{0}^{e_1} \frac{U\, dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}}. \tag{17.21}$$

Три равенства (17.15), (17.20) и (17.21) служат для определения трёх величин e_1, e_2 и e_3 при заданных $\overline{R}$ и α. Однако эта система не всегда имеет решение; мы это покажем при помощи простых оценок.

Мы имеем вследствие (17.15):

$$(U - e_2)(U - e_3) = U^2 - (e_2 + e_3)\, U + e_2 e_3 = U^2 + \left(e_1 + \frac{6}{\overline{R}}\right) U + e_2 e_3,$$

и так как для случая источника $e_2e_3 > 0$ (ибо e_2 и e_3 либо комплексно сопряжённые, либо $e_3 \leqslant e_2 \leqslant 0$), то

$$(U-e_2)(U-e_3) \geqslant \left(e_1+\frac{6}{R}\right)U.$$

Поэтому из равенства (17.20) находим:

$$\alpha\sqrt{\frac{R}{6}} < \int_0^{e_1} \frac{dU}{\sqrt{(e_1-U)\,U\left[e_1+\frac{6}{R}\right]}},$$

и так как

$$\int_0^{e_1} \frac{dU}{\sqrt{U(e_1-U)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi,$$

то получаем оценку

$$\alpha\sqrt{\frac{R}{6}} < \frac{\pi}{\sqrt{e_1+\frac{6}{R}}} \quad \text{или} \quad \alpha < \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{Re_1}{6}}}. \tag{17.22}$$

Мы видим, таким образом, что угол α во всяком случае должен быть меньше π.

Пусть теперь угол α задан. Из условий (17.18), (17.20) и (17.21) мы сразу можем вывести неравенство:

$$\sqrt{\frac{R}{6}} < e_1 \int_0^{e_1} \frac{dU}{\sqrt{(e_1-U)(U-e_2)(U-e_3)}} = e_1\alpha\sqrt{\frac{R}{6}},$$

откуда следует, что

$$e_1\alpha > 1.$$

С другой стороны, из (17.22) вытекает, что

$$\frac{Re_1\alpha^2}{6} < \pi^2 - \alpha^2,$$

т. е. вследствие предыдущего неравенства:

$$R < \frac{6(\pi^2-\alpha^2)}{\alpha}. \tag{17.23}$$

Итак, расходящееся течение в диффузоре рассматриваемого типа не может иметь места при больших числах Рейнольдса. Следовательно, при больших числах Рейнольдса вытекание жидкости из диффузора может происходить только таким образом, что внутри диффузора области вытекания жидкости будут сменяться областями втекания.

Таким образом, для случая расходящегося течения в диффузоре заданного угла раствора $\alpha < \pi$ мы имеем следующую картину: при малых числах Рейнольдса имеет место симметричное течение рассматриваемого типа; при увеличении числа Рейнольдса наступит момент, когда на стенке не только U, но и U' обратятся в нуль.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса будут существовать только такие решения, в которых области вытекания жидкости будут сопровождаться областями втекания. А именно, мы будем иметь вытекание в некоторой области $-\beta < \theta < \beta$, где $\beta < \alpha/2$, и втекание около стенок в областях $\beta < \theta < \alpha/2$ и $-\alpha/2 < \theta < -\beta$. Будут существовать также и более сложные картины течения, в которых имеет место вытекание около одной стенки (в некотором интервале $-\alpha/2 < \theta < \gamma$) и втекание около другой ($\gamma < \theta < \alpha/2$). Число таких чередующихся областей втекания и вытекания может быть сколь угодно большим, причём при увеличении числа Рейнольдса растёт и минимальное число чередующихся областей вытекания и втекания жидкости.

Если бы вязкость отсутствовала, то течение жидкости представлялось бы простыми формулами [1]):

$$U = \frac{1}{\alpha}, \quad p = p_0 - \frac{\rho Q^2}{2\alpha^2 r^2}, \tag{17.24}$$

т. е. жидкость вытекала бы во всех направлениях с одинаковой скоростью.

Мы видим, что расходящееся течение в диффузоре при больших числах Рейнольдса резко отличается от соответствующего потенциального течения. Обратим ещё внимание на то, что расходящееся течение в диффузоре есть течение против градиента давления, так как в потенциальном потоке давление быстро убывает при $r \to 0$.

В случае стока мы имеем совсем другую картину. Напишем для этого случая основные формулы. Мы знаем, что в случае стока

$$e_2 \leqslant U \leqslant 0, \quad e_1 \geqslant 0, \quad e_3 \leqslant -\frac{2}{R}. \tag{17.25}$$

Считая течение симметричным относительно оси дуффузора, мы должны принять, что минимальное значение функции U, равное e_2, получается при $\theta = 0$. При увеличении θ увеличивается и U, следовательно, в формуле (17.16) надо взять знак плюс и за нижний предел надо взять e_2. Итак, в случае стока

$$\theta \sqrt{\frac{2R}{3}} = \int_{e_2}^{U} \frac{dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}}. \tag{17.26}$$

[1]) Эти формулы легко получить, интегрируя (17.1) при $\nu = 0$ и применяя формулу (17.9).

Условие $U(\alpha/2) = 0$ даёт равенство

$$\alpha\sqrt{\frac{\mathsf{R}}{6}} = \int_{e_2}^{0} \frac{dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}}, \tag{17.27}$$

а последнее условие (17.14) — равенство:

$$\sqrt{\frac{\mathsf{R}}{6}} = -\int_{e_2}^{0} \frac{U\,dU}{\sqrt{(e_1 - U)(U - e_2)(U - e_3)}}. \tag{17.28}$$

Наконец, мы имеем основное соотношение (17.15):

$$e_1 + e_2 + e_3 = -\frac{6}{\mathsf{R}}. \tag{17.29}$$

Покажем, что для случая стока симметричное решение рассматриваемого типа имеет место как для случая очень малых, так и для случая очень больших чисел Рейнольдса.

Случай малых чисел Рейнольдса мы разберём сразу и для случая стока и для случая источника. Проще всего при этом исходить из установленного нами выше уравнения (17.12):

$$U'' + 4U + \mathsf{R}U^2 - D = 0,$$

где D есть произвольная постоянная. Так как R считается малым, то в предыдущей формуле можно пренебречь членом $\mathsf{R}U^2$; в результате получим уравнение

$$U'' + 4U = D, \tag{17.30}$$

которое непосредственно интегрируется,

$$U = \frac{D}{4} + A\cos 2\theta + B\sin 2\theta,$$

причём A, B и D суть произвольные постоянные, подлежащие определению из трёх условий:

$$U\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = 0, \quad \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} U(\theta)\,d\theta = \pm 1.$$

Эти условия дают нам следующие равенства:

$$\frac{D}{4} + A\cos\alpha + B\sin\alpha = 0,$$

$$\frac{D}{4} + A\cos\alpha - B\sin\alpha = 0,$$

$$\frac{D}{4}\alpha + A\sin\alpha = \pm 1.$$

Считая, что угол α меньше π, сразу получим, что

$$B=0,\quad A=\frac{\pm 1}{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha},\quad D=\frac{\mp 4\cos\alpha}{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha},$$

причём верхний знак всегда относится к случаю источника, нижний — к случаю стока.

Итак, искомое решение имеет следующий вид:

$$U(\theta)=\pm\frac{\cos 2\theta-\cos\alpha}{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}. \tag{17.31}$$

Вспоминая формулы (17.2) и (17.11), получим для радиальной скорости течения выражение:

$$v(r,\ \theta)=\frac{Q(\cos 2\theta-\cos\alpha)}{r(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)}, \tag{17.32}$$

пригодное одновременно и для случая источника и для случая стока (см. рис. 160, вычерченный для случая источника при $\alpha=90^\circ$). Как видим, распределение скорости в случае малых чисел Рейнольдса получилось по косинусоиде как для случая расходящегося, так и для случая сходящегося течения.

Остановимся ещё на частном случае малого угла раствора диффузора. В этом случае результат значительно упростится, если функции, входящие в формулу (17.32), разложить в ряды по возрастающим степеням θ и α и ограничиться главными членами полученных разложений:

$$v(r,\ \theta)=\frac{3Q}{2r}\,\frac{\alpha^2-4\theta^2}{\alpha^3}. \tag{17.33}$$

Как видим, получилось распределение скорости по параболе, чего и следовало ожидать, ибо, в силу малости угла α, мы приблизились к случаю течения между двумя параллельными стенками, причём, вследствие малости R, влиянием сил инерции можно пренебречь.

Рассмотрим теперь случай очень больших чисел Рейнольдса R. Как мы знаем уже, в этом случае симметричное течение рассматриваемого типа невозможно, если течение расходящееся. Остаётся исследовать случай стока. В основу рассуждений мы положим уравнения (17.27), (17.28) и (17.29). Угол α мы считаем заданной величиной, не превосходящей 2π, величину же R будем считать очень большой.

Введём теперь в интегралы (17.27) и (17.28) вместо U новую переменную ψ, положив

$$U=e_2+(e_1-e_2)\cos^2\psi=e_1-(e_1-e_2)\sin^2\psi, \tag{17.34}$$

и введём ещё параметр $k<1$, положив

$$k^2=\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}. \tag{17.35}$$

Тогда будем иметь:

$$e_1 - U = (e_1 - e_2)\sin^2\psi, \qquad U - e_2 = (e_1 - e_2)\cos^2\psi,$$

$$U - e_3 = (e_1 - e_3)(1 - k^2\sin^2\psi), \qquad dU = -2(e_1 - e_2)\sin\psi\cos\psi\, d\psi,$$

при этом значению $U = e_2$ соответствует значение $\psi = \pi/2$, а значению $U = 0$ значение $\psi = \psi_0$, где ψ_0 есть решение уравнения

$$\sin\psi_0 = \sqrt{\frac{e_1}{e_1 - e_2}}, \quad \cos\psi_0 = \sqrt{\frac{-e_2}{e_1 - e_2}} \qquad \left(0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}\right). \tag{17.36}$$

Простое вычисление показывает теперь, что равенство (17.27) заменится через

$$\alpha\sqrt{\frac{R}{6}} = \frac{2}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_{\psi_0}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}, \tag{17.37}$$

равенство же (17.28) примет вид:

$$\sqrt{\frac{R}{6}} = -\frac{2}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_{\psi_0}^{\pi/2} \frac{[e_1 - (e_1 - e_2)\sin^2\psi]\, d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} =$$

$$= -\frac{2e_3}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_{\psi_0}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} -$$

$$-2\sqrt{e_1 - e_3} \int_{\psi_0}^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\, d\psi. \tag{17.38}$$

Полученные равенства показывают, что k должно быть очень близко к 1, так как в противном случае эллиптические интегралы имеют конечное значение, и правые части формул (17.37) и (17.38) были бы конечными, в то время как левые части этих формул, по предположению, очень велики. Итак, k мало отличается от 1; по формуле (17.35) это означает, что e_3 мало отличается от e_2:

$$e_3 \approx e_2.$$

Но тогда формула (17.29)

$$e_1 + e_2 + e_3 = -\frac{6}{R},$$

в которой можно пренебречь правой частью, показывает, что приближённо

$$e_1 \approx -2e_2.$$

В соответствии с этим упрощаются и формулы (17.37) и (17.38); первая из них принимает вид:

$$\alpha\sqrt{\frac{R}{6}}=\frac{2}{\sqrt{-3e_2}}\int_{\psi_0}^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

во второй же формуле можно отбросить в правой части второй интеграл, как имеющий конечное значение; в результате получим:

$$\sqrt{\frac{R}{6}}=-\sqrt{-\frac{4}{3}e_2}\int_{\psi_0}^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}.$$

Сравнение двух полученных соотношений показывает, что должно быть

$$e_2=-\frac{1}{\alpha}\quad\text{и}\quad\int_{\psi_0}^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=\sqrt{\frac{R\alpha}{8}}. \tag{17.39}$$

Для определения угла ψ_0 мы имеем формулы (17.36), которые дают нам:

$$\sin\psi_0=\sqrt{\frac{2}{3}},\quad\cos\psi_0=\sqrt{\frac{1}{3}},\quad\psi_0=54^\circ 44'. \tag{17.40}$$

Остаётся отыскать k; для этого заметим, что

$$\int_{\psi_0}^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}-\int_0^{\psi_0}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

и что при k, близких к единице, мы имеем приближённые равенства:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\approx\ln\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}\ ^{1}),$$

$$\int_0^{\psi_0}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\approx\int_0^{\psi_0}\frac{d\psi}{\cos\psi}=\ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)\Big|_{\psi'=0}^{\psi=\psi_0}=$$

$$=\ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi_0}{2}\right)=\ln\frac{1+\sin\psi_0}{\cos\psi_0}=\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right).$$

Поэтому равенство (17.39) даёт нам, что

$$\ln\frac{4}{\sqrt{1-k^2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\sqrt{\frac{R\alpha}{8}},$$

---

[1]) См. напр., Уиттекер—Ватсон, Курс соврем. анализа, ГТТИ, 1934 стр. 371—372.

откуда

$$1 - k^2 = 16\,(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2\, e^{-\sqrt{\frac{R\alpha}{2}}}.$$

Но по формуле (17.35) мы имеем:

$$1 - k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

и приближённо $e_1 - e_3 \approx -3e_2$, поэтому

$$e_2 - e_3 = -48\,(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2\, e_2 e^{-\sqrt{\frac{R\alpha}{2}}}.$$

Итак, при больших числах Рейнольдса R симметричное течение рассматриваемого типа для случая сходящегося течения в диффузоре существует и определяется следующими приближёнными значениями параметров:

$$e_2 = -\frac{1}{\alpha},\quad e_3 = -\frac{1}{\alpha}\left[1 + 48\,(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2\, e^{-\sqrt{R\alpha/2}}\right], \tag{17.41}$$

$$e_1 = \frac{2}{\alpha}.$$

Остаётся найти распределение скоростей. Из равенства (17.26) после простых вычислений получим:

$$\theta\sqrt{\frac{R}{6}} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_{\psi}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}}.$$

Рассуждая, как выше, получим:

$$\int_{\psi}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} \approx \ln\frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} - \ln \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{R\alpha}{8}} + \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \ln \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right).$$

Так как ещё $e_1 - e_3 \approx \frac{3}{\alpha}$, то легко находим, что

$$\sqrt{\frac{R}{2\alpha}} = \sqrt{\frac{R\alpha}{8}} + \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \ln \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right). \tag{17.42}$$

Но по основной формуле (17.34):

$$U = e_2 + (e_1 - e_2)\cos^2\psi = -\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\alpha}\cos^2\psi. \tag{17.43}$$

Так как

$$\cos\psi = \frac{2}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)} = \frac{2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,e^{\sqrt{R/2\alpha}\,(\alpha/2-\theta)}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,e^{-\sqrt{R/2\alpha}\,(\alpha/2-\theta)}}$$

и так как

$$v(r,\ \theta) = -\frac{QU}{r},$$

то мы находим окончательное выражение для распределения скорости:

$$v(r,\ \theta) = \frac{Q}{r\alpha}\left\{1-\frac{12}{\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,e^{\sqrt{R,2\alpha}\,(\alpha/2-\theta)}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,e^{-\sqrt{R/2\alpha}\,(\alpha/2-\theta)}\right]^2}\right\}. \quad (17.44)$$

Легко теперь видеть, что почти во всём секторе $0 < \theta < \alpha/2$, за исключением непосредственной близости стенки, значение скорости $v(r,\ \theta)$ очень мало отличается от значения $Q/r\alpha$ (см. рис. 161, вычерченный для $\alpha = 60°$, $R = 100$). Только при значениях θ, близких к $\alpha/2$, значение показательной функции $e^{\sqrt{R,2\alpha}\,(\alpha/2-\theta)}$ будет невелико, и второй член в фигурных скобках предыдущей формулы сильно повлияет на величину $v(r,\ \theta)$.

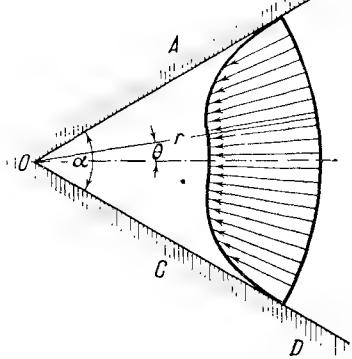

Рис. 161.

Итак, для случая сходящегося течения в диффузоре течение при больших числах Рейнольдса очень мало отличается от потенциального течения идеальной жидкости. Только вблизи стенок происходит очень быстрое изменение скорости от значений, соответствующих потенциальному потоку идеальной жидкости, до нулевых значений, требуемых условиями прилипания вязкой жидкости к стенкам. Обратим внимание на то, что сходящееся течение в диффузоре происходит в направлении падения давления. В то время, как при малых числах Рейнольдса сходящееся и расходящееся течения в диффузоре имеют одинаковый характер, при больших числах Рейнольдса течения носят совершенно различный характер, а именно, сходящееся течение всюду, кроме непосредственной близости стенок, мало отличается от потенциального течения, расходящееся же течение резко отличается от потенциального течения.

§ 18. Решение Гамеля и его обобщения. Течение в диффузоре, рассмотренное нами в предыдущем параграфе, является частным случаем гораздо более общего точного решения уравнений гидромеханики вязкой несжимаемой жидкости, которое мы сейчас и рассмотрим. Движение жидкости мы будем предполагать плоским, стационарным и происходящим под действием сил, имеющих потенциал.

В § 8 было показано, что в этом случае проекции скорости могут быть выражены через функцию тока $\Psi(x, y)$:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \tag{18.1}$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial y} = \nu\Delta\Delta\Psi. \tag{18.2}$$

Введём теперь вместо x и y криволинейные координаты φ и χ, которые мы выберем таким образом, чтобы выражение

$$\tau = \varphi(x, y) + i\chi(x, y)$$

было аналитической функцией от

$$z = x + iy.$$

Итак,

$$\varphi + i\chi = \tau(z), \tag{18.3}$$

так что $\varphi(x, y)$ и $\chi(x, y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \Delta\chi = 0. \tag{18.4}$$

Смысл этого преобразования состоит в следующем: составив уравнение для Ψ в переменных φ и χ, мы можем затем отыскивать решение этого уравнения, зависящее, например, только от φ. Ясно тогда, что линии тока нашего движения вязкой жидкости будут совпадать с линиями $\varphi = \text{const}$., т. е. линиями тока некоторого потенциального движения, хотя само движение не будет потенциальным, если вихрь $\Omega = -\Delta\Psi$ будет отличным от нуля.

Прежде всего преобразуем к новым переменным выражение

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}.$$

При этом мы будем для отчётливости пользоваться временно следующим обозначением:

$$\Delta_\varphi\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\chi^2}.$$

Составим теперь производную

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\chi}{\partial y} + i\frac{\partial\chi}{\partial x}$$

и обозначим через Q квадрат её модуля:

$$Q=\left|\frac{d\tau}{dz}\right|^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2=$$
$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial x}=\frac{D(\varphi,\chi)}{D(x,y)}. \tag{18.5}$$

Простое вычисление показывает, что

$$\Delta\Psi=Q\,\Delta_\varphi\Psi. \tag{18.6}$$

Левая часть уравнения (18.2) может быть представлена в виде якобиана:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial y}=\frac{D(\Delta\Psi,\Psi)}{D(x,y)},$$

но, как известно, для якобианов имеет место правило дифференцирования сложных функций:

$$\frac{D(\Delta\Psi,\Psi)}{D(x,y)}=\frac{D(\Delta\Psi,\Psi)}{D(\varphi,\chi)}\frac{D(\varphi,\chi)}{D(x,y)}=Q\frac{D(\Delta\Psi,\Psi)}{D(\varphi,\chi)}=Q\frac{D(Q\Delta_\varphi\Psi,\Psi)}{D(\varphi,\chi)}.$$

Поэтому уравнение (18.2) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial(Q\Delta_\varphi\Psi)}{\partial\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}-\frac{\partial(Q\Delta_\varphi\Psi)}{\partial\chi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}=\nu\Delta_\varphi(Q\Delta_\varphi\Psi). \tag{18.7}$$

Поскольку теперь мы будем рассматривать все функции зависящими от φ и χ, не будем больше писать значок φ при обозначении лапласиана Δ.

Производя дифференцирование всех членов уравнения (18.7) и деля все члены его на Q, мы придём к равенству:

$$\left(\frac{\partial\ln Q}{\partial\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}-\frac{\partial\ln Q}{\partial\chi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right)\Delta\Psi+\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial\chi}-\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial\chi}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}=$$
$$=\nu\left[\Delta\Delta\Psi+2\frac{\partial\ln Q}{\partial\varphi}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial\varphi}+2\frac{\partial\ln Q}{\partial\chi}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial\chi}+\frac{\Delta Q}{Q}\Delta\Psi\right]. \tag{18.8}$$

Функция $\ln(d\tau/dz)$ есть аналитическая функция от z и, следовательно, от τ. Вещественной частью этой функции является, как известно,

$$\ln\left|\frac{d\tau}{dz}\right|=\ln\sqrt{Q}=\frac{1}{2}\ln Q.$$

Отсюда мы заключаем, что, во-первых, $\ln Q$ есть гармоническая функция, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\ln Q=0 \tag{18.9}$$

и, во-вторых, имеем равенство

$$\frac{d}{d\tau}\ln\frac{d\tau}{dz}=\frac{\partial\frac{1}{2}\ln Q}{\partial\varphi}-i\frac{\partial\frac{1}{2}\ln Q}{\partial\chi}.$$

Введём теперь обозначения

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial \varphi} = a, \quad -\frac{\partial \ln Q}{\partial \chi} = b, \tag{18.10}$$

тогда мы будем иметь

$$2\frac{d}{d\tau}\ln\frac{dz}{dz} = a + ib. \tag{18.11}$$

Заметим ещё, что

$$\begin{aligned}\Delta \ln Q &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \chi}\left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \chi}\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \chi}\left(\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial \chi}\right) = \\ &= \frac{1}{Q}\Delta Q - \frac{1}{Q^2}\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \chi}\right)^2\right] = \frac{\Delta Q}{Q} - \left[\left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \chi}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Поэтому равенство (18.9) даёт нам, если принять во внимание ещё (18.10), что

$$\frac{\Delta Q}{Q} = a^2 + b^2. \tag{18.12}$$

Итак, уравнение (18.8) принимает следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned}\nu\left[\Delta\Delta\Psi + 2a\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial \varphi} - 2b\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial \chi} + (a^2 + b^2)\Delta\Psi\right] = \\ = \left(a\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} + b\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\right)\Delta\Psi + \frac{\partial \Delta\Psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} - \frac{\partial \Delta\Psi}{\partial \chi}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}.\end{aligned} \tag{18.13}$$

Достаточно решить это уравнение для каких-либо гармонических сопряжённых функций $a(\varphi, \chi)$ и $b(\varphi, \chi)$, чтобы получить некоторое точное решение уравнений движения вязкой жидкости.

Мы примем, что a и b суть постоянные величины. Интегрирование уравнения (18.11) даёт нам в этом случае, что

$$\ln\frac{d\tau}{dz} = \frac{a + ib}{2}\tau + \ln C,$$

откуда

$$\frac{d\tau}{dz} = Ce^{\frac{a+ib}{2}\tau}.$$

Разделяя переменные и ещё раз интегрируя, найдём:

$$C(z - z_0) = -\frac{2}{a + ib}e^{-\frac{a+ib}{2}\tau},$$

или, наконец,

$$\tau = \varphi + i\chi = -\frac{2}{a + ib}\ln(z - z_0). \tag{18.14}$$

Здесь положено для простоты $C = -\frac{2}{a+ib}$, что нисколько не вредит общности рассуждений.

Вводя полярные координаты

$$z - z_0 = re^{i\theta} \tag{18.15}$$

и разделяя в (18.14) вещественную и мнимую части, получим:

$$\varphi = -\frac{2(a\ln r + b\theta)}{a^2+b^2}, \quad \chi = \frac{2(b\ln r - a\theta)}{a^2+b^2}. \tag{18.16}$$

Очевидно, что кривые $\varphi = \text{const}$. и $\chi = \text{const}$. образуют два семейства логарифмических спиралей, ортогонально пересекающих друг друга (рис. 162).

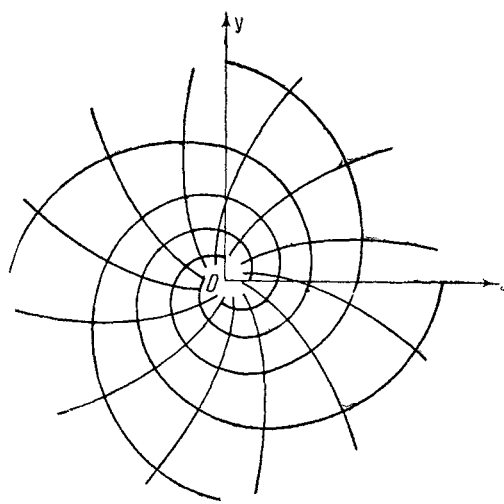

Рис. 162.

Мы можем теперь отыскивать частные решения уравнения (18.13). Так, например, Гамель нашёл решение этого уравнения, зависящее только от φ:

$$\Psi = f(\varphi). \tag{18.17}$$

Осеен [1]) рассмотрел решения уравнения (18.13) вида:

$$\Psi = f(\varphi) + c\chi, \tag{18.18}$$

[1]) Oseen C. W., Exakte Lösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen, Arkiv för Matematik, Astr. und Fysik, №№ 14, 22 (1927).

где c — постоянное число; Розенблатт [1]) же изучил более общие решения уравнения (18.13), имеющие вид:

$$\Psi = f(\varphi) + \chi^m f_1(\varphi), \tag{18.19}$$

где m — положительное число.

Рассмотрим, например, случай Гамеля, т. е. положим, что

$$\Psi = f(\varphi); \tag{18.20}$$

тогда уравнение (18.13) приводит к уравнению четвёртого порядка для определения функции f:

$$f^{IV} + 2af''' + (a^2 + b^2) f'' - \frac{b}{\nu} f' f'' = 0,$$

которое сразу интегрируется

$$f''' + 2af'' + (a^2 + b^2) f' - \frac{b}{2\nu} f'^2 = C,$$

где C есть произвольная постоянная. Положим теперь, вместе с Гамелем,

$$f' = u, \tag{18.21}$$

тогда u удовлетворяет уравнению второго порядка

$$u'' + 2au' + (a^2 + b^2) u - \frac{b}{2\nu} u^2 = C. \tag{18.22}$$

Проекции скорости в цилиндрических координатах просто выражаются через u; в самом деле, аналогично формулам (18.1), мы можем написать:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}. \tag{18.23}$$

Поэтому на основании (18.20) и (18.16) мы имеем, например:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} f'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{2b}{a^2 + b^2} \frac{u}{r}.$$

Итак, мы получаем формулы:

$$v_r = -\frac{2b}{a^2 + b^2} \frac{u}{r}, \qquad v_\theta = \frac{2a}{a^2 + b^2} \frac{u}{r}. \tag{18.24}$$

Заметим, что при $b = 0$ мы получаем $v_r = 0$, т. е. получаем движение по концентрическим окружностям, разобранное нами в § 15; напротив, при $a = 0$ мы получаем $v_\theta = 0$, т. е. мы имеем дело с чисто радиальным течением, случай, рассмотренный нами в предыдущем параграфе.

---

[1]) Rosenblatt A., Solutions exactes des équations du mouvement des liquides visqueux, Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. 72 (1935).

Эта работа содержит обзор точных решений уравнений движения вязкой жидкости.

Если же как a, так и b отличны от нуля, то уравнением линий тока будет служить

$$\Psi = \text{const.},$$

так как Ψ зависит только от φ, то линиями тока будут кривые

$$\varphi = \text{const.}, \quad \text{т. е.} \quad a \ln r + b\theta = \text{const.} \tag{18.25}$$

Мы уже упоминали, что эти кривые образуют семейство логарифмических спиралей. Итак, решение Гамеля определяет движение по логарифмическим спиралям.

В качестве второго примера отыщем частное решение уравнения (18.13), имеющее вид:

$$\Psi = f(\varphi) + C\chi. \tag{18.26}$$

Вводя прежнее обозначение

$$f'(\varphi) = u, \tag{18.27}$$

будем, очевидно, иметь:

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\chi^2} = u', \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = u, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\chi} = C;$$

поэтому уравнение (18.13) приведётся к такому:

$$\nu[u''' + 2au'' + (a^2 + b^2)u'] = aCu' + buu' + Cu''.$$

После простого интегрирования получаем:

$$u'' + 2au' + (a^2 + b^2)u = \frac{aC}{\nu}u + \frac{b}{2\nu}u^2 + \frac{C}{\nu}u' + C_1, \tag{18.28}$$

где C_1 — новая постоянная. Полученное уравнение легко интегрируется до конца в том частном случае, когда постоянная C имеет такое значение, что из уравнения выпадают члены, содержащие u', т. е. когда

$$C = 2\nu a,$$

так что

$$\Psi = f(\varphi) + 2\nu a\chi. \tag{18.29}$$

В самом деле, умножая вытекающее из (18.28) уравнение:

$$u'' = (a^2 - b^2)u + \frac{b}{2\nu}u^2 + C_1$$

на u', мы сможем проинтегрировать его ещё один раз, в результате чего получим:

$$u'^2 = \frac{b}{3\nu}u^3 + (a^2 - b^2)u^2 + 2C_1u + C_2,$$

где C_2 — новая постоянная. Если теперь подставить

$$u' = \frac{du}{d\varphi},$$

то переменные могут быть разделены, и мы получаем искомое решение в виде:

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{b}{3\nu} u^3 + (a^2 - b^2) u^2 + 2C_1 u + C_2}}. \qquad (18.30)$$

Полученное уравнение определяет φ как некоторую функцию от u; обратная функция $u(\varphi)$ является, как известно, эллиптической функцией.

§ 19. Одномерное движение вязкой сжимаемой жидкости. В качестве примера точного решения для вязкой сжимаемой жидкости рассмотрим одномерное стационарное движение, в котором все гидродинамические элементы зависят лишь от одной координаты, например, от x:

$$v_x = u(x), \quad v_y = v_z = 0, \quad p = p(x), \quad \rho = \rho(x).$$

Здесь

$$\operatorname{div} v = \frac{du}{dx},$$

и мы можем написать

$$p_{xx} = -p + (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dx}, \quad p_{xy} = p_{yx} = p_{xz} = p_{zx} = p_{yz} = p_{zy} = 0,$$

$$p_{yy} = -p + \lambda \frac{du}{dx}, \quad p_{zz} = -p + \lambda \frac{du}{dx}.$$

Если внешних сил нет, первое из уравнений движения (4.8) даст

$$u\frac{du}{dx} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}\left[-p + (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dx}\right]; \qquad (19.1)$$

остальные два выполняются сами собой. Уравнение неразрывности даст

$$\frac{d\rho u}{dx} = 0. \qquad (19.2)$$

Наконец, уравнение притока тепла (10.5) в нашем движении приведётся к виду

$$c_v \rho u \frac{dT}{dt} + Ap\rho u \frac{d}{dx}\frac{1}{\rho} = \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + A(\lambda + 2\mu)\left(\frac{du}{dx}\right)^2, \qquad (19.3)$$

причём, как и прежде, мы считаем, что

$$T = \frac{p}{R\rho}. \qquad (19.4)$$

Уравнение (19.2) интегрируется и даёт

$$\rho u = a = \text{const}. \qquad (19.5)$$

Умножая обе части (19.1) на ρ и используя (19.5), получим, путём интегрирования:

$$au = -p + (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dx} + b, \tag{19.6}$$

где b — вторая произвольная постоянная интегрирования.

Обратимся к уравнению (19.3). Из уравнения (19.6) мы можем найти $(\lambda + 2\mu)\,du/dx$ и вставить это в правую часть (19.3); кроме того, мы можем заменить ρu по (19.5). Мы получим:

$$c_v a\frac{dT}{dt} + Apa\frac{d}{dx}\frac{1}{\rho} = \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + A\frac{du}{dx}\{au + p - b\},$$

но теперь легко видеть, что члены, содержащие p в этом уравнении, сокращаются; в самом деле, по (19.5):

$$a\frac{d}{dx}\frac{1}{\rho} = \frac{d}{dx}\frac{a}{\rho} = \frac{du}{dx}.$$

Мы можем теперь выполнить и здесь квадратуры и тогда получим

$$c_v aT = k\frac{dT}{dx} + a\frac{A}{2}u^2 - bAu + c, \tag{19.7}$$

где c — третья постоянная интегрирования.

Итак, задача сводится к определению четырёх функций u, T, p, ρ из двух дифференциальных уравнений первого порядка (19.6), (19.7) и двух конечных уравнений (19.4), (19.5). Умножая обе части (19.6) на u и, замечая, что $up = u\rho RT = aRT$, получим:

$$(\lambda + 2\mu)\,u\frac{du}{dx} = au^2 + RaT - bu. \tag{19.8}$$

Как только мы найдём u и T из двух дифференциальных уравнений (19.7) и (19.8), мы определим давление из соотношения (19.6), а плотность из (19.5).

И u и T являются функциями одного только x, значит, мы можем считать, что T есть функция одного u, например. Беккеру удалось найти решение этих уравнений, имеющее совершенно ясный физический смысл. Именно, Беккер ищет T в виде полинома второй степени от u:

$$T = \alpha + \beta u + \gamma u^2 \tag{19.9}$$

с коэффициентами, которые надлежит далее подобрать. Вставляя это T в (19.7), получим, после приведения подобных членов

$$k(\beta + 2\gamma u)\frac{du}{dx} = \left(ac_v\gamma - a\frac{A}{2}\right)u^2 + (ac_v\beta + aA)\,u + ac_v\alpha - c.$$

Уравнение же (19.8) даст:

$$(\lambda + 2\mu)\,u\frac{du}{dx} = (a + Ra\gamma)\,u^2 + (Ra\beta - b)\,u + Ra\alpha. \tag{19.10}$$

Сравнение этих двух уравнений заставляет нас считать, что

$$\beta = 0, \quad \frac{2k\gamma}{\gamma + 2\mu} = \frac{c_v\gamma - \frac{A}{2}}{1 + R\gamma} = -A = \frac{ac_v\alpha - c}{Ra\alpha}. \qquad (19.11)$$

Для определения двух коэффициентов α и γ мы имеем три уравнения (19.11). Решая эти уравнения, мы получим без труда

$$\alpha = \frac{c}{a(c_v + AR)}, \quad \gamma = -\frac{\lambda + 2\mu}{2k} A, \qquad (19.12)$$

но при этом обязательно должно выполняться следующее соотношение, связывающее между собой оба коэффициента λ и μ, коэффициент теплопроводности k и величину c_p:

$$c_p \frac{\lambda + 2\mu}{k} = 1. \qquad (19.13)$$

Соотношение это выполняется для воздуха с большой точностью; так, если $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, то получается $\frac{c_p\mu}{k} = 0{,}75$; для воздуха:

$$\frac{c_p\mu}{k} \approx 0{,}733.$$

Предположим поэтому вместе с Беккером, что (19.13) имеет место. Так как $c_p - c_v = AR$, то теперь

$$\alpha = \frac{c}{ac_p}, \quad \gamma = -\frac{A}{2c_p}. \qquad (19.14)$$

Уравнение (19.10) примет вид:

$$(\lambda + 2\mu) u \frac{du}{dx} = a \frac{c_p + c_v}{2c_p} u^2 - bu + \frac{RC}{c_p}. \qquad (19.15)$$

Уравнение это легко интегрируется. Прежде всего, его можно представить в виде

$$(\lambda + 2\mu) u \frac{du}{dx} = a \frac{c_p + c_v}{2c_p} (u - u_1)(u - u_2), \qquad (19.16)$$

где постоянные u_1 и u_2 связаны с b/a и c/a соотношениями:

$$\frac{2c_p}{c_p + c_v} \frac{b}{a} = u_1 + u_2, \quad \frac{2R}{c_p + c_v} \frac{c}{a} = u_1 u_2.$$

Мы можем теперь записать интеграл (19.16) в виде:

$$\frac{\varkappa + 1}{2\varkappa(\lambda + 2\mu)} ax = \frac{u_1}{u_1 - u_2} \ln \frac{u_1 - u}{u_1 - u_2} - \frac{u_2}{u_1 - u_2} \ln \frac{u - u_2}{u_1 - u_2}, \qquad (19.17)$$

где произвольная постоянная интегрирования, входящая вместе с x аддитивно, положена равной нулю (что, конечно, не нарушает

общности). Выражение для температуры T примет при этом вид:

$$T = \frac{\varkappa+1}{2\varkappa R}\left(u_1 u_2 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}u^2\right). \tag{19.18}$$

Физический смысл (19.17) очень прост. При $x = -\infty$ мы имеем $u = u_1$, при $x = +\infty$ $u = u_2$ (нетрудно убедиться, что мы всегда можем считать $u_1 > u_2$). Назовём ещё через ρ_1, p_1, T_1 плотность, давление и температуру при $x = -\infty$, а через ρ_2, p_2, T_2 — те же величины при $x = +\infty$. Равенство (19.5) даст тогда:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2. \tag{19.19}$$

Так как вследствие (19.16) du/dx обращается на бесконечности в нуль, равенство (19.6) даст:

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2. \tag{19.20}$$

Наконец, исключим b из (19.6) и (19.7) и заметим, что на бесконечности не только du/dx, но и dT/dx обращаются в нуль. Получим после простых преобразований

$$\rho_1 u_1\left(\frac{c_v T_1}{A} + \frac{u_1^2}{2}\right) + u_1 p_1 = \rho_2 u_2\left(\frac{c_v T_2}{A} + \frac{u_2^2}{2}\right) + u_2 p_2. \tag{19.21}$$

Но уравнения (19.19) — (19.21) в точности совпадают с теми соотношениями, которые получаются из условий существования сильных разрывов в идеальной жидкости [глава первая, формулы (2.15) — (2.17)] для случая одномерного стационарного движения ($\theta = -V_n = -u$). В идеальной жидкости мы имели бы движение с постоянной скоростью u_1, плотностью ρ_1, давлением p_1, вплоть до поверхности разрыва; затем движение скачком приняло бы скорость u_2, плотность ρ_2, давление p_2. В вязкой жидкости мы имеем непрерывный переход от u_1 к u_2 при помощи (19.17); по (19.5) мы можем найти ρ, по (19.6) — p. Мы имеем как бы «размывание» поверхности разрыва.

Какова же будет толщина переходного слоя, заменяющего поверхность разрыва? Подсчитаем по (19.17), чему будет равно расстояние Δx, на протяжении которого u изменится от $0{,}9\ u_1$ до $1{,}1\ u_2$. Это будет

$$\Delta x = \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\,\frac{\lambda+2\mu}{a}\left\{-\frac{n}{n-1}\ln\frac{0{,}1n}{n-1{,}1} + \frac{1}{n-1}\ln\frac{0{,}9n-1}{0{,}1}\right\},$$

где $n = u_1/u_2$.

Пусть

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu, \quad \varkappa = 1{,}40; \quad \frac{\mu}{\rho_1} = 0{,}133\ см^2/сек, \quad n = 2;$$

$$u_1 = 4 \cdot 10^4\ см/сек,$$

тогда будет

$$\Delta x = \frac{2 \cdot 1{,}40}{2{,}40}\,\frac{4}{3}\,\frac{0{,}133}{4}\,10^{-4}\ln 162 \approx 0{,}263 \cdot 10^{-5}\ см.$$

Величина эта имеет порядок длины пробега молекул; такое расстояние пренебрежимо с точки зрения механики сплошной среды. Это является до некоторой степени подтверждением правильности тех исследований разрывов, которое мы проводили в главе по газовой динамике. Некоторым предостережением является то, что при рассмотрении расстояний порядка длины пробега молекулы мы едва ли можем пользоваться уравнениями механики сплошной среды.

§ 20. Задача об обтекании полубесконечной пластинки несжимаемой жидкостью. Пусть плоская полубесконечная пластинка движется параллельно самой себе с постоянной скоростью v вдоль отрицательной оси X. Нам удобно будет обратить движение и рассматривать обтекание пластинки, расположенной вдоль оси OX $(x>0)$.

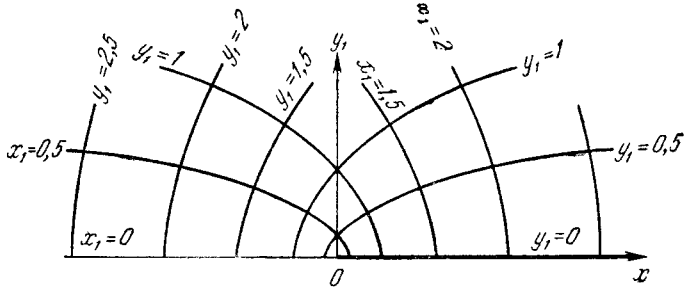

Рис. 163.

равномерным потоком, имеющим постоянную скорость U (рис. 163)[1]). Рассмотрим случай несжимаемой жидкости.

Вводим функцию тока ψ из равенств

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{20.1}$$

и приходим вновь к уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} = \nu\Delta\Delta\psi. \tag{20.2}$$

Это уравнение будем решать при следующих краевых условиях.

Вдоль пластинки мы должны записать условие прилипания $(v_x = v_y = 0)$, и это значит, что

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \ x \geqslant 0. \tag{20.3}$$

[1]) Исследование задачи излагается по работе Кочина Н. Е., выполненной в 1944 г. и опубликованной впервые в Собр. соч. Кочина Н. Е., т. II; 1948.

На бесконечности имеем условие

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = U. \tag{20.4}$$

Для удобства решения задачи перейдём от координат x, y к параболическим координатам x_1, y_1 с помощью соотношения

$$z = \tau^2, \tag{20.5}$$

где $z = x + iy$, $\tau = x_1 + iy_1$, так что $x = x_1^2 - y_1^2$, $y = 2x_1y_1$. Координатные линии $x_1 = \text{const.} = C$ представляют собой параболы

$$x = C^2 - \frac{1}{4C^2}\,y^2,$$

причём линия $x_1 = 0$ вырождается в дважды проходимый отрезок вещественной оси x от $-\infty$ до 0.

Линии $y_1 = \text{const.} = C$ являются также параболами

$$x = \frac{1}{4C^2}\,y^2 - C^2,$$

причём линия $y_1 = 0$ вырождается в дважды проходимый отрезок вещественной оси от $x = 0$ до $x = +\infty$.

Чтобы перейти в уравнении (20.2) к новым переменным, мы можем воспользоваться преобразованием, приведённым в предыдущем параграфе; достаточно положить в (18.3):

$$\varphi(x, y) = x_1, \quad \chi(x, y) = y_1.$$

При этом будет по (18.5)

$$Q = \left|\frac{d\tau}{dz}\right|^2 = \left|\frac{d\sqrt{z}}{dz}\right|^2 = \frac{1}{4|z|} = \frac{1}{4(x_1^2 + y_1^2)},$$

и уравнение (20.2) по (18.7) может быть записано в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\Delta\psi}{x_1^2 + y_1^2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\Delta\psi}{x_1^2 + y_1^2} = \nu\Delta_1\frac{\Delta_1\psi}{x_1^2 + y_1^2}, \tag{20.6}$$

причём

$$\Delta_1\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y_1^2}.$$

Установим теперь краевые условия для ψ. Пластинка соответствует линии $y_1 = 0$. Таким образом, по (20.3) имеем

$$\text{при } y_1 = 0: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y_1} = 0. \tag{20.7}$$

При удалении от пластинки скорость должна стремиться к U.

Удаление от пластинки отвечает стремлению y_1 к ∞. Так как

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y} = \frac{1}{2(x_1^2+y_1^2)}\left(y_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\right),$$

$$-v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{1}{2(x_1^2+y_1^2)}\left(x_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - y_1\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\right),$$

то мы имеем

$$v_x y_1 - v_y x_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}.$$

Разделим это равенство на y_1 и устремим y_1 к ∞, принимая во внимание, что при $y_1 \to \infty$ $v_x \to U$, $v_y \to 0$. Получим:

$$\lim_{y_1\to\infty}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\psi}{y_1}\right) = 2U. \tag{20.8}$$

Будем искать решение уравнения (20.6) в виде ряда

$$\psi \sim x_1 f_0(y_1) + \frac{1}{x_1}f_1(y_1) + \frac{1}{x_1^3}f_2(y_1) + \frac{1}{x_1^5}f_3(y_1) + \ldots \tag{20.9}$$

Ряд этот можно рассматривать лишь для больших значений x_1, сходимость его сомнительна, но можно считать его асимптотическим рядом.

После подстановки (20.9) в (20.6) получим, собирая члены при одинаковых степенях x_1, рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций f_0, f_1, f_2, ...:

$$\nu f_0^{IV} + f_0 f_0''' + f_0' f_0'' = 0; \tag{20.10}$$

$$\nu f_1^{IV} + f_0 f_1''' + 3f_0' f_1'' + f_0'' f_1' - f_0''' f_1 = \nu(y_1^2 f_0^{IV} + 4y_1 f_0''') + y_1^2 f_0 f_0''' + 3y_1^2 f_0' f_0'' + 2y_1 f_0 f_0''; \tag{20.11}$$

$$\begin{aligned}\nu f_2^{IV} + f_0 f_2''' + 5f_0' f_2'' - 3f_0''' f_2 = {}& \nu(y_1^2 f_1^{IV} + 4y_1 f_1''' - 12f_1' - 4y_1^2 f_1^{IV} - 8y_1^2 f_0''') - \\ & - (y_1^4 f_0 f_0''' - 5y_1^4 f_0' f_0'' + 4y_1^3 f_0 f_0'') + \\ & + y_1^3(f_0 f_0''' + 5f_0' f_0'' + 3f_0'' f_1' - f_0''' f_1) + 2y_1(f_0 f_1'' - f_0'' f_0) - \\ & - 2(f_0 f_1' + 5f_0' f_1 + f_1 f_1''' - 3f_1' f_1'''),\end{aligned} \tag{20.12}$$

и вообще

$$\nu f_n^{IV} + f_0 f_n''' + (2n+1) f_0' f_n'' + f_0'' f_n' = F_n(y_1, f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}), \tag{20.13}$$

причём правая часть содержит независимую переменную y_1 и функции f_0, f_1, ..., f_{n-1} с их производными до 4-го порядка.

Ход решения будет теперь следующим. Из нелинейного уравнения (20.10) надо определить f_0. После того, как f_0 известно, мы можем перейти к определению f_1 из линейного (по отношению к f_1) уравнения с коэффициентами и правой частью, зависящими от f_0. Далее, определим f_2 из линейного (по отношению к f_2) уравнения с коэффициентами, зависящими от f_0 и с правой частью, содержащей f_0, f_1 и т. д.

Граничные условия для функций f_0, f_1, ... будут следующие

$$f_n(0) = f_n'(0) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{20.14}$$

$$\lim_{y_1 \to \infty} \frac{f_0}{y_1} = 2U, \quad \lim_{y_1 \to \infty} \frac{f_n}{y_1} = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{20.15}$$

Применяя правило Лопиталя, запишем условия (20.15) в виде

$$f_0'(\infty) = 2U, \quad f_n'(\infty) = 0. \tag{20.16}$$

Обратимся к решению уравнения (20.10).

Заметим, прежде всего, что оно может быть записано в виде:

$$\frac{d}{dy_1}(\nu f_0''' + f_0 f_0'') = 0 \tag{20.17}$$

и, следовательно, допускает одно интегрирование; после проведения этого интегрирования получим

$$\nu f_0''' + f_0 f_0'' = 0 \tag{20.18}$$

(постоянная интегрирования выбрана равной нулю, что обеспечивает затухание f_0'' и f_0''' по ∞).

Уравнение (20.18) известно в гидродинамической литературе под именем уравнения Блазиуса. Оно впервые было исследовано в 1908 г. при решении задачи о пограничном слое (см. ниже § 32), с теми же краевыми условиями, что и в нашей задаче [1]).

Для исследования этого уравнения перейдём к безразмерной функции ζ и безразмерной координате ξ из условий:

$$f_0 = \sqrt{\nu U}\,\zeta(\xi), \quad y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{U}}\,\xi. \tag{20.19}$$

При этом мы получим уравнение

$$2\zeta''' + \zeta\zeta'' = 0 \tag{20.20}$$

и краевое условие

$$\zeta(0) = \zeta'(0) = 0, \quad \zeta'(\infty) = 1. \tag{20.21}$$

---

[1]) Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Zs. f. Math. u. Phys. 156 (1908), стр. 1—37.

Ищем решение уравнения (20.20) в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням ξ. Обозначим ещё

$$\zeta''(0) = \alpha. \tag{20.22}$$

Тогда последовательно дифференцируя уравнение (20.20) и используя условия (20.21), легко найдём

$$\zeta'''(0) = 0; \quad \zeta^{IV}(0) = 0; \quad \zeta^{V}(0) = -\frac{1}{2}\alpha^2.$$

Применяя к равенству (20.20) формулу Лейбница, легко обнаружить, что вообще

$$\zeta^{(3k)}(0) = \zeta^{(3k+1)}(0) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{20.23}$$

Положим, далее,

$$\zeta^{(3k+2)}(0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_k \alpha^{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{20.24}$$

и найдём рекуррентные соотношения для коэффициентов c_k; мы имеем прежде всего $c_0 = 1$. Применим теперь формулу Лейбница к (20.20), взяв от обеих частей этого равенства производную порядка $3k - 1$; тогда получим:

$$\zeta^{(3k+2)} = -\frac{1}{2}\left[\zeta^{(3k-1)}\zeta'' + \binom{3k-1}{1}\zeta^{(3k-2)}\zeta''' + \ldots + \zeta\zeta^{(3k+1)}\right],$$

где $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ означает биноминальный коэффициент.

Пользуясь формулами (20.23) для начальных значений производных, получим равенство:

$$\zeta^{(3k+2)}(0) = -\frac{1}{2}\left[\zeta^{(3k-1)}(0)\zeta''(0) + \binom{3k-1}{1}\zeta^{(3k-2)}(0)\zeta'''(0) + \right.$$

$$\left. + \zeta(0)\zeta^{(3k+1)}(0)\right] = -\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{3k-1}{3r}\zeta^{(3k-1-3r)}(0)\,\zeta^{(3r+2)}(0);$$

подставляя, наконец, сюда значения (20.24) и сокращая всё равенство на $\left(-\frac{1}{2}\right)^k \alpha^{k+1}$, получим искомую рекуррентную формулу:

$$c_k = \sum_{r=0}^{k-1}\binom{3k-1}{3r} c_{k-r-1} c_r. \tag{20.25}$$

Теперь мы без труда можем написать ряд Тейлора для функции ζ:

$$\zeta(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{c_k \alpha^{k+1}}{(3k+2)!}\,\xi^{3k+2}. \tag{20.26}$$

При заданном α этот ряд сходится для достаточно малых по модулю значений ξ. При $\alpha = 1$ мы получаем функцию

$$\zeta_0(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{c_k}{(3k+2)!} \xi^{3k+2}, \tag{20.27}$$

дающую решение уравнения (20.20), определяющееся начальными условиями

$$\zeta_0(0) = 0, \quad \zeta_0'(0) = 0, \quad \zeta_0''(0) = 1. \tag{20.28}$$

Сравнивая выражения (20.26) и (20.27), легко убедиться, что

$$\zeta(\xi) = \alpha^{1/3}\zeta_0(\xi\alpha^{1/3}). \tag{20.29}$$

При больших значениях ξ мы не можем воспользоваться рядом (20.27) для вычисления функции $\zeta_0(\xi)$ и должны прибегнуть к аналитическому продолжению, чтобы получить значения функции $\zeta_0(\xi)$ для всех положительных значений ξ. В рассматриваемом случае практически проще всего произвести численное интегрирование уравнения (20.20). В самом деле, мы сейчас покажем, опираясь на элементарные соображения, что кривая $\zeta_0(\xi)$ имеет очень плавный характер.

Вследствие начальных условий (20.28) функция $\zeta_0(\xi)$ и её две первые производные $\zeta_0'(\xi)$ и $\zeta_0''(\xi)$ при малых положительных значениях ξ положительны, а так как при всяком ξ

$$\zeta_0''' = -\frac{1}{2}\zeta_0\zeta_0'', \tag{20.30}$$

то $\zeta_0'''(\xi)$ будет при тех же условиях отрицательна. Покажем, что при всех положительных ξ функция $\zeta_0(\xi)$ и её производные $\zeta_0'(\xi)$ и $\zeta_0''(\xi)$ будут положительны, а производная $\zeta_0'''(\xi)$ будет отрицательна. Рассмотрим прежде всего $\zeta_0''(\xi)$ и допустим, что эта функция обращается в нуль в некоторой точке $\xi_1 > 0$, оставаясь положительной для $\xi < \xi_1$. Тогда в этой точке и ζ_0''' обратится в нуль, согласно уравнению (20.30). Но дифференцирование этого уравнения даёт нам

$$\zeta_0^{IV} = -\frac{1}{2}\zeta_0'\zeta_0'' - \frac{1}{2}\zeta_0\zeta_0''',$$

откуда следовало бы, что и

$$\zeta_0^{IV}(\xi_1) = 0,$$

и т. д. В результате получилось бы, что в точке ξ_1 все производные функции $\zeta_0(\xi)$, начиная со второй, обращаются в нуль, т. е. что функция $\zeta_0(\xi)$ есть линейная функция, а это противоречит начальным условиям (20.28).

Итак, при всех положительных ξ функция $\zeta_0''(\xi)$ положительна, но тогда ясно, что

$$\zeta_0'(\xi) = \int_0^\xi \zeta_0''(\xi)\, d\xi,$$

так же как

$$\zeta_0(\xi) = \int_0^\xi \zeta_0'(\xi)\, d\xi,$$

тоже положительны, а следовательно, по уравнению (20.30) функция $\zeta_0'''(\xi)$ отрицательна.

Теперь ясно, что при изменении ξ от 0 до ∞ функция $\zeta_0''(\xi)$ всё время убывает, функции же $\zeta_0'(\xi)$ и $\zeta_0(\xi)$ всё время возрастают.

Докажем, наконец, что при $\xi \to \infty$ значение $\zeta_0'(\xi)$ стремится к определённому конечному положительному значению k. Возьмём какое-нибудь определённое значение ξ, например $\xi = 1$, и вычислим $\zeta_0(1)$ и $\zeta_0'(1)$. Вследствие сказанного ясно, что при $\xi > 1$

$$\zeta_0(\xi) > \zeta_0(1) + \zeta_0'(1)(\xi - 1) \tag{20.31}$$

и, следовательно, $\zeta_0(\xi)$ неограниченно возрастает вместе с ξ. Из равенства (20.30) мы можем вывести, что

$$\frac{\zeta_0'''}{\zeta_0''} = -\frac{1}{2}\zeta_0;$$

интегрируя это соотношение по ξ в пределах от 0 до ξ и принимая во внимание начальные условия (20.28), получим:

$$\ln \zeta_0''(\xi) = -\frac{1}{2}\int_0^\xi \zeta_0(\xi)\, d\xi \quad \text{или} \quad \zeta_0''(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^\xi \zeta_0(\xi)\, d\xi}.$$

Ещё раз интегрируя это соотношение и пользуясь (20.28), найдём:

$$\zeta_0'(\xi) = \int_0^\xi e^{-\frac{1}{2}\int_0^\xi \zeta_0(\xi)\, d\xi}\, d\xi. \tag{20.32}$$

При $\xi \to \infty$ этот интеграл сходится, так как подынтегральная функция очень быстро стремится к нулю, ибо $\int_0^\xi \zeta_0(\xi)\, d\xi$ при больших ξ по неравенству (20.31) имеет порядок ξ^2. Итак, мы доказали наличие предельного равенства

$$\lim_{\xi \to \infty} \zeta_0'(\xi) = k.$$

Произведя численное интегрирование уравнения (20.30), получаем:

$$k = 2{,}0854.$$

Подберём теперь α так, чтобы удовлетворить граничному условию (20.22). Соотношение (20.29) показывает, что

$$\zeta'(\xi) = \alpha^{2/3}\zeta_0'(\xi\alpha^{1/3})$$

и, следовательно, при $\xi \to \infty$

$$\lim_{\xi\to\infty} \zeta'(\xi) = \alpha^{2/3}k.$$

Но по условию левая часть этого равенства должна равняться единице, поэтому величина α должна иметь следующее значение:

$$\alpha = k^{-\frac{2}{3}} = 0{,}332\ ^{1}).$$

Нам понадобятся ещё ассимптотические выражения для функции ζ и её производных при больших значениях ξ. Прежде всего, аналогично (20.32), имеем

$$\zeta'' = \alpha e^{-\frac{1}{2}\int_0^\xi \zeta\, d\xi}. \tag{20.33}$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по ξ от 0 до ∞ и учтём условие (20.21). Получим

$$\zeta' = 1 + \int_\infty^\xi \alpha e^{-\frac{1}{2}\int_0^\xi \zeta\, d\xi}\, d\xi. \tag{20.34}$$

Выполним ещё одно интегрирование по ξ, от ∞ до ξ. Будем иметь

$$\zeta = \xi - \lambda + \int_\infty^\xi \int_\infty^\xi \alpha e^{-\frac{1}{2}\int_0^\xi \zeta\, d\xi}\, d\xi\, d\xi, \tag{20.35}$$

где λ — постоянная интегрирования, или, выполняя интегрирование по частям,

$$\zeta = \xi - \lambda + \alpha \int_\infty^\xi (\xi - \eta_1)\, e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\eta_1} \zeta\, d\eta_1}\, d\eta_1. \tag{20.36}$$

---

[1]) Более точное значение $\alpha = 0{,}33206$.

Постоянная λ может быть определена, когда решение известно, по формуле

$$-\lambda = \lim_{\xi \to \infty} (\zeta - \xi).$$

Производя численное интегрирование, получим

$$\lambda = 1{,}72077.$$

Мы можем, таким образом, представить ζ в виде

$$\zeta = \xi - \lambda + \tilde{\zeta}(\xi), \tag{20.37}$$

где $\tilde{\zeta}(\xi)$ обращается в нуль при $\xi \to \infty$.

Возвращаясь к (20.33), представим теперь входящий туда интеграл в виде

$$\int_0^{\xi} \zeta\, d\xi = \frac{1}{2}(\xi - \lambda)^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \int_0^{\xi} \tilde{\zeta}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}(\xi - \lambda)^2 - \frac{\lambda^2}{2} + \int_0^{\infty} \tilde{\zeta}\, d\xi + \int_{\infty}^{\xi} \tilde{\zeta}\, d\xi,$$

так что

$$\zeta'' = Ce^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2} e^{-\frac{1}{2}\int_{\infty}^{\xi} \tilde{\zeta}\, d\xi}, \tag{20.38}$$

где

$$C = \alpha e^{\frac{1}{4}\lambda^2} e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \tilde{\zeta}\, d\xi}.$$

Численное значение для C будет:

$$C = 0{,}23378.$$

Теперь по (20.34) имеем

$$\zeta' = 1 + C\int_{\infty}^{\xi} e^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2} e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\xi} \tilde{\zeta}\, d\xi}\, d\xi, \tag{20.39}$$

а по (20.36) и (20.37)

$$\tilde{\zeta} = C\int_{\infty}^{\xi} (\xi - \eta) e^{-\frac{1}{4}(\eta-\lambda)^2 - \frac{1}{2}\int_{\infty}^{\xi} \tilde{\zeta}\, d\eta}\, d\eta. \tag{20.40}$$

Так как

$$\int_{\infty}^{\xi}(\xi-\eta)\,e^{-\frac{1}{4}(\eta-\lambda)^2}\,d\eta=-2(\xi-\lambda)\int_{\infty}^{\xi}\frac{1}{(\eta-\lambda)^2}e^{-\frac{1}{4}(\eta-\lambda)^2}\,d\eta=$$

$$=4\,\frac{e^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2}}{(\xi-\lambda)^2}-12(\xi-\lambda)\int_{\infty}^{\xi}\frac{1}{(\eta-\lambda)^4}e^{-\frac{1}{4}(\eta-\lambda)^2}\,d\eta=O\left(\frac{e^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2}}{(\xi-\lambda)^2}\right),$$

то, по (20.40), имеем для больших ξ:

$$\tilde{\zeta}=C\cdot O\left(\frac{e^{-\frac{(\xi-\lambda)^2}{4}}}{(\xi-\lambda)^2}\right),\qquad \int_{\infty}^{\xi}\tilde{\zeta}\,d\xi=C\cdot O\left(\frac{e^{-\frac{(\xi-\lambda)^2}{4}}}{(\xi-\lambda)^3}\right)$$

и мы можем написать окончательно для больших ξ ($\xi\gg\lambda$):

$$\left.\begin{aligned}
\zeta''&=Ce^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2}+O\left(e^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2}(\xi-\lambda)^{-3}\right),\\
\zeta'&=1+C\int_{\infty}^{\xi}e^{-\frac{1}{4}(\eta-\lambda)^2}\,d\eta+O\left(e^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2}(\xi-\lambda)^{-4}\right),\\
\zeta&=\xi-\lambda+C\int_{\infty}^{\xi}(\xi-\eta)e^{-\frac{1}{4}(\eta-\lambda)^2}\,d\eta+O\left(e^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2}(\xi-\lambda)^{-5}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(20.41)$$

Обращаясь к определению функций f_1, f_2, заметим, что уравнение (20.13) может быть представлено в виде:

$$\frac{d}{dy_1}\left[\nu f_n'''+f_0f_n''+2nf_0'f_n'-(2n-1)f_0''f_n\right]=F_n(y_1,\ f_1,\ \ldots,\ f_{n-1}).$$

Введём, наряду с (20.19), безразмерную функцию ζ_n из равенства

$$f_n=\sqrt{\nu U}\left(\frac{\nu}{U}\right)^n\zeta_n(\xi).$$

Выполняя квадратуру, получим теперь (левая часть обращается в нуль при $\xi\to\infty$, так что справа следует взять интеграл от ∞ до ξ):

$$2\zeta_n'''+\zeta\zeta_n''+2n\zeta'\zeta_n'-(2n-1)\zeta''\zeta_n=\frac{1}{8U^2}\left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{2}-n}\int_{\infty}^{\xi}F_n\,d\xi.\qquad(20.42)$$

В частности, для функции ζ_1 в правой части (20.11) заменим νf_0^{IV} и $\nu f_0'''$ по (20.17) и (20.16); получим после простых преобразований

$$F_1=\frac{d}{dy_1}\left(y_1\frac{df_0}{dy_1}-f_0\right)^2=2\nu U\sqrt{\frac{U}{\nu}}\,\frac{d}{d\xi}(\xi\zeta'-\zeta)^2,\qquad(20.43)$$

так что, выполняя квадратуру в правой части и замечая, что по (20.41) $(\xi\zeta' - \zeta)_{\xi\to\infty} = \lambda$, получим окончательно

$$2\zeta_1''' + \zeta\zeta_1'' + 2\zeta'\zeta_1' - \zeta''\zeta_1 = \frac{1}{4}[(\xi\zeta' - \zeta)^2 - \lambda^2]. \qquad (20.44)$$

Как обычно, решение ищем в виде суммы общего решения однородного уравнения (20.44) и частного решения неоднородного уравнения. Однородное уравнение имеет в качестве одного из решений $\zeta_n = \zeta'$, в чём убеждаемся простой подстановкой с учётом уравнения (20.20). Остальные два решения однородного уравнения ищем в виде $\zeta_n = \zeta' u$. Обозначим ещё $v = \frac{du}{d\xi}$. Тогда для v имеем дифференциальное уравнение второго порядка

$$2v'' + \left(6\frac{\zeta''}{\zeta'} + \zeta\right)v' + \left(\frac{2\zeta'''}{\zeta'} + 2n\zeta'\right)v = 0. \qquad (20.45)$$

Назовём его независимые решения буквами v_1 и v_2.

Три решения однородного уравнения — мы назовем их Y_1, Y_2, Y_3 — мы можем тогда представить в виде:

$$Y_1 = \zeta', \quad Y_2 = \zeta'\int_{\xi}^{\infty} v_1\, d\xi, \quad Y_3 = \zeta'\int_{\xi}^{\infty} v_2\, d\xi.$$

Поведение функций v_1, v_2 (и Y_2, Y_3) при больших ξ можно определить из следующих соображений. Заметим, что по асимптотическим выражениям (20.41) коэффициенты ζ''/ζ' и ζ'''/ζ' в (20.45) стремятся к нулю при больших ξ ($\zeta' \to 1$, $\zeta \to \xi - \lambda$); поэтому решения v_1 и v_2 при больших ξ окажутся близкими к решениям уравнений

$$2v'' + (\xi - \lambda)v'^2 + 2nv = 0.$$

Оба независимых решения этого последнего уравнения известны. Мы можем положить

$$v_1 = -\frac{d^{2n-1}}{d\xi^{2n-1}}\left[e^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2}\right] = H_{2n-1}\left(\frac{\xi-\lambda}{2}\right)e^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2},$$

$$v_2 = \frac{d^{2n-1}}{d\xi^{2n-1}}\left[e^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2}\int_{\infty}^{\xi} e^{\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2}\, d\xi\right],$$

где H_{2n-1} — полином Эрмита степени $2n-1$.

Имея это в виду, можем считать, что при больших ξ наши решения ведут себя как

$$Y_1 \sim 1, \quad Y_2 \sim (\xi-\lambda)^{2n-2}e^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2}, \quad Y_3 \sim (\xi-\lambda)^{-2n+1}.$$

Как обычно записываем теперь общее решение уравнения (20.42) в виде

$$\zeta_n = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + Y_1 \int_{\infty}^{\xi} \frac{Y_2 Y_3' - Y_2' Y_3}{W} f(\xi)\, d\xi +$$

$$+ Y_2 \int_{\infty}^{\xi} \frac{Y_3 Y_1' - Y_3' Y_1}{W} f(\xi)\, d\xi + Y_3 \int_{\infty}^{\xi} \frac{Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1'}{W} f(\xi)\, d\xi, \qquad (20.46)$$

где W — детерминант Вронского системы, который можно взять в виде $W = \zeta''$, а f — правая часть (20.42).

Асимптотическое представление подынтегральных выражений будет соответственно

$$\text{const.}\, f(\xi), \quad e^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2}(\xi-\lambda)^{-2n} f(\xi), \quad (\xi-\lambda)^{2n-1} f(\xi).$$

При $n = 1$ имеем, по (20.41),

$$4f(\xi) = (\xi\zeta' - \zeta)^2 - \lambda^2 \sim \left[\xi + C\xi \int_{\infty}^{\xi} e^{-\frac{1}{4}(\eta-\lambda)^2} d\eta - \xi + \lambda - \right.$$

$$\left. - C \int_{\infty}^{\xi} (\xi - \eta)\, e^{-\frac{1}{4}(\eta-\lambda)^2} d\eta \right]^2 - \lambda^2 \sim -4\lambda C e^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2}.$$

Теперь мы видим, что (для $n = 1$) все члены правой части (20.46), за исключением члена, содержащего C_3, таковы, что соответствующее $\zeta_1' \sim e^{-\frac{1}{4}(\xi-\lambda)^2}$. Мы должны, поэтому, положить $C_3 = 0$. Что же до C_1 и C_2, то их надо определить из краевых условий.

Аналогичные соображения можно высказать относительно функций с любым значком n. На рис. 164 нанесены значения функций $\zeta(\xi)$ и $\zeta_1(\xi)$. На рис. 165 нанесены величины v_x/U и $10v_y/U$ в функциях от безразмерного расстояния $Y = \frac{4U}{\nu} y$. Подсчёт произведен по формуле (20.9) (f_2, f_3 и далее считаются нулями) для безразмерного значения $X = \frac{4U}{\nu} x = 100$; величина v_x/U с увеличением Y стремится к 1, величина v_y/U — к нулю.

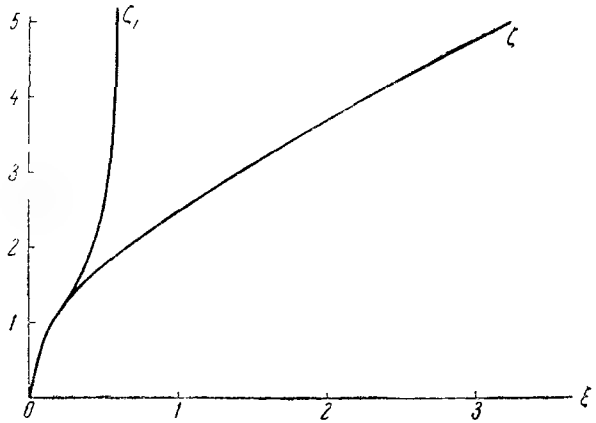

Рис. 164.

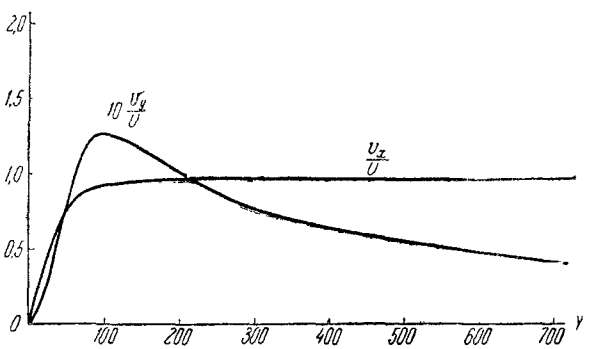

Рис. 165.

В. ПРИБЛИЖЁННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В СЛУЧАЕ МАЛЫХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА

§ 21. Плоское течение между двумя пластинками. В предыдущих параграфах было дано в точном виде решение нескольких задач гидромеханики вязкой жидкости. Как уже указывалось, интегрирование уравнений гидромеханики вязкой жидкости в точном виде удаётся сравнительно редко; нужно, помимо того, отметить, что многие точные решения уравнений гидромеханики вязкой жидкости имеют мало гидродинамического интереса, так как они могут быть осуществлены только при наличии граничных условий необычного в практике вида. С другой стороны большинство важных с точки зрения возможности эксперимента или наблюдения в природе движений вязкой жидкости не поддаётся точному гидромеханическому анализу. В качестве примера можно указать на задачу о движении сферы в вязкой жидкости с постоянной по величине и направлению скоростью.

Совершенно естественно, что при невозможности точного решения какой-либо проблемы мысли учёных обращаются на изыскание приближённых методов решения этой проблемы. Такими приближёнными методами гидромеханики вязкой жидкости мы теперь и займёмся.

Все приближённые методы гидромеханики характеризуются одним общим признаком: в этих методах либо в основных уравнениях, либо в граничных условиях часть членов или совсем отбрасывается, или учитывается не в полной мере.

В тех случаях движений вязкой жидкости, которые будут нас преимущественно интересовать, входят в рассмотрение три категории сил: силы инерции, силы вязкости и силы давления. Последние силы являются внутренними силами, и порядок их величины определяется порядком величины первых двух категорий сил.

Что касается сравнительной величины сил инерции и сил вязкости, то некоторую ориентацию в этом направлении даёт нам число Рейнольдса $\mathsf{R} = lV/\nu$, равное, как мы знаем, отношению произведения характерной скорости V на характерную длину l к кинематическому коэффициенту вязкости ν.

В соответствии с этим мы можем говорить о двух типах приближённых решений уравнений механики вязкой жидкости.

К первому типу принадлежат те случаи движений, в которых силы инерции малы по сравнению с силами вязкости и для которых, следовательно, является малым число Рейнольдса, содержащее коэффициент кинематической вязкости в знаменателе. Но число Рейнольдса будет малым в трёх случаях: 1) когда характерая длина l очень мала, либо 2) когда характерная скорость V очень мала, либо, наконец, 3) когда коэффициент кинематической вязкости ν

очень велик. Таким образом, к рассматриваемому типу относятся, например, случаи медленных движений очень малых частиц в сравнительно вязких жидкостях. Приближённая трактовка движений первого типа состоит либо в полном отбрасывании из уравнений гидромеханики членов, дающих силы инерции, либо же в упрощении вида этих членов.

Другой, противоположный тип движений охватывает те случаи, когда силы вязкости малы по сравнению с силами инерции и когда, следовательно, число Рейнольдса является очень большим. Для этого нужно, чтобы либо характерная длина, либо характерная скорость были очень большими, либо же чтобы вязкость жидкости была очень малой. Таким образом, ко второму типу движений относятся случаи быстрых движений тел большого размера в маловязких жидкостях. Если мы полностью отбрасываем, при приближённом рассмотрении движений второго типа, силы вязкости, то мы приходим, очевидно, к уравнениям движения идеальной жидкости. Нам остаётся поэтому рассмотреть только ту трактовку движений второго типа, когда мы лишь отчасти учитываем силы вязкости, оставляя в уравнениях из членов, дающих силы вязкости, лишь главнейшие.

Мы начнём теперь рассмотрение ряда конкретных случаев движений первого типа, т. е. движений, обладающих малыми числами Рейнольдса.

Рассмотрим течение очень вязкой жидкости между двумя параллельными пластинками, расстояние h между которыми мы будем считать очень малым. Если мы будем считать значения средних скоростей жидкости тоже малыми, то число Рейнольдса $\mathsf{R} = Vh/\nu$ будет очень мало. Будем далее считать внешние силы отсутствующими.

При этих условиях мы можем в основных уравнениях гидромеханики (5.1) пренебречь находящимися в левых частях этих уравнений силами инерции; тогда получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &+ \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{21.1}$$

Будем теперь считать, что оси Ox и Oy лежат в одной из граничных плоскостей, а ось Oz направлена по перпендикуляру к этим плоскостям, так что уравнения граничных плоскостей суть

$$z = 0 \quad \text{и} \quad z = h.$$

Примем далее, что скорость каждой частицы направлена параллельно граничным плоскостям, так что

$$v_z = 0.$$

Заметим, наконец, что ввиду малости h изменение скоростей v_x и v_y по направлению оси Oz будет происходить гораздо быстрее изменения этих величин в направлении осей Ox и Oy; это означает, что порядок производной $\partial v_x/\partial z$ велик по сравнению с порядками производных $\partial v_x/\partial x$ и $\partial v_x/\partial y$; точно так же порядок производной $\partial^2 v_x/\partial z^2$ велик по сравнению с порядками производных $\partial^2 v_x/\partial x^2$ и $\partial^2 v_x/\partial y^2$. При этих условиях уравнения (21.1) принимают вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (21.2)$$

Третье из полученных уравнений показывает, что p зависит только от x и y; но тогда первое уравнение легко может быть проинтегрировано:

$$\mu v_x = \frac{z^2}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + zA(x, y) + B(x, y);$$

функции A и B могут быть определены из граничных условий

$$v_x = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = h;$$

эти условия сразу дают нам

$$B(y, x) = 0, \quad A(x, y) = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x}$$

и, следовательно,

$$v_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z(h - z). \quad (21.3)$$

Точно так же легко получим, что

$$v_y = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} z(h - z). \quad (21.4)$$

Наконец, последнее уравнение системы (21.2) сразу даёт, после подстановки значений (21.3) и (21.4), уравнение для определения функции $p(x, y)$:

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \quad (21.5)$$

Заметим, что из формул (21.3), (21.4) и (21.5) сразу следует, что

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = 0.$$

Но тогда ясно, что найденное нами решение строго удовлетворяет уравнениям (21.1), ибо те члены, которыми мы пренебрегли в этих уравнениях, тождественно обращаются в нуль.

Введём вместо v_x и v_y средние скорости по высоте:

$$\bar{v}_x(x, y) = \frac{1}{h}\int_0^h v_x(x, y, z)\,dz; \quad \bar{v}_y(x, y) = \frac{1}{h}\int_0^h v_y(x, y, z)\,dz. \tag{21.6}$$

Так как

$$\frac{1}{h}\int_0^h z(h - z)\,dz = \frac{h^2}{6},$$

то для средних скоростей $\bar{v}_x$ и $\bar{v}_y$ получаем формулы:

$$\bar{v}_x(x, y) = -\frac{h^2}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \bar{v}_y(x, y) = -\frac{h^2}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Введём теперь вместо $p(x, y)$ функцию

$$\varphi(x, y) = -\frac{ph^2}{12\mu}, \tag{21.7}$$

тогда ясно видно, что $\varphi(x, y)$ есть потенциал средних скоростей

$$\bar{v}_x(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \bar{v}_y(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{21.8}$$

причём функция φ, отличающаяся от гармонической функции p лишь постоянным множителем, сама является гармонической функцией

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{21.9}$$

Формулы (21.8) и (21.9) показывают, что в рассматриваемом случае среднее движение жидкости происходит так же, как безвихревое движение идеальной несжимаемой жидкости, для которого потенциалом скорости является функция $\varphi(x, y)$. Конечно, в этих двух движениях давление p определяется по совершенно различным формулам.

Рассмотрим теперь следующий конкретный пример движения вязкой жидкости: пусть между пластинками вставлен цилиндр с образующими, параллельными оси Oz, сечение которого плоскостью Oxy есть некоторая кривая C. Пусть далее поток набегает на этот цилиндр со скоростью U на бесконечности, направленной по положительной оси Ox. Допустим, что обтеканию цилиндра C потоком идеальной жидкости соответствует потенциал $\varphi(x, y)$, тогда формула (21.7) определит соответствующее давление в вязкой жидкости, а формулы (21.3) и (21.4) определят соответствующие скорости течения.

Однако полученное движение вязкой жидкости, помимо того, что для него основные уравнения гидромеханики выполняются лишь приближённо, обладает ещё тем недостатком, что для него условие при-

липания к стенкам выполняется только на ограничивающих пластинах, но не выполняется на боковой поверхности цилиндра C, потому что в соответствующем движении идеальной жидкости обращается в нуль только нормальная к поверхности C составляющая скорости, в то время как для вязкой жидкости должна обращаться в нуль также и касательная составляющая.

Можно поэтому ожидать, что среднее течение вязкой жидкости будет очень мало отличаться от соответствующего движения идеальной жидкости только в некотором отдалении от контура C.

Действительно, экспериментальные работы показали, что при обтекании очень вязкой жидкостью цилиндрического препятствия, помещённого между двумя очень близкими пластинками, получается картина линий тока, очень близко напоминающая ту, которая даётся теорией безвихревого потока идеальной жидкости.

§ 22. Медленное вращение сферы. Рассмотрим теперь движение вязкой жидкости, вызываемое медленным вращением погруженной в жидкость сферы радиуса a около своего диаметра, причём угловая скорость вращения равна ω. Так как за характерную скорость в этом случае мы можем принять линейную скорость ωa точек экватора сферы, то за число Рейнольдса можно взять $R = \frac{\omega a \cdot a}{\nu} = \frac{\omega a^2}{\nu}$. Мы будем считать это число малым, т. е. будем считать вращение сферы происходящим достаточно медленно.

Применим уравнения движения в сферических координатах (5.16); при этом вследствие малости числа Рейнольдса мы можем отбросить в первых трёх из этих уравнений левые части. Получившимся уравнениям мы можем удовлетворить, приняв, что v_r и v_0 тождественно равны нулю, p есть постоянная величина, v_λ зависит только от r и θ, так что

$$v_\lambda = v(r, \theta),$$

причём функция v должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2 \sin^2\theta} = 0. \qquad (22.1)$$

На поверхности сферы частицы жидкости должны двигаться с той же линейной скоростью $\omega a \sin\theta$, что и точки поверхности сферы; поэтому мы получаем следующее пограничное условие:

$$v(a, \theta) = \omega a \sin\theta. \qquad (22.2)$$

Вид этого условия наводит на мысль искать решение уравнения (22.1) в форме

$$v(r, \theta) = A(r) \sin\theta. \qquad (22.3)$$

Подстановка этого значения v приводит нас к обыкновенному дифференциальному уравнению Эйлера

$$\frac{d^2A}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dA}{dr}-\frac{2A}{r^2}=0,$$

которое легко интегрируется и даёт нам, что

$$A(r)=C_1r+\frac{C_2}{r^2}. \tag{22.4}$$

Постоянные C_1 и C_2 должны определяться из граничных условий.

В случае бесконечной жидкости нужно, очевидно, принять $C_1=0$, чтобы скорость жидкости на бесконечности стремилась к нулю; итак, в этом случае

$$v(r,\theta)=C\frac{\sin\theta}{r^2};$$

граничное условие (22.2) даёт нам, что $C=\omega a^3$, так что мы получаем окончательную формулу:

$$v(r,\theta)=\frac{\omega a^3\sin\theta}{r^2}. \tag{22.5}$$

Для поддержания вращения сферы необходимо к ней прикладывать вращающий момент M. Величину этого момента мы можем рассчитать по формулам (5.17), которые дают в рассматриваемом случае:

$$p_{r\lambda}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)_{r=a}=-3\mu\omega\sin\theta; \tag{22.6}$$

такое напряжение действует на каждую единицу площади зоны сферы, расположенной между двумя параллелями сферы; так как площадь этой зоны равна $2\pi a\sin\theta a\,d\theta$ и так как плечом этих сил напряжения служит, очевидно, $a\sin\theta$, то для искомого вращающего момента мы получаем выражение:

$$M=\int_0^\pi 3\mu\omega\sin\theta\cdot a\sin\theta\cdot 2\pi a^2\sin\theta\,d\theta=$$

$$=6\pi\mu\omega a^3\int_0^\pi\sin^3\theta\,d\theta=8\pi\mu a^3\omega. \tag{22.7}$$

Если бы рассматривалось движение вязкой жидкости между двумя сферами радиусов a_1 и a_2, вращающимися с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 около общего диаметра, то, исходя из того же решения (22.4) и определяя произвольные постоянные C_1 и C_2 из граничных условий

$$A(r_1)=\omega_1a_1,\qquad A(r_2)=\omega_2a_2,$$

мы пришли бы к следующему решению задачи:

$$v(r, \theta) = \frac{\sin\theta}{r^2\left(a_1^3 - a_2^3\right)}\left[\omega_1 a_1^3\left(r^3 - a_2^3\right) - \omega_2 a_2^3\left(r^3 - a_1^3\right)\right]. \quad (22.8)$$

Для вращающего момента в этом случае получаем выражение

$$M = 8\pi\mu\,(\omega_1 - \omega_2)\,\frac{a_1^3 a_2^3}{a_2^3 - a_1^3}. \quad (22.9)$$

§ 23. Медленное движение сферы. Рассмотрим теперь задачу о течении вязкой жидкости, вызываемом движением сферы радиуса a, перемещающейся прямолинейно и равномерно со скоростью U. Сразу же отметим, что задача, очевидно, эквивалентна задаче об обтекании сферы радиуса a потоком вязкой жидкости, имеющим на бесконечности постоянную по величине и направлению скорость U.

За число Рейнольдса в рассматриваемом случае можно, очевидно, взять

$$\mathsf{R} = \frac{Ua}{\nu}. \quad (23.1)$$

Если число Рейнольдса R достаточно мало, т. е. для заданной жидкости либо скорость движения сферы достаточно мала, либо радиус сферы очень мал, то можно опять применить приближённый метод решения задачи, использованный нами в предыдущих параграфах, а именно при интегрировании уравнений движения отбросить в них инерционные члены.

Так именно и поступил Стокс [1]), впервые решивший в 1851 г. задачу о движении сферы в вязкой жидкости. Отбрасывая в основных уравнениях движения (5.1) инерционные члены и полагая, что внешние силы отсутствуют, мы получим систему уравнений:

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\Delta v_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu\Delta v_y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu\Delta v_z, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.\end{gathered}\right\} \quad (23.2)$$

Рассматривая, для определённости, задачу об обтекании покоящейся сферы, центр которой находится в начале координат, потоком вязкой жидкости, будем, очевидно, иметь следующие граничные условия:

$$v_x = v_y = v_z = 0 \quad \text{при} \quad r = a, \quad (23.3)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; кроме того, считая, что на бесконечности поток имеет направление, параллельное положительной оси Ox, будем

[1]) Stokes G. G., l. c. § 4 и On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, Math. and Phys. Papers, 3, стр. 1.

иметь следующие условия на бесконечности:

$$v_x \to U, \quad v_y \to 0, \quad v_z \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{23.4}$$

Среди различных методов решения поставленной задачи одним из наиболее естественных, хотя, может быть, и несколько громоздким, является метод использования сферических координат, который мы и применим. Совершенно очевидно, что, вводя сферические координаты r, θ, λ, вследствие симметрии движения относительно оси Ox, от которой мы будем отсчитывать углы θ, мы будем иметь:

$$v_r = v_r(r, \theta), \quad v_\theta = v_\theta(r, \theta), \quad v_\lambda = 0, \quad p = p(r, \theta).$$

Поэтому основные уравнения движения (5.16), после отбрасывания в них инерционных членов, примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial r} &= \mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \right.\\
&\quad \left. + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2}v_\theta\right),\\
\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} &= \mu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \right.\\
&\quad \left. + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right),\\
\frac{\partial v_r}{\partial r} &+ \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{23.5}$$

Граничные условия (23.3) заменятся следующими:

$$v_r(a, \theta) = 0, \quad v_\theta(a, \theta) = 0. \tag{23.6}$$

Что же касается условий на бесконечности, то, как видно из рис. 166, они примут, очевидно, такой вид:

$$v_r \to U\cos\theta, \quad v_\theta \to -U\sin\theta$$

при

$$r \to \infty. \tag{23.7}$$

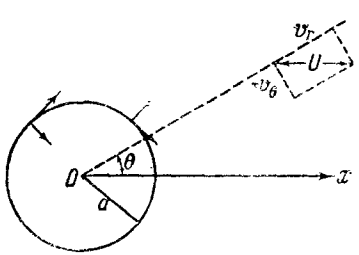

Рис. 166.

Вид граничных условий наводит на мысль попробовать отыскать решения основных уравнений (23.5) в форме:

$$\begin{aligned}
v_r(r, \theta) &= f(r)\cos\theta,\\
v_\theta(r, \theta) &= -g(r)\sin\theta,\\
p(r, \theta) &= \mu h(r)\cos\theta.
\end{aligned}$$

В самом деле, простое вычисление показывает, что для трёх функций $f(r)$, $g(r)$ и $h(r)$ получаются из (23.5) три обыкновенных

дифференциальных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} h' &= f'' + \frac{2}{r}f' - \frac{4(f-g)}{r^2}, \\ \frac{h}{r} &= g'' + \frac{2}{r}g' + \frac{2(f-g)}{r^2}, \\ f' &+ \frac{2(f-g)}{r} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{23.8}$$

причём из (23.6) и (23.7) вытекают следующие граничные условия:

$$f(a) = 0, \quad g(a) = 0, \quad f(\infty) = U, \quad g(\infty) = U. \tag{23.9}$$

Решение системы (23.8) не представляет никакого труда; третье уравнение определяет нам g:

$$g = \frac{1}{2}f'r + f, \tag{23.10}$$

после чего из второго уравнения (23.8) после простых дифференцирований находим h:

$$h = \frac{1}{2}f'''r^2 + 3rf'' + 2f' \tag{23.11}$$

и, наконец, первое уравнение (23.8) доставляет дифференциальное уравнение для определения f:

$$r^3f^{IV} + 8r^2f''' + 8rf'' - 8f' = 0. \tag{23.12}$$

Но это последнее уравнение есть уравнение типа Эйлера и потому легко интегрируется; среди его частных решений всегда существуют решения вида

$$f = r^k;$$

уравнение будет удовлетворяться, если k есть решение уравнения четвёртой степени

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 8k(k-1)(k-2) + 8k(k-1) - 8k = 0$$

или

$$k(k-2)(k+1)(k+3) = 0,$$

т. е. k должно принимать одно из следующих четырёх значений:

$$k = 2, \quad k = 0, \quad k = -1, \quad k = -3.$$

Таким образом, частными интегралами уравнения (23.12) являются

$$f_1 = r^2, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = \frac{1}{r}, \quad f_4 = \frac{1}{r^3},$$

а общим его интегралом будет

$$f = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2.$$

Уравнения (23.10) и (23.11) дают теперь соответствующие значения g и h:

$$g = -\frac{A}{2r^3} + \frac{B}{2r} + C + 2Dr^2; \quad h = \frac{B}{r^2} + 10Dr.$$

Постоянные A, B, C и D определяются из граничных условий (23.9), которые дают:

$$D = 0, \quad C = U, \quad B = -\frac{3}{2}Ua, \quad A = \frac{1}{2}Ua^3.$$

Собирая все полученные результаты, приходим к следующему решению задачи:

$$\left.\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= U\cos\theta\left[1 - \frac{3}{2}\frac{a}{r} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right], \\ v_\theta(r, \theta) &= -U\sin\theta\left[1 - \frac{3}{4}\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right], \\ p(r, \theta) &= -\frac{3}{2}\mu\frac{Ua}{r^2}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (23.13)$$

Вычислим ещё силу, с которой поток воздействует на сферу. Для этого вычислим по формулам (5.17) напряжения, действующие на элементы сферы:

$$p_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad p_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right).$$

На поверхности сферы $v_r = v_\theta = 0$, а следовательно, и $\partial v_r/\partial\theta = 0$, $\partial v_\theta/\partial\theta = 0$; наконец, из последнего из уравнений (23.5) ясно, что $\partial v_r/\partial r$ на поверхности сферы тоже обращается в нуль, поэтому предыдущие формулы сильно упрощаются и дают для точек сферы следующие соотношения:

$$p_{rr} = -p = \frac{3}{2}\frac{\mu U}{a}\cos\theta, \quad p_{r\theta} = \mu\frac{\partial v_\theta}{\partial r} = -\frac{3\mu U}{2a}\sin\theta.$$

Направления этих сил показаны на рис. 166. Ясно, что направление равнодействующей всех сил, приложенных к элементам сферы, совпадает с направлением потока на бесконечности. Поэтому величина этой равнодействующей определится формулой

$$W = \int\int_S (p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta)\, dS =$$

$$= \int_0^\pi (p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta)\, 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta = 3\pi\mu U a \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta$$

или

$$W = 6\pi\mu U a. \qquad (23.14)$$

Полученная формула для силы сопротивления, испытываемой сферой в вязкой жидкости, носит название *формулы Стокса*. Интересно попутно отметить, что та часть силы сопротивления, которая происходит за счет сил давления, равна

$$\int_0^{\pi} p_{rr} \cos\theta \cdot 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta = 3\pi\mu U a \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = 2\pi\mu U a \quad (23.15)$$

и составляет, таким образом, только третью часть полной силы сопротивления, испытываемого сферой при её движении в вязкой жидкости, остальные две трети происходят за счет сил вязкости.

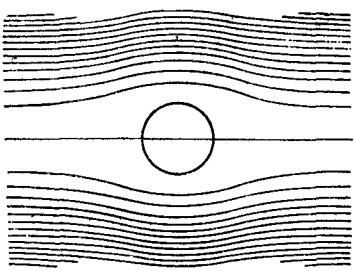

Рис. 167.

На рис. 167 построены линии тока полученного движения. Аналитически эти линии тока можно получить следующим образом. Проведём через точку M с координатами (r, θ) окружность с центром на оси Ox, расположенную в плоскости, перпендикулярной к этой оси, и подсчитаем количество жидкости, протекающей через сегмент сферы радиуса r с центром в начале координат, ограниченной этой окружностью; это количество можно определить формулой

$$\Psi(r, \theta) = \int_0^{\theta} v_r(r, \theta) 2\pi r^2 \sin\theta \, d\theta. \quad (23.16)$$

В нашем случае для функции тока Ψ получается выражение

$$\Psi(r, \theta) = \pi U \sin^2\theta \left(r^2 - \frac{3}{2} ar + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r}\right). \quad (23.17)$$

Приведём ещё выражение функции тока для того случая, когда рассматривается движение сферы в неограниченной жидкости, покоящейся на бесконечности. Это движение получается из предыдущего наложением добавочного потока со скоростью U, направленной по отрицательной оси Ox. Аналитически это наложение сводится к вычитанию из выражения (23.13) для v_r величины $U\cos\theta$ и соответственно из выражения для v_θ величины $-U\sin\theta$; поэтому для рассматриваемого случая получим:

$$v_r = \frac{1}{2} U \cos\theta \left(\frac{a^3}{r^3} - 3\frac{a}{r}\right);$$

$$v_\theta = \frac{1}{4} U \sin\theta \left(\frac{a^3}{r^3} + 3\frac{a}{r}\right), \quad (23.18)$$

и, следовательно, функция тока будет выражаться уравнением:

$$\Psi(r,\ \theta) = \frac{1}{2}\pi U a^2 \sin^2\theta\left(\frac{a}{r} - 3\frac{r}{a}\right). \tag{23.19}$$

Соответствующие линии тока абсолютного движения сферы показаны на рис. 168. Как эти линии тока, так и линии тока относительного движения (рис. 167) лежат совершенно симметрично относительно плоскости, перпендикулярной к направлению движения сферы и проходящей через центр сферы.

Чтобы получить решение в декартовых координатах, совершим преобразование по известным формулам:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta, & v_x &= v_r\cos\theta - v_\theta\cos\theta,\\ y &= r\sin\theta\cos\lambda, & v_y &= v_r\sin\theta\cos\lambda + v_\theta\cos\theta\cos\lambda - v_\lambda\sin\lambda,\\ z &= r\sin\theta\sin\lambda, & v_z &= v_r\sin\theta\sin\lambda + v_\theta\cos\theta\sin\lambda + v_\lambda\cos\lambda; \end{aligned}\right\} \tag{23.20}$$

в результате получим для случая обтекания сферы:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= U\left(1 - \frac{3}{4}\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right) - \frac{3}{4}\frac{Uax^2}{r^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right),\\ v_y &= -\frac{3}{4}\frac{Uaxy}{r^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right),\\ v_z &= -\frac{3}{4}\frac{Uaxz}{r^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{23.21}$$

Поставим теперь вопрос о том, в каких случаях полученное решение может считаться достаточным приближением к точному решению задачи. Для этого нужно посмотреть, как велики те члены, которыми мы пренебрегли. Обращаясь для такой оценки к уравнениям (5.16) и рассматривая для простоты только точки, лежащие на оси Ox, для которых $\theta = 0$, легко получим следующее выражение для проекции ускорения на направление оси r:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\substack{r\\ \theta=0}} = \left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_{\theta=0} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{U^2 a}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right).$$

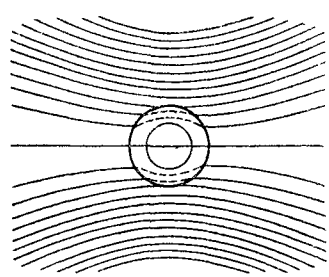

Рис. 168.

Для величины же $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$ и для равной этой величине соответствующей составляющей сил вязкости мы получим, согласно последней формуле (23.13), выражение

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{\theta=0} = 3\frac{\mu}{\rho}\frac{Ua}{r^3} = \frac{3\nu Ua}{r^3}.$$

Отношение двух полученных величин имеет значение

$$\frac{Ur}{2\nu}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{3a}{2r}+\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right),$$

которое для больших по сравнению с a значений r приближённо равняется $Ur/2\nu$. Отсюда мы видим, что наше решение пригодно только в той области, в которой число Ur/ν достаточно мало, во всяком случае меньше единицы. Чтобы решение годилось в сфере, радиус которой в несколько раз превышал бы a, необходимо, чтобы величина $\mathsf{R} = Ua/\nu$ была бы в соответствующее число раз меньше единицы. При выполнении этого условия то обстоятельство, что вне упомянутой большой сферы члены, которыми мы при решении пренебрегли, становятся большими в сравнении с оставленными членами, не имеет уже значения, так как на больших (по сравнению с a) расстояниях как оставленные, так и выкинутые члены будут очень малы (опять-таки по сравнению со значениями этих величин вблизи сферы радиуса a) и не смогут повлиять на течение вблизи ограничивающей жидкость сферы.

Конечно, все эти рассуждения носят общий характер, и только опыт может подтвердить правильность полученного решения и указать пределы его применимости. В результате многочисленных экспериментальных исследований над падением шариков в вязких жидкостях была установлена справедливость формулы сопротивления Стокса (23.14) и формул, её уточняющих (об одной из которых мы будем говорить ниже, при изложении теории Осеена), для достаточно малых чисел Рейнольдса, а именно для значений $\mathsf{R} < {}^1/_2$. Не останавливаясь на численных данных, доставляемых опытом, мы отметим только то обстоятельство, что формула Стокса была использована как для измерения коэффициента вязкости жидкости, так и в других исследованиях, как, например, в исследовании Милликена об измерении заряда электрона.

В заключение этого параграфа рассмотрим следующий характерный для рассматриваемого круга вопросов пример. Пусть капля воды сферической формы падает в воздухе. Кроме силы тяжести на неё будет действовать сила сопротивления воздуха; допустим, что последнюю можно вычислить по формуле Стокса и что указанные две силы взаимно уравновешиваются, так что капля падает равномерно со скоростью U. Если плотность воды есть ρ', а плотность воздуха ρ, и если радиус сферы обозначим через a, то на каплю будет действовать сила тяжести ${}^4/_3\pi a^3\rho' g$ (подъёмной силой Архимеда ${}^4/_3\pi a^3\rho g$ можно, очевидно, пренебречь); приравнивая эту силу силе сопротивления Стокса $6\pi\mu Ua$, получим равенство

$$\frac{4}{3}\pi a^3\rho' g = 6\pi\rho\nu Ua$$

или

$$U = \frac{2}{9}\frac{ga^2}{\nu}\frac{\rho'}{\rho}.$$

С другой стороны,

$$\mathsf{R} = \frac{Ua}{\nu},$$

поэтому легко находим, что

$$a^3 = \frac{9}{2}\frac{\nu^2}{g}\frac{\rho}{\rho'}\mathsf{R}, \quad U^3 = \frac{2}{9}g\nu\mathsf{R}^2\frac{\rho'}{\rho}. \tag{23.22}$$

Подставляя численные значения $\nu^2 = 0{,}133$ *см*^{2}/*сек*, $g = 981$ *см*/*сек*^{2}, $\rho'/\rho = 770$, легко находим

$$a = 0{,}0047\sqrt[3]{\mathsf{R}}\ см, \quad U = 28\sqrt[3]{\mathsf{R}^2}\ см/сек.$$

Если $\mathsf{R} < 1/2$, то $a < 0{,}0037$ *см*, $U < 18$ *см*/*сек*. Как видно, размеры тех капель, к которым применима предыдущая теория, равно как и их скорости, очень малы.

§ 24. Парадокс Стокса. Как было выше отмечено, решение Стокса задачи о движении сферы, изложенное в предыдущем параграфе, представляется неудовлетворительным, потому что в этом решении отбрасываются члены, которые на достаточно больших расстояниях становятся сколь угодно большими по сравнению с оставленными членами.

В случае плоской задачи с решением дело обстоит гораздо хуже. А именно, оказывается, что задача об обтекании плоским потоком вязкой жидкости кругового цилиндра совсем не имеет решения, если в основных уравнениях отбросить полностью инерционные члены. Форма цилиндра не имеет при этом никакого значения. Высказанное утверждение, как будет сейчас доказано, справедливо для цилиндра произвольной формы.

Пусть C есть кривая, содержащая внутри себя начало координат, по которой плоскость Oxy пересекает наш цилиндр (образующие которого предполагаются параллельными оси Oz), и пусть рассматривается обтекание цилиндра потоком, имеющим на бесконечности скорость U, направленную параллельно оси Ox. Тогда, пренебрегая в основных уравнениях движения (5.1) инерционными членами и внешними силами, мы приходим к системе:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\Delta v_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu\Delta v_y, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \tag{24.1}$$

при граничных условиях

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{на} \quad C,$$
$$v_x \to U, \quad v_y \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{24.2}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Обозначим через S область плоскости, ограниченную кривой C и окружностью Γ большого радиуса R с центром в начале координат, и составим двойной интеграл

$$I = \int_S \int \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy =$$

$$= \int_S \int \left[\frac{\partial\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(v_y \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)}{\partial y} \right] dx\, dy -$$

$$- \int_S \int (v_x \Delta v_x + v_y \Delta v_y)\, dx\, dy. \quad (24.3)$$

По формуле Гаусса, замечая, что v_x и v_y обращаются на кривой C в нуль, и обозначая через n направление внешней нормали к контуру Γ, получим:

$$\int_S \int \left[\frac{\partial\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(v_y \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)}{\partial y} \right] dx\, dy =$$

$$= \int_\Gamma \left\{ v_x \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cos(n, y) \right] + \right.$$

$$\left. + v_y \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cos(n, y) \right] \right\} ds = \int_\Gamma \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial n} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial n} \right) ds.$$

Далее, вследствие уравнений (24.1) и вследствие той же формулы Гаусса, имеем:

$$\int_S \int (v_x \Delta v_x + v_y \Delta v_y)\, dx\, dy = \frac{1}{\mu} \int_S \int \left(v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\mu} \int_S \int \left[v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + p \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \right] dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\mu} \int_S \int \left[\frac{\partial (p v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (p v_y)}{\partial y} \right] dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\mu} \int_\Gamma [p v_x \cos(n, x) + p v_y \cos(n, y)]\, ds = \frac{1}{\mu} \int_\Gamma p v_n\, ds.$$

Итак:

$$I = \int_\Gamma \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial n} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial n} - \frac{1}{\mu} p v_n \right) ds. \quad (24.4)$$

Обратимся теперь к уравнениям (24.1). Вследствие последнего из этих уравнений мы можем написать, что

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

где Ψ есть функция тока. Тогда предыдущие два уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \mu \Delta \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial \mu \Delta \Psi}{\partial x}$$

и показывают, что $p + i\mu \Delta \Psi$ есть аналитическая функция от $z = x + iy$. Заметим при этом, что $\Delta \Psi$ совпадает, с точностью до знака, с выражением вихря скорости, ибо

$$\Omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\Delta \Psi$$

и есть, следовательно, так же как и p, однозначная функция от x и y. Итак, функция

$$\varphi(z) = p + i\mu \Delta \Psi$$

есть однозначная аналитическая функция вне контура C. Производная от этой функции имеет выражение

$$\varphi'(z) = \frac{\partial p}{\partial x} - i \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Поэтому, на основании уравнений (24.1), можем написать:

$$\varphi'(z) = \mu \Delta (v_x - i v_y). \tag{24.5}$$

Пусть теперь $\bar{z} = x - iy$ означает число, комплексно сопряжённое с $z = x + iy$, тогда

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Возьмём в какой-нибудь функции $A(x, y)$ вместо x и y за независимые переменные z и $\bar{z}$, т. е. положим

$$A(x, y) = A\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = a(z, \bar{z}),$$

тогда простое вычисление показывает, что

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{2i} \frac{\partial A}{\partial y},$$

$$\frac{\partial a}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial A}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial z \, \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{4} \Delta A.$$

Поэтому уравнение (24.5) может быть переписано в виде

$$\varphi'(z) = 4\mu \frac{\partial^2 (v_x - iv_y)}{\partial z \, \partial \bar{z}},$$

после чего оно очень легко интегрируется

$$\varphi(z) + \chi_1(\bar{z}) = 4\mu \frac{\partial (v_x - iv_y)}{\partial \bar{z}}, \tag{24.6}$$

где $\chi_1(\bar{z})$ есть, очевидно, однозначная аналитическая функция от $\bar{z}$. Интеграл от этой функции

$$\int \chi_1(\bar{z})\, d\bar{z},$$

может быть, не будет уже однозначной аналитической функцией, но получающуюся многозначность очень легко выделить. В самом деле, мы имеем дело с двухсвязной областью, лежащей вне контура C. Пусть контур C_1 охватывает контур C один раз в отрицательном направлении, и обозначим через K значение интеграла

$$K = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \chi(\bar{z})\, d\bar{z}.$$

Ясно, что функция

$$K \ln \bar{z}$$

при обходе контура C_1 в отрицательном направлении увеличивается на $2\pi i K$. Поэтому функция

$$\chi(\bar{z}) = \int \chi_1(\bar{z})\, d\bar{z} - K \ln \bar{z}$$

будет уже однозначной аналитической функцией от $\bar{z}$ вне контура C. Теперь мы можем проинтегрировать уравнение (24.6) последний раз:

$$4\mu (v_x - iv_y) = \bar{z}\varphi(z) + \chi(\bar{z}) + K \ln \bar{z} + \lambda_1(z).$$

Если мы представим аналитическую функцию $\lambda_1(z)$ в виде суммы

$$\lambda_1(z) = K \ln z + \lambda(z),$$

то получим окончательное равенство

$$4\mu (v_x - iv_y) = \bar{z}\varphi(z) + \chi(\bar{z}) + \lambda(z) + K \ln (z\bar{z}). \tag{24.7}$$

В этом последнем равенстве все члены, кроме $\lambda(z)$, по доказанному, являются однозначными функциями от x и y, следовательно, и $\lambda(z)$ будет однозначной функцией от z.

Используем теперь заданное нам условие, что при $r \to \infty$ функция $v_x - iv_y$ стремится к предельному значению U. Если бы $v_x - iv_y$ было бы аналитической функцией от $x + iy$, то, как показывается

в теории аналитических функций, из только что указанного условия сразу вытекало бы разложение

$$v_x - iv_y = U + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}.$$

В рассматриваемом нами случае имеет место аналогичный же результат. А именно, напишем разложения в ряды Лорана однозначных аналитических функций $\varphi(z)$, $\chi(\bar{z})$, $\lambda(z)$:

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n}{z^n}, \quad \chi(\bar{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\beta}_n}{\bar{z}^n}, \quad \lambda(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{z^n};$$

пусть, далее, C_r есть окружность большого радиуса r с центром в начале координат. В точках этой окружности

$$z = re^{i\theta}, \quad \bar{z} = re^{-i\theta}$$

и, следовательно, на C_r мы имеем следующее равенство:

$$4\mu(v_x - iv_y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n}{r^{n-1}} e^{-i(n+1)\theta} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\beta}_n}{r^n} e^{in\theta} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{r^n} e^{-in\theta} + 2K \ln r.$$

Умножим обе части этого равенства на $e^{ik\theta}$ и проинтегрируем по θ в пределах от 0 до 2π. Замечая, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ir\theta} d\theta = 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0,$$

легко придём к следующим соотношениям:

$$4\mu \int_0^{2\pi} (v_x - iv_y) e^{ik\theta} d\theta = 2\pi \left(\frac{\alpha_{k-1}}{r^{k-2}} + \bar{\beta}_{-k} r^k + \frac{\gamma_k}{r^k} \right) \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$4\mu \int_0^{2\pi} (v_x - iv_y) d\theta = 2\pi (\alpha_{-1} r^2 + \bar{\beta}_0 + \gamma_0 + 2K \ln r).$$

По предположению, $v_x - iv_y$ равномерно стремится к U при $r \to \infty$, следовательно, в первом равенстве левая часть стремится к нулю, а во втором к $8\pi\mu U$. Это возможно только в том случае, если

$$\alpha_0 + \bar{\beta}_{-1} = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \bar{\beta}_{-k} = 0 \quad (k \geqslant 2), \quad \alpha_k = 0 \quad (k \leqslant -2),$$
$$\gamma_k = 0 \quad (k \leqslant -1), \quad \alpha_{-1} = 0, \quad \bar{\beta}_0 + \gamma_0 = 4\mu U, \quad K = 0.$$

Но тогда формула (24.7) показывает, что функция $v_x - iv_y$ должна иметь следующий вид:

$$4\mu(v_x - iv_y) = \bar{z}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha_n}{z^n} + 4\mu U + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\beta}_n}{\bar{z}^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{z^n}.$$

Дифференцируя это равенство по $\bar{z}$ и принимая во внимание равенство (24.6), найдём, что

$$\varphi(z) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha_n}{z^n} = p + i\mu\Delta\Psi.$$

Но теперь ясно, что при возрастании r давление p убывает как $1/r^2$, так же убывают производные $\partial v_x/\partial r$ и $\partial v_y/\partial r$ (мы могли бы к p, а следовательно, и к $\varphi(z)$ прибавить ещё произвольную постоянную p_0, но мы можем, не нарушая общности, считать последнюю равной нулю). Но тогда подынтегральная функция в выражении (24.4) будет порядка $1/R^2$, а сам интеграл I будет порядка $1/R$. Мы доказали, таким образом, что

$$\lim_{R\to\infty} I = 0.$$

Но так как подынтегральная функция в двойном интеграле I неотрицательна, то непременно должно быть во всякой точке

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

т. е.

$$v_x = \text{const.}, \quad v_y = \text{const.},$$

и вследствие первых двух граничных условий (24.2):

$$v_x = 0, \quad v_y = 0,$$

что противоречит условиям на бесконечности (24.2).

Парадокс Стокса показывает нам, что мы не можем получить приближённого решения плоской задачи даже для малых чисел Рейнольдса путём полного отбрасывания инерционных членов.

§ 25. Уточнённое решение задачи о движении сферы. *Осеен* (Oseen) показал в 1910 г. на примере движения сферы в вязкой жидкости [1]), что мы получим гораздо лучшие результаты, если в уравнениях движения оставим только важнейшие из инерционных членов, отбросив остальные инерционные члены.

А именно, будем рассматривать задачу об обтекании сферы потоком, имеющим на бесконечности скорость, параллельную оси Ox и рав-

[1]) Oseen C. W., Ueber die Stokessche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik, Arkiv für Mat., Astr. och Fysik, 6 (1910), № 29; 7 (1911), № 1.

ную U. Как было отмечено выше, неудовлетворительность решения Стокса проявляется на далёких от сферы расстояниях. Но в далёких от сферы точках

$$v_x = U + v'_x, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z, \tag{25.1}$$

где v'_x, v'_y, v'_z суть малые величины. Рассматривая теперь инерционные члены, стоящие в левых частях первых трёх из уравнений (5.1), мы увидим, что они отличаются от

$$U\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad U\frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad U\frac{\partial v_z}{\partial x} \tag{25.2}$$

малыми членами второго порядка, если считать v'_x, v'_y, v'_z и инерционные члены за малые члены первого порядка. Поэтому мы получим гораздо лучшее приближение в далёких от сферы областях, если заменим уравнения (5.1) следующими *обобщёнными уравнениями Стокса*:

$$\left.\begin{aligned} U\frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta v_x, \\ U\frac{\partial v_y}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v_y, \\ U\frac{\partial v_z}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta v_z, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &+ \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{25.3}$$

которые имеют очень простой вид, если их записать в векторной форме:

$$U\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\Delta\boldsymbol{v}; \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{25.4}$$

Нужно отметить, что для области жидкости, непосредственно примыкающей к сфере, замена инерционных членов величинами (25.2) ничуть не лучше замены этих членов нулями, так как в этой области v_x, v_y, v_z малы (на самой поверхности сферы v_x, v_y, v_z обращаются в нуль), и мы не можем использовать факта малости v'_x по сравнению с U. Однако, поскольку мы рассматриваем движения с малыми числами Рейнольдса, то как полные инерционные члены, так и заменяющие их в наших уравнениях выражения (25.2) будут малы по сравнению с членами, происходящими от сил вязкости. Следовательно, в области, примыкающей к сфере, уравнения (25.3) и уравнения Стокса являются в одинаковой мере хорошими приближениями к полной системе дифференциальных уравнений (5.1).

Граничные условия, которым должно удовлетворять решение системы (25.3), остаются прежними:

$$\left.\begin{aligned} v_x = v_y = v_z = 0 \quad &\text{при} \quad r = a, \\ v_x \to U,\ v_y \to 0,\ v_z \to 0 \quad &\text{»} \quad r \to \infty. \end{aligned}\right\} \tag{25.5}$$

Для решения поставленной задачи мы применим метод Ламба [1]). Образуем расхождение и вихрь от обеих частей первого из уравнений (25.4); принимая ещё во внимание второе из этих уравнений, придём к формулам:

$$\Delta p = 0, \tag{25.6}$$

$$U \frac{d\Omega}{\partial x} = \nu \Delta \boldsymbol{\Omega}, \tag{25.7}$$

где

$$\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}.$$

Используем теперь симметрию движения относительно оси Ox. Ясно, что вихревые линии должны быть окружностями с центрами на оси Ox, так что во всяком случае

$$\Omega_x = 0. \tag{25.8}$$

Но тогда условие

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\Omega} = \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} = 0$$

приводит к равенству

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} = 0,$$

откуда следует, что

$$\Omega_y = -\frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \Omega_z = \frac{\partial \chi}{\partial y}. \tag{25.9}$$

Итак, мы имеем формулы:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial y}.$$

Сразу видно, что частным решением этой системы является

$$v_x = -\chi, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0,$$

общим же решением будет

$$v_x = -\chi + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \vartheta}{\partial z}. \tag{25.10}$$

[1]) Lamb H., On the Uniform Motion of a Sphere through a Viscous Fluid, Phil. Mag., 21 (1911), стр. 120.

Подстановка значений (25.9) в уравнение (25.7) приводит к равенствам, которые будут удовлетворены, если

$$U\frac{\partial\chi}{\partial x}=\nu\,\Delta\chi.$$

С другой стороны, подставляя значения (25.10) в уравнение неразрывности, находим:

$$\Delta\vartheta=\frac{\partial\chi}{\partial x}$$

и, на основании предыдущего равенства,

$$\Delta\vartheta=\frac{\nu}{U}\Delta\chi,$$

откуда видно, что следует принять

$$\vartheta=\frac{\nu}{U}\chi+\varphi,$$

где φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi=0. \tag{25.11}$$

Введём для краткости обозначение

$$\frac{U}{2\nu}=k; \tag{25.12}$$

тогда выражения для составляющих скорости примут следующий окончательный вид:

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial x}-\chi,\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial y},$$
$$v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial z}, \tag{25.13}$$

причём φ удовлетворяет уравнению Лапласа (25.11), а χ — уравнению

$$\Delta\chi-2k\frac{\partial\chi}{\partial x}=0. \tag{25.14}$$

Подставляя значения (25.13) в уравнения (25.3), можем решить эти последние уравнения относительно p, в результате чего получим:

$$p=p_0-\rho U\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{25.15}$$

Уравнению Лапласа (25.11) удовлетворяет функция

$$\varphi_0(x,\ y,\ z)=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

очевидно далее, что функции $\partial\varphi_0/\partial x$, $\partial^2\varphi_0/\partial x^2$ и т. д. тоже являются решениями уравнения Лапласа (25.11). Мы положим поэтому

$$\varphi = \frac{A_0}{r} + A_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + A_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots, \qquad (25.16)$$

где постоянные коэффициенты A_0, A_1, A_2 должны быть определены из граничных условий.

Перейдём теперь к решению уравнения (25.14). Сделаем подстановку, положив

$$\chi = e^{kx}\psi;$$

тогда, после простых вычислений, найдём для определения функции ψ уравнение

$$\Delta\psi - k^2\psi = 0, \qquad (25.17)$$

которое в сферических координатах r, θ, λ имеет вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2} - k^2\psi = 0.$$

Отыщем те решения этого уравнения, которые зависят только от r; в этом случае мы можем переписать уравнение следующим образом:

$$\frac{d^2(r\psi)}{dr^2} - k^2 r\psi = 0,$$

откуда следует, что

$$r\psi = B_1 e^{kr} + B_2 e^{-kr}.$$

Так как нас интересуют решения, обращающиеся на бесконечности в нуль, то мы примем за основное решение уравнения (25.17) следующее:

$$\psi_0(x, y, z) = \frac{e^{-kr}}{r}.$$

Ясно, что $\partial\psi_0/\partial x$, $\partial^2\psi_0/\partial x^2$ и т. д. тоже являются решениями уравнения (25.17), а $e^{kx}\psi_0$, $e^{kx}\,\partial\psi_0/\partial x$ и т. д. — решениями уравнения (25.14). Кроме того, последнему уравнению удовлетворяет также $\chi = \text{const}$. Мы примем поэтому

$$\chi = -U + e^{kx}\left\{C_0\frac{e^{-kr}}{r} + C_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right) + C_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right) + \ldots\right\}; \qquad (25.18)$$

тогда граничные условия на бесконечности будут удовлетворены; остаётся определить постоянные A_0, A_1, ... C_0, C_1, ... так, чтобы удовлетворялись граничные условия на поверхности сферы. Для этого удобно будет перейти к сферическим координатам r, θ, λ. Этот переход очень легко совершить на основании формул (25.13), если

вспомнить, что проекции вектора $\operatorname{grad}\varphi$ на оси сферических координат равняются соответственно $\partial\varphi/\partial r$, $1/r\,\partial\varphi/\partial\theta$ и $1/r\sin\theta\,\partial\varphi/\partial\lambda$. Поэтому вследствие формул (25.13), (25.16) и (25.18) для составляющих вектора скорости в сферических координатах получаем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial r} - \chi\cos\theta, \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{1}{2kr}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \chi\sin\theta, \\ v_\lambda &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{25.19}$$

Мы не будем строго решать поставленную нами задачу, а ограничимся приближённым её решением. Именно, мы возьмём в разложениях (25.16) (25.18) только несколько первых членов и определим их коэффициенты так, чтобы значения на поверхности сферы отношений v_r/U и v_θ/U были малыми величинами второго порядка относительно считаемого малым числа Рейнольдса $\mathsf{R} = 2ka$.

Чтобы решить вопрос о том, сколько членов взять в разложениях (25.16) и (25.18), обратимся к решению Стокса.

Сравнивая выражение (25.15) для p с выражением (23.13), мы видим, что в решении Стокса

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{3}{2}\frac{\nu a x}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{2}\frac{\nu a}{r}\right),$$

т. е.

$$\varphi = -\frac{3}{2}\frac{\nu a}{r};$$

если мы выразим ν через k по формуле (25.12) для того, чтобы φ было пропорционально U, то найдём:

$$\varphi = -\frac{3}{4}\frac{Ua}{kr},$$

$$A_0 = -\frac{3}{4}\frac{Ua}{k} = -\frac{3}{2}\frac{Ua^2}{\mathsf{R}}.$$

Мы видим, таким образом, что A_0 содержит множителем R^{-1}; можно поэтому сделать предположение, что в разложении (25.16) A_0 будет порядка $1/\mathsf{R}$, A_1 — порядка 1, A_2 — порядка R и т. д. Обращая, далее, внимание на формулы (25.19), мы видим, что в χ главный член должен быть порядка 1, так как тогда выражения $1/2k\,\partial\chi/\partial r$ и $1/2kr\,\partial\chi/\partial\theta$ будут порядка $1/\mathsf{R}$ и смогут сократиться с членами этого же самого порядка, происходящими от слагаемого A_0/r функции φ. Итак, мы можем ожидать, что C_0 будет порядка 1, C_1 — порядка R, C_2 — порядка R^2 и т. д. Конечно, сделанные нами предположения о порядке малости различных коэффициентов должны быть проверены после вычисления.

Считая теперь число Рейнольдса малым, разложим функции φ и χ по степеням R, причём в разложении для φ мы должны взять члены до первого порядка относительно R включительно, т. е. члены, содержащие коэффициенты A_0, A_1 и A_2; в разложении же для χ мы должны учесть также и члены второго порядка относительно R, так как в формулах (25.19) производные от χ входят с множителем $1/k$.

Помня, что $x = r\cos\theta$, без труда находим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^3} = -\frac{\cos\theta}{r^2}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} = \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}$$

и, следовательно, для φ получается следующее приближённое выражение:

$$\varphi = \frac{A_0}{r} - \frac{A_1\cos\theta}{r^2} + \frac{A_2(3\cos^2\theta - 1)}{r^3}. \tag{25.20}$$

Составим теперь приближённое выражение для χ; мы имеем, прежде всего, с точностью до членов второго порядка включительно:

$$\frac{e^{-k(r-x)}}{r} = \frac{e^{-kr(1-\cos\theta)}}{r} =$$

$$= \frac{1}{r} - k(1-\cos\theta) + \frac{k^2 r}{2}(1-\cos\theta)^2 + \ldots;$$

далее, с точностью до членов первого порядка включительно,

$$e^{kx}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right) = e^{kr\cos\theta}e^{-kr}\left(-\frac{1}{r^2} - \frac{k}{r}\right)\frac{x}{r} =$$

$$= -\frac{\cos\theta}{r^2} - \frac{k\cos^2\theta}{r} - \ldots$$

и, наконец,

$$e^{kx}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} + \ldots$$

Поэтому приближённое выражение для χ имеет вид:

$$\chi = -U + C_0\left[\frac{1}{r} - k(1-\cos\theta) + \frac{k^2 r}{2}(1-\cos\theta)^2\right] -$$

$$- C_1\left(\frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{k\cos^2\theta}{r}\right) + C_2\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}. \tag{25.21}$$

Составляем теперь равенства $v_r(a, \theta) = 0$, $v_\theta(a, \theta) = 0$, причём в выражениях $-\chi\cos\theta$ и $\chi\sin\theta$ малые величины второго порядка

относительно R отбрасываем; в результате получаем:

$$-\frac{A_0}{a^2}+\frac{2A_1\cos\theta}{a^3}-\frac{3A_2(3\cos^2\theta-1)}{a^4}-$$
$$-C_0\left\{\frac{1}{2ka^2}+\frac{\cos\theta}{a}-\frac{k}{4}(1-3\cos^2\theta+2\cos\theta)\right\}+$$
$$+C_1\left\{\frac{\cos\theta}{ka^3}+\frac{3\cos^2\theta}{2a^2}\right\}-\frac{3C_2(3\cos^2\theta-1)}{2ka^4}+U\cos\theta=0,$$
$$\frac{A_1}{a^3}-\frac{6A_2\cos\theta}{a^4}+C_0\left\{\frac{1}{2a}-\frac{k}{2}(1-\cos\theta)\right\}+$$
$$+\frac{C_1}{2ka^3}-\frac{3C_2\cos\theta}{ka^4}-U=0.$$

Приравнивая в первом равенстве коэффициенты при 1, $\cos\theta$ и $3\cos^2\theta-1$, а во втором коэффициенты при 1 и $\cos\theta$, получаем пять уравнений для определения шести коэффициентов A_0, A_1, A_2, C_0, C_1 и C_2:

$$A_0+\frac{C_0}{2k}-\frac{C_1}{2}=0,$$
$$2A_1-C_0a^2\left(1-\frac{ka}{2}\right)+\frac{C_1}{k}=-Ua^3,$$
$$3A_2+C_0\frac{ka^4}{4}-\frac{C_1a^2}{2}+\frac{3C_2}{2k}=0,$$
$$A_1+C_0\frac{a^2}{2}(1-ka)+\frac{C_1}{2k}=Ua^3,$$
$$6A_2-\frac{C_0ka^4}{2}+\frac{3C_2}{k}=0.$$

Исключая из второго и четвёртого равенств A_1 и C_1, получаем:

$$C_0=\frac{3Ua}{2-\frac{3ka}{2}},\qquad(25.22)$$

исключая же из третьего и пятого уравнений A_2 и C_2, находим:

$$C_0ka^4-C_1a^2=0,$$

откуда

$$C_1=\frac{3Uka^3}{2-\frac{3ka}{2}};\qquad(25.23)$$

после этого первое и второе уравнения определяют A_0 и A_1:

$$A_0=-\frac{3Ua(1-k^2a^2)}{k(4-3ka)},\qquad(25.24)$$
$$A_1=-\frac{2Ua^3}{4-3ka}.\qquad(25.25)$$

Наконец, A_2 и C_2 определяются только в комбинации

$$A_2+\frac{C_2}{2k}=\frac{Uka^5}{2(4-3ka)}, \tag{25.26}$$

так как при принятой степени приближения невозможно отделить A_2 от C_2. Мы видим, что сделанные нами допущения о порядке коэффициентов A и C действительно имеют место.

Перейдём теперь к исследованию полученного решения. При этом мы будем ограничиваться в разложениях для φ и χ только первыми двумя членами и соответственно этому упростим найденные выражения для коэффициентов A_0, A_1, C_0 и C_1, отбросив в A_0 и A_1 члены порядка k, а в C_0 и C_1 — члены порядка k^2. Тогда можно принять

$$\left.\begin{aligned} C_0&=\frac{3Ua}{2}\left(1-\frac{3ka}{4}\right), \qquad C_1=\frac{3}{2}Ua^3k,\\ A_0&=-\frac{3Ua}{4k}\left(1+\frac{3ka}{4}\right), \qquad A_1=-\frac{1}{2}Ua^3. \end{aligned}\right\} \tag{25.27}$$

Составляем теперь по формулам (25.19) выражения для проекций скоростей v_r и v_θ, причём будем пренебрегать членами, содержащими k множителем:

$$\begin{aligned} v_r&=-\frac{A_0}{r^2}+\frac{2A_1\cos\theta}{r^3}-\frac{C_0e^{-kr(1-\cos\theta)}}{2kr^2}[1+kr(1+\cos\theta)]+\\ &\qquad+\frac{C_1\cos\theta e^{-kr(1-\cos\theta)}}{kr^3}+U\cos\theta,\\ v_\theta&=\frac{A_1\sin\theta}{r^3}+\frac{C_0\sin\theta}{2r}e^{-kr(1-\cos\theta)}+\\ &\qquad+\frac{C_1\sin\theta}{2kr^3}e^{-kr(1-\cos\theta)}-U\sin\theta. \end{aligned} \tag{25.28}$$

Для давления, на основании (25.15) и (25.20), мы имеем формулу:

$$\begin{aligned} p&=p_0+\rho UA_0\frac{\cos\theta}{r^2}-\rho UA_1\frac{3\cos^2\theta-1}{r^3}=\\ &=p_0-\frac{3}{2}\mu Ua\left(1+\frac{3ka}{4}\right)\frac{\cos\theta}{r^2}-\frac{1}{2}\frac{\rho U^2a^3}{r^3}(3\cos^2\theta-1). \end{aligned} \tag{25.29}$$

Для точек вблизи сферы, разлагая в формулах (25.28) показательные функции по степеням kr и ограничиваясь той же степенью приближения, получим:

$$\left.\begin{aligned} v_r&=U\cos\theta\left\{1-\frac{3}{2}\frac{a}{r}+\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right\},\\ v_\theta&=-U\sin\theta\left\{1-\frac{3}{4}\frac{a}{r}-\frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{25.30}$$

т. е. восстанавливаем формулы Стокса (23.13). Следовательно, вблизи сферы течение имеет, по-прежнему, вид, изображённый на рис. 167 (относительное движение) и на рис. 168 (абсолютное движение).

На далёких от сферы расстояниях дело обстоит совсем иначе. В этом случае мы можем отбросить в формулах (25.28) члены, содержащие коэффициенты A_1 и C_1, как малые, по сравнению с членами, содержащими A_0 и C_0. Мы будем, далее, рассматривать для определённости абсолютное движение сферы в жидкости, покоящейся на бесконечности; тогда в выражениях (25.28) нужно отбросить также и члены $U\cos\theta$ и $-U\sin\theta$. В результате мы приходим к следующим простым выражениям:

$$v_r = -\frac{A_0}{r^2} + \frac{A_0 e^{-kr(1-\cos\theta)}}{r^2}[1 + kr(1+\cos\theta)],$$

$$v_\theta = -\frac{kA_0\sin\theta}{r}e^{-kr(1-\cos\theta)}, \qquad (25.31)$$

причём нужно помнить, что сфера двигается вдоль оси Ox в отрицательном направлении со скоростью U.

Рассмотрим теперь отдельно движения жидкости перед телом и позади тела. Рассмотрим сначала ту область, где $kr(1-\cos\theta)$ имеет значительную величину, т. е. где kr велико, а θ достаточно отличается от нуля; в этой области мы можем пренебречь значением показательной функции, в результате чего получим:

$$v_r = -\frac{A_0}{r^2} = \frac{3Ua}{4k}\left(1+\frac{3ka}{4}\right)\frac{1}{r^2}. \qquad (25.32)$$

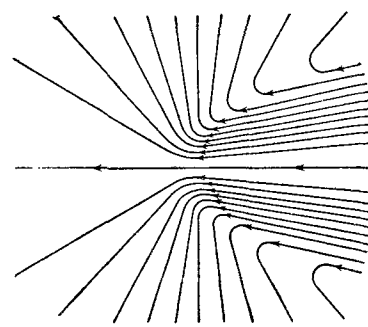

Рис. 169.

Но к упомянутой области не принадлежит только узкий хвост позади тела. Поэтому полученная формула показывает, что на далёких расстояниях всюду, кроме узкого хвоста параболоидального вида позади тела, течение мало отличается от течения, вызванного источником, находящимся в центре сферы и имеющим интенсивность

$$Q = \frac{3Ua\pi}{k}\left(1+\frac{3ka}{4}\right) = 6\pi a v\left(1+\frac{3ka}{4}\right). \qquad (25.33)$$

Только что высказанное положение наглядно подтверждается рис. 169, на котором даны линии тока для абсолютного движения сферы.

Напротив, рассмотрим область далеко позади тела, в которой угол θ мало отличается от 0, а kr велико, причём величина

$kr(1-\cos\theta)$ близка к нулю. Тогда выражение $1+kr(1+\cos\theta)$ мало отличается от $2kr$, значение $e^{-kr(1-\cos\theta)}$ мало отличается от единицы, и мы получаем приближённое выражение для v_r следующего вида:

$$v_r = \frac{2A_0k}{r} = -\frac{3Ua}{2r}\left(1+\frac{3ka}{4}\right). \tag{25.34}$$

Мы видим, что в узком хвосте далеко позади тела жидкость движется в том же направлении, что и тело, причём на больших расстояниях скорость изменяется обратно пропорционально первой степени расстояния. На рис. 169 видно резкое различие течений впереди и позади тела.

Сущность этого различия легко выяснить, если найти распределение вихрей в рассматриваемом течении. Для вычисления вихрей проще всего воспользоваться формулами (25.8) и (25.9), в которых мы, согласно рассматриваемому приближению, должны взять

$$\chi = C_0\frac{e^{k(x-r)}}{r} = \frac{3Ua}{2}\left(1+\frac{3ka}{4}\right)\frac{e^{k(x-r)}}{r}.$$

В результате находим:

$$\Omega_x = 0,\quad \Omega_y = -\frac{\partial\chi}{\partial z} = C_0e^{k(x-r)}\frac{1+kr}{r^2}\frac{z}{r},$$

$$\Omega_z = \frac{\partial\chi}{\partial y} = -C_0e^{k(x-r)}\frac{1+kr}{r^2}\frac{y}{r},$$

откуда

$$\Omega = C_0e^{-kr(1-\cos\theta)}\frac{1+kr}{r^2}\sin\theta. \tag{25.35}$$

Для больших значений $kr(1-\cos\theta)$, т. е. далеко впереди тела (точнее говоря, вне узкого хвоста позади тела), значение Ω очень мало, следовательно, далеко перед телом движение носит почти потенциальный характер. Напротив, в узком хвосте позади тела, где величина $kr(1-\cos\theta)$ очень мала, движение носит завихренный характер. Правда, при $\theta=0$ мы получаем $\Omega=0$, но при $\theta = 1/\sqrt{kr}$, где kr — очень большое число, т. е. на поверхности параболоидального вида, мы получаем:

$$\Omega = C_0\sqrt{\frac{k}{er^3}} = \frac{3Ua}{2}\sqrt{\frac{k}{er^3}}, \tag{25.36}$$

так что вихри в области позади тела затухают обратно пропорционально полуторной степени расстояния.

Чтобы вычислить функцию тока $\Psi(r,\theta)$, мы можем применить формулу (23.16). При этом мы воспользуемся формулой (25.31), чтобы получить функцию тока для движения сферы в жидкости, покоящейся на бесконечности, в соответствии с рис. 169 вычерчен-

ным при этих же предположениях. В результате простого вычисления находим:

$$\Psi(r, \theta) = -\frac{3\pi U a}{2k}\left(2 + \frac{3ka}{4}\right)(1 + \cos\theta)\left[1 - e^{-kr(1-\cos\theta)}\right]. \quad (25.37)$$

Покажем, наконец, как вычислить силу воздействия потока на тело. Мы уже имели в § 23 общую формулу для рассматриваемого случая

$$W = \int_S \int (p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta)\, dS, \quad (25.38)$$

причём на поверхности сферы

$$p_{rr} = -p, \qquad p_{r\theta} = \mu\frac{\partial v_\theta}{\partial r}.$$

Проще всего вычислить значение $\partial v_\theta/\partial r$, если воспользоваться выражениями (5.7) для проекций вихря в сферических координатах r, θ и λ:

$$\Omega = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta v_\lambda)}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial\lambda}\right],$$

$$\Omega_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial v_r}{\partial\lambda} - \frac{\partial(r\sin\theta v_\lambda)}{\partial r}\right],$$

$$\Omega_\lambda = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right] = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta};$$

в нашем случае $\Omega_r = \Omega_\theta = 0$; что же касается значений Ω_λ, то на поверхности сферы $v_\theta = 0$, $v_r = 0$, а следовательно, и $\partial v_r/\partial\theta = 0$. Итак, на поверхности сферы

$$\Omega_\lambda = \frac{\partial v_\theta}{\partial r}.$$

С другой стороны, мы имеем для составляющих вихря выражения:

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = -\frac{\partial\chi}{\partial z}, \quad \Omega_z = \frac{\partial\chi}{\partial y};$$

следовательно, по формулам (23.20) перехода от декартовых координат к сферическим

$$\Omega_\lambda = -\Omega_y\sin\lambda + \Omega_z\cos\lambda = \frac{\partial\chi}{\partial y}\cos\lambda + \frac{\partial\chi}{\partial z}\sin\lambda.$$

Помня, что $p = p_0 - \rho U\partial\varphi/\partial x$, находим для подынтегральной функции в формуле (25.38) выражение

$$p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta =$$

$$= -\left(p_0 - \rho U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\cos\theta - \mu\frac{\partial\chi}{\partial y}\cos\lambda\sin\theta - \mu\frac{\partial\chi}{\partial z}\sin\lambda\sin\theta =$$

$$= -p_0\cos\theta + \rho U\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\theta - \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial y}\cos\lambda\sin\theta - \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial z}\sin\lambda\sin\theta\right];$$

конечно, это равенство справедливо только на поверхности сферы. Но ведь на поверхности сферы $v_x = v_y = v_z = 0$; поэтому по формулам (25.13)

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = -2k\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial z} = -2k\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Замечая, наконец, что по тем же формулам преобразования (23.20)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos\lambda\sin\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\sin\lambda\sin\theta = \frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial r},$$

приходим к следующей простой формуле:

$$W = \rho U \int\limits_S \int \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, dS, \tag{25.39}$$

ибо интеграл от $p_0 \cos\theta$, очевидно, равен нулю. Но для φ мы имели общее выражение (25.16). Все члены этого выражения, кроме первого, при интегрировании $\partial\varphi/\partial r$ по всей поверхности сферы дадут нуль; первый же член даёт, очевидно, значение

$$\int\limits_S \int \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, dS = -\int\limits_S \int \frac{A_0}{r^2}\, dS = -\frac{A_0}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = -4\pi A_0.$$

Итак, мы получаем следующую формулу:

$$W = -4\pi\rho U A_0. \tag{25.40}$$

Воспользовавшись теперь выражением (25.27), найдём:

$$W = 6\pi\mu U a\left(1 + \frac{3ka}{4}\right). \tag{25.41}$$

Эта последняя формула, данная Осееном, представляет уточнение формулы Стокса.

Аналогичные предыдущим вычисления были произведены и для более сложных случаев, как, например, для случая движения сферы в полупространстве, ограниченном плоской стенкой, или для случая движения сферы по оси цилиндра. Полученные для этих случаев формулы сопротивления, обобщающие формулу Стокса, могли быть проверены на опыте. Не останавливаясь на цифровых данных, мы отметим только, что получилось удовлетворительное совпадение результатов опыта и теории для малых чисел Рейнольдса, не превышающих единицы.

§ 26. Движение цилиндра. Решение задачи об обтекании цилиндра потоком вязкой жидкости в предположении, что за исходные урав-

нения можно взять

$$\left.\begin{aligned} U\frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta v_x, \\ U\frac{\partial v_y}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v_y, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &+ \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{26.1}$$

протекает совершенно аналогично решению задачи об обтекании сферы, так что при изложении этого решения можно быть очень кратким.

Мы имеем опять формулы:

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \chi; \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial y}, \tag{26.2}$$

причём φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{26.3}$$

а χ — уравнению

$$\Delta\chi - 2k\frac{\partial\chi}{\partial x} = 0. \tag{26.4}$$

Тогда все уравнения (26.1) будут удовлетворены, если взять

$$p = p_0 - \rho U\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{26.5}$$

Уравнению (26.3) удовлетворяет функция $\ln r$, а также $\frac{\partial \ln r}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}$ и т. д. Поэтому мы принимаем

$$\varphi = A_0 \ln r + A_1\frac{\partial \ln r}{\partial x} + A_2\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \ldots. \tag{26.6}$$

В уравнении (26.4) делаем подстановку

$$\chi = e^{kx}\psi,$$

тогда получаем для определения ψ уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - k^2\psi = 0,$$

имеющее в полярных координатах (r, θ) вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} - k^2\psi = 0. \tag{26.7}$$

Отыскиваем то решение этого уравнения, которое зависит только от r и, следовательно, удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} - k^2\psi = 0. \tag{26.8}$$

Решениями этого последнего уравнения являются бесселевы функции с чисто мнимым аргументом [1]):

$$I_0(kr)=J_0(ikr) \text{ и } K_0(kr)=\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(ikr).$$

Однако $I_0(kr)$ безгранично возрастает вместе с r, в то время как $K_0(kr)$ стремится к нулю при $r\to\infty$; поэтому единственно приемлемым для нас решением уравнения (26.8) является $K_0(kr)$. Функции

$$\frac{\partial K_0(kr)}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 K_0(kr)}{\partial x^2},\ \ldots$$

также будут решениями уравнения (26.7). Мы можем поэтому принять:

$$\chi=-U+e^{kx}\left\{C_0K_0(kr)+C_1\frac{\partial K_0(kr)}{\partial x}+C_2\frac{\partial^2 K_0(kr)}{\partial x^2}+\ldots\right\}. \quad (26.9)$$

Так как

$$\frac{\partial \ln r}{\partial x}=\frac{x}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r},\quad \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}=-\frac{\cos 2\theta}{r^2},\ \ldots, \quad (26.10)$$

то для φ находим следующее разложение:

$$\varphi=A_0\ln r+A_1\frac{\cos\theta}{r}-A_2\frac{\cos 2\theta}{r^2}+\ldots \quad (26.11)$$

С другой стороны, мы имеем при малых kr разложения:

$$I_0(kr)=1+\frac{1}{2^2}(kr)^2+\frac{(kr)^4}{(2\cdot 4)^2}+\ldots$$

$$K_0(kr)=-I_0(kr)\ln\left(\frac{1}{2}\gamma kr\right)+\frac{k^2r^2}{2^2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{k^4r^4}{(2\cdot 4)^2}+\ldots,$$

где γ — постоянная Маскерони ($\gamma=1{,}7811$; $\ln\gamma=0{,}57722$). Ограничиваясь самым первым приближением, мы можем принять, что

$$K_0(kr)\approx-\ln\left(\frac{1}{2}\gamma kr\right),$$

$$\frac{\partial K_0(kr)}{\partial x}\approx-\frac{1}{r}\frac{x}{r}=-\frac{\cos\theta}{r};$$

поэтому вблизи цилиндра, считая ka малым, будем иметь приближённо

$$\chi=-U-C_0\left[\ln\left(\frac{1}{2}\gamma kr\right)+kr\cos\theta\ln\left(\frac{1}{2}\gamma kr\right)\right]-C_1\frac{\cos\theta}{r}. \quad (26.12)$$

Теперь мы можем вычислить по формулам

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial r}-\chi\cos\theta;\quad v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{1}{2kr}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}+\chi\sin\theta \quad (26.13)$$

[1]) См., например, Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, 1939, стр. 687 или Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, ГТТИ, 1935.

приближённые выражения для проекций скорости вблизи цилиндра:

$$v_r = \frac{A_0}{r} - \frac{A_1 \cos\theta}{r^2} + U\cos\theta - \\ - C_0\left\{\frac{1}{2kr} + \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta \ln\left(\frac{1}{2}\gamma kr\right)\right\} + \frac{C_1\cos\theta}{2kr^2},$$

$$v_\theta = -\frac{A_1\sin\theta}{r^2} - U\sin\theta - C_0\frac{\sin\theta}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\gamma kr\right) + \frac{C_1\sin\theta}{2kr^2}, \quad (26.14)$$

при вычислениях мы отбрасываем некоторые члены, малые в сравнении с оставляемыми, а именно, вычисляя $\chi\cos\theta$ и $\chi\sin\theta$, мы пользуемся ещё более упрощённым выражением для χ:

$$\chi = -U - C_0\ln\left(\frac{1}{2}\gamma kr\right);$$

кроме того, в выражении для φ берутся только два первых члена.

Полагая в полученных формулах $r = a$, составляя равенства $v_r(a, \theta) = v_\theta(a, \theta) = 0$ и приравнивая нулю коэффициенты при 1, $\cos\theta$ и $\sin\theta$, приходим к трём уравнениям для определения четырёх коэффициентов: A_0, A_1, C_0, C_1:

$$\frac{A_0}{a} - \frac{C_0}{2ka} = 0,$$

$$-\frac{A_1}{a^2} + U - \frac{C_0}{2}\left[1 - \ln\left(\frac{1}{k}\gamma ka\right)\right] + \frac{C_1}{2ka^2} = 0,$$

$$-\frac{A_1}{a^2} - U - \frac{C_0}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\gamma ka\right) + \frac{C_1}{2ka^2} = 0,$$

откуда легко находим:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{2U}{k\left[1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}\gamma ka\right)\right]} = \frac{4v}{1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}\gamma ka\right)}, \\ C_0 &= \frac{4U}{1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}\gamma ka\right)}, \\ A_1 - \frac{C_1}{2k} &= -\frac{Ua^2}{1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}\gamma ka\right)}. \end{aligned}\right\} \quad (26.15)$$

При принятой степени приближения коэффициенты A_1 и C_1 по отдельности определены быть не могут. Подставляя найденные значения коэффициентов в формулы (26.14), находим выражения для проекций скоростей, пригодные в области вблизи цилиндра:

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \frac{U\cos\theta}{1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}\gamma ka\right)}\left[-1 + \frac{a^3}{r^2} + 2\ln\frac{r}{a}\right], \\ v_\theta &= -\frac{U\sin\theta}{1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}\gamma ka\right)}\left[1 - \frac{a^2}{r^2} + 2\ln\frac{r}{a}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (26.16)$$

На больших расстояниях от цилиндра, беря только члены, содержащие A_0 и C_0, и рассматривая абсолютное движение цилиндра в жидкости, покоящейся на бесконечности, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \frac{A_0}{r} + \frac{1}{2} C_0 e^{kr\cos\theta}\left[K_0'(kr) - \cos\theta K_0(kr)\right], \\ v_\theta &= \frac{1}{2} C_0 e^{kr\cos\theta} K_0(kr)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{26.17}$$

Из теории бесселевых функций известно, что для больших значений аргумента имеют место асимптотические формулы

$$K_0(kr) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, e^{-kr}, \quad K_0'(kr) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, e^{-kr}.$$

Отсюда вытекают заключения, совершенно аналогичные тем, которые мы делали, рассматривая движение сферы. А именно, рассмотрим семейство парабол, зависящих от параметра α:

$$kr(1-\cos\theta) = \alpha. \tag{26.18}$$

Если α достаточно велико, то v_r мало отличается от A_0/r, т. е. в области вне некоторой из парабол (26.18) движение мало отличается от движения, соответствующего источнику с интенсивностью

$$Q = 2\pi A_0 = \frac{4\pi U}{k\left[1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}\gamma ka\right)\right]}. \tag{26.19}$$

Напротив, если α — порядка 1, но kr велико, то $\cos\theta$ будет близко к 1, и мы будем иметь следующую приближённую формулу:

$$v_r = -C_0 e^{-\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}, \tag{26.20}$$

показывающую, что за цилиндром жидкость увлекается вместе с цилиндром.

Для вихря мы легко находим по формулам (26.2) выражение

$$\Omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial y} = C_0 e^{kx} K_0'(kr)\cdot k\,\frac{y}{r} = \\ = C_0 e^{kr\cos\theta} K_0'(kr)\, k\sin\theta; \tag{26.21}$$

на больших расстояниях от цилиндра мы будем иметь:

$$\Omega = -C_0\sqrt{\frac{\pi k}{2r}}\sin\theta\, e^{-kr(1-\cos\theta)}. \tag{26.22}$$

Как рассмотрение скоростей течения, так и рассмотрение вихрей приводят к одинаковому заключению об асимметрии течения; перед цилиндром течение носит потенциальный характер, за цилиндром — вихревой.

Приведём теперь формулу для давления; вследствие (26.5) и (26.6) имеем:

$$p = p_0 - \rho U A_0 \frac{\cos\theta}{r} + \rho U A_1 \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \dots \tag{26.23}$$

Вычислим, наконец, сопротивление, испытываемое цилиндром; общая формула

$$W = \int_C (p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta)\, ds$$

в данном случае упрощается:

$$W = a\int_0^{2\pi} (-p\cos\theta - \mu\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\sin\theta)\, d\theta. \tag{26.24}$$

Так как в полярных координатах вихрь выражается формулой

$$\Omega = \frac{1}{r}\frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta},$$

и так как на контуре цилиндра $v_\theta = v_r = \frac{\partial v_r}{\partial\theta} = 0$, то на контуре цилиндра будем иметь формулу

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} = \Omega = \frac{\partial\chi}{\partial y}.$$

Теперь нетрудно найти значение подынтегральной функции в выражении (26.24):

$$p\cos\theta + \mu\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\sin\theta = p_0\cos\theta - \rho U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\theta + \mu\frac{\partial\chi}{\partial y}\sin\theta =$$
$$= p_0\cos\theta - \rho U\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\theta - \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial y}\sin\theta\right).$$

Так как на поверхности цилиндра $v_y = 0$, то вторая из формул (26.2) показывает, что

$$\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial y} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

и так как ещё

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\theta = \frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial r},$$

$$\int_0^{2\pi} p_0\cos\theta\, d\theta = 0,$$

то мы приходим к следующему общему выражению для сопротивления цилиндра:

$$W = \rho U a\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\, d\theta. \tag{26.25}$$

Но по формуле (26.6) мы имеем на поверхности цилиндра:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A_0}{a} - \frac{A_1 \cos\theta}{a^2} + \frac{2A_2 \cos 2\theta}{a^3} - \dots$$

и ясно, что

$$W = 2\pi\rho\, U A_0. \tag{26.26}$$

Подставляя найденное выше значение A_0, получаем формулу Ламба для величины сопротивления, испытываемого цилиндром при его движении в вязкой жидкости, причём эта сила отнесена к единице длины цилиндра:

$$W = \frac{8\pi\mu U}{1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}\gamma^{ka}\right)}. \tag{26.27}$$

Конечно, следует ожидать справедливости этой формулы только при малых значениях числа Рейнольдса R, как это и подтверждается опытами.

§ 27. Гидродинамическая теория смазки. Одним из наиболее важных для техники случаев ламинарного движения вязкой жидкости является движение смазочной жидкости между цапфой и подшипником. Более того, в этом случае числа Рейнольдса бывают обычно очень малы, так что мы имеем право применять приближённые методы решения.

Законы трения, имеющие место при наличии смазки, резко отличаются от обычных законов сухого трения. В первом приближении сухое трение определяется законом Кулона, по которому на единицу поверхности трущихся тел при их скольжении друг по другу действует касательная сила T, определяемая формулой

$$T = kN, \tag{27.1}$$

причём коэффициент трения k принимается не зависящим от величины нормального давления N, величины трущихся поверхностей и их относительной скорости.

Обозначим для случая трения в подшипнике через P нагрузку, приходящуюся на цапфу, через r — радиус цапфы и через M — момент сил трения относительно оси цапфы. Если бы для этого случая можно было применить закон сухого трения, то сила трения была бы равна kP, плечо этой силы относительно оси цапфы равняется r, и следовательно, момент сил трения определялся бы формулой

$$M = kPr. \tag{27.2}$$

В 1883 г. Н. П. Петров высказал положение, что в трении подшипников основную роль играет внутреннее трение смазочного слоя, и установил соответствующий закон трения для простейшего случая. Он исходил из рассмотренного нами в § 15 движения вязкой жидко-

сти в области между двумя цилиндрами. Он предполагал, правда, что жидкость может скользить по поверхности этих цилиндров, причём развивается внешнее трение, пропорциональное относительной скорости скольжения жидкости вдоль поверхности цилиндра. Если принять, как это всегда теперь делается, условие прилипания жидкости к ограничивающим стенкам, то решение Н. П. Петрова совпадает с решением, изложенным в § 15.

Для теории смазки имеет значение случай, когда внутренний цилиндр радиуса $r_1 = a$ вращается с угловой скоростью ω и, следовательно, с окружной линейной скоростью $U = \omega a$, а наружный цилиндр радиуса $r_2 = a + \delta$ (δ — толщина смазочного слоя) остаётся неподвижным. Для момента сил трения мы получим в этом случае формулу (15.5)

$$M = \frac{4\pi\mu\omega r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \tag{27.3}$$

величина δ всегда очень мала; поэтому мы имеем приближённо:

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) \approx 2a\delta,$$

отсюда

$$M = \frac{2\pi\mu\omega a^3}{\delta}.$$

Так как мы рассматриваем момент, отнесённый к единице длины цапфы, то площадь смоченной смазкой поверхности $F = 2\pi a$; введём далее вместо ω линейную скорость U, тогда предыдущая формула примет вид:

$$M = \mu aF\frac{U}{\delta}; \tag{27.4}$$

эта формула и должна заменять формулу (27.2) для случая трения смазанного подшипника. Из неё видно, в противоположность формуле (27.2), что момент сил трения не зависит от нагрузки на цапфу, но зато растёт вместе со скоростью U.

Однако всё это справедливо только в первом приближении. В самом деле, основное допущение Н. П. Петрова о том, что цапфу и подшипник можно рассматривать, как соосные цилиндры, не может соответствовать действительности, ибо при этом допущении силы трения будут распределены симметрично относительно оси цилиндра и очевидно, что главный вектор этих сил трения сведётся к нулю; это означает, что цапфа не может нести никакой нагрузки. Решение Н. П. Петрова соответствует, таким образом, случаю очень малой нагрузки.

Более общее решение мы получим, если примем, что цапфа расположена относительно подшипника эксцентрически, причём смазка может заполнять или всё пространство между цапфой и подшипником, или же часть этого пространства.

Мы рассмотрим, следуя А. Зоммерфельду, приближённое решение плоской задачи о смазке для случая, когда жидкость заполняет всё пространство между цапфой и подшипником, длину которых будем считать очень большой. В соответствии с этим под цапфой и подшипником будем понимать их сечения, нормальные к оси.

Пусть O обозначает центр цапфы C, O' — центр подшипника C' (рис. 170). Расстояние OO' обозначим через e и примем прямую OO' за ось полярных координат r, θ, а точку O — за центр этих полярных координат. Радиус цапфы C обозначим через a, внутренний радиус подшипника — через $a+\delta$. Уравнение окружности C' можно написать в виде

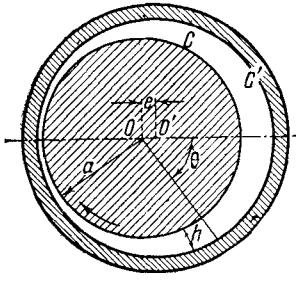

Рис. 170.

$$r = a + h,$$

причём с достаточной степенью точности можно принять, что

$$h = \delta + e\cos\theta,$$

как показывает простое геометрическое вычисление.

Обозначая, наконец, окружную скорость точек цапфы через U, легко можем написать следующие граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} v_r &= 0, \quad v_\theta = U \quad \text{при} \quad r = a, \\ v_r &= 0, \quad v_\theta = 0 \quad \text{»} \quad r = a + h. \end{aligned}\right\} \tag{27.5}$$

Примем теперь во внимание, что величина δ/a очень мала, отсюда следует, что величина $\partial v_\theta/\partial r$ будет очень велика в сравнении с величиной $1/r\,\partial v_\theta/\partial\theta$. В самом деле, v_θ изменяется от 0 до U на очень малом расстоянии h, имеющем порядок δ, поэтому производная $\partial v_\theta/\partial r$ имеет порядок U/δ, в то время как производная $\partial v_\theta/\partial\theta$ имеет порядок U, и следовательно, $1/r\,\partial v_\theta/\partial\theta$ имеет порядок U/a. Точно так же порядок производной $\partial^2 v_\theta/\partial r^2$ равен U/δ^2.

Рассмотрим теперь второе уравнение (5.14). В этом уравнении мы пренебрегаем, прежде всего, левой частью, определяющей инерционные члены; мы полагаем далее $F_\theta = 0$, так как считаем внешние силы отсутствующими или пренебрежимыми; наконец, из членов, содержащих множителем ν, мы сохраняем только первый, так как только он один будет иметь порядок U/δ^2, все же остальные члены будут иметь меньшие порядки. При этих допущениях рассматриваемое уравнение примет вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} = \mu\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}.$$

Мы можем, наконец, заменить в левой части r на a; тогда получим окончательно следующее простое уравнение:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}. \tag{27.6}$$

Мы будем считать левую часть не зависящей от r; тогда предыдущее уравнение легко может быть проинтегрировано по r. Удобнее, однако, ввести вместо r новую независимую переменную ζ, положив

$$r = a + \zeta;$$

в результате интегрирования уравнения (27.6), получим:

$$v_\theta = \frac{1}{2a\mu}\frac{\partial p}{\partial \theta}\zeta^2 + A\zeta + B,$$

где A и B — постоянные, не зависящие от ζ, но могущие зависеть от θ и определяющиеся из граничных условий (27.5):

$$v_\theta = U \text{ при } \zeta = 0, \quad v_\theta = 0 \text{ при } \zeta = h.$$

Таким образом мы получаем:

$$v_\theta = \frac{1}{2a\mu}\frac{\partial p}{\partial \theta}\zeta(\zeta - h) + \frac{U(h-\zeta)}{h}. \tag{27.7}$$

Через всякое сечение между цапфой и подшипником протекает одно и то же количество жидкости, которое мы обозначим через $Uh_0/2$:

$$\int_a^{a+h} v_\theta\, dr = \int_0^h v_\theta\, d\zeta = -\frac{1}{2a\mu}\frac{\partial p}{\partial \theta}\frac{h^3}{6} + \frac{Uh}{2} = \frac{Uh_0}{2}.$$

Отсюда находим равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{6a\mu U(h-h_0)}{h^3}, \\ &p(\theta) = p(0) + 6a\mu U\left\{\int_0^\theta \frac{d\theta}{h^2} - h_0\int_0^\theta \frac{d\theta}{h^3}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{27.8}$$

Но в случае замкнутого слоя смазки давление p должно быть непрерывной периодической функцией от угла θ, т. е. должно иметь место условие

$$p(2\pi) = p(0), \tag{27.9}$$

т. е.

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{h^2} = h_0\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{h^3}, \tag{27.10}$$

откуда находим h_0, после чего мы полностью будем знать v_θ и давление p, последнее, впрочем, с точностью до произвольного постоянного $p(0)$.

Введём обозначение

$$\alpha = \frac{\delta}{e} \quad (1 \leqslant \alpha \leqslant \infty); \tag{27.11}$$

тогда

$$h = e(\alpha + \cos\theta). \tag{27.12}$$

Положив ещё

$$I_k = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\alpha + \cos\theta)^k} = 2\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(\alpha + \cos\theta)^k},$$

будем иметь:

$$h_0 = e\frac{I_2}{I_3}. \tag{27.13}$$

Так как

$$\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\alpha + \cos\theta} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right),$$

то

$$I_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}.$$

Дифференцирование под знаком интеграла показывает, что

$$I_2 = -\frac{dI_1}{d\alpha} = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 - 1)^3}}; \qquad I_3 = -\frac{1}{2}\frac{dI_2}{d\alpha} = \frac{\pi(2\alpha^2 + 1)}{\sqrt{(\alpha^2 - 1)^5}}.$$

Из (27.13) найдём теперь, что

$$h_0 = \frac{2e\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2 + 1}. \tag{27.14}$$

В точках цапфы, характеризуемых углом θ_0, где давление имеет максимум или минимум, производная $\partial p/\partial\theta$ обращается в нуль, следовательно, по уравнению (27.8) $h = h_0$, т. е.

$$e(\alpha + \cos\theta_0) = \frac{2e\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2 + 1},$$

откуда

$$\cos\theta_0 = -\frac{3\alpha}{2\alpha^2 + 1}. \tag{27.15}$$

Таким образом, места наибольшего и наименьшего давления лежат на той половине цапфы, которая ближе к подшипнику.

Чтобы получить силу трения, применим формулу (5.15)

$$v_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right);$$

но на поверхности цапфы $v_\theta = U$, $v_r = 0$, поэтому формула упрощается:

$$p_{r\theta} = \mu\left\{\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} - \frac{U}{a}\right\} = -\frac{h}{2a}\frac{dp}{d\theta} - \frac{U\mu}{h} - \frac{U\mu}{a};$$

отбрасывая здесь последний член, малый по сравнению с предыдущим, и подставляя значение

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{6a\mu U(h-h_0)}{h^3} =$$

$$= \frac{6a\mu U}{e^2}\left[\frac{1}{(\alpha+\cos\theta)^2} - \frac{2\alpha(\alpha^2-1)}{2\alpha^2+1}\frac{1}{(\alpha+\cos\theta)^3}\right], \qquad (27.16)$$

получим:

$$p_{r\theta} = -\mu\frac{U(4h-3h_0)}{h^2} =$$

$$= -\frac{2\mu U}{e}\left[\frac{2}{\alpha+\cos\theta} - \frac{3\alpha(\alpha^2-1)}{2\alpha^2+1}\frac{1}{(\alpha+\cos\theta)^2}\right]. \qquad (27.17)$$

Чтобы получить нормальное давление p_{rr} на цапфе, воспользуемся первой из формул (5.15):

$$p_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r};$$

но из уравнения неразрывности (последнее из уравнений (5.14))

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r} = 0$$

следует, что на поверхности цапфы, где $v_r = 0$, $v_\theta = U$, будет

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = 0,$$

и поэтому нормальное давление на цапфе определяется величиной p.

Подсчитаем теперь, каковы будут силы гидродинамического воздействия на цапфу, причём будем все силы относить к единице длины цапфы. Из вышесказанного ясно, что на элемент $a\,d\theta$ будет действовать нормальная сила, направленная к центру цапфы и равная $ap(\theta)\,d\theta$, и касательная сила, направленная в сторону возрастания угла θ и равная $ap_{r\theta}(\theta)\,d\theta$. Главный момент этих сил относительно центра цапфы, считаемый положительным в направлении, противоположном направлению вращения цапфы, будет, очевидно, равен

$$M = -\int_0^{2\pi} p_{r\theta}(\theta)\,a^2\,d\theta = \frac{2\mu U a^2}{e}\left[2I_1 - \frac{3\alpha(\alpha^2-1)}{2\alpha^2+1}I_2\right] =$$

$$= \frac{2\mu U a^2}{e}\frac{2\pi(\alpha^2+2)}{(2\alpha^2+1)\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Легко видеть, что для двух точек, симметричных относительно оси OO', касательные силы имеют составляющие вдоль этой оси, одинаковые по величине, но противоположные по знаку; то же самое относится к переменной части нормальных сил

$$[p(\theta) - p(0)]\, a\, d\theta$$

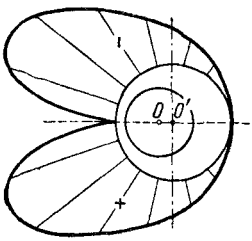

Рис. 171.

(рис. 171). Следовательно, главный вектор приложенных к поверхности цапфы сил, который мы обозначим через P, имеет направление, перпендикулярное к прямой OO'. Считая P положительным, когда направление главного вектора получается из направления OO' поворотом навстречу вращению цапфы, мы будем иметь:

$$P = \int_0^{2\pi} pa \sin\theta\, d\theta - \int_0^{2\pi} p_{r\theta} a \cos\theta\, d\theta.$$

Но

$$\int_0^{2\pi} p \sin\theta\, d\theta = -\int_0^{2\pi} p\, d\cos\theta =$$

$$= -p\cos\theta \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos\theta \frac{dp}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta \frac{dp}{d\theta} d\theta.$$

Поэтому

$$P = a \int_0^{2\pi} \left(\frac{dp}{d\theta} - p_{r\theta}\right) \cos\theta\, d\theta.$$

Здесь можно пренебречь величиной $p_{r\theta}$ по сравнению с $dp/d\theta$, ибо последняя величина содержит, как показывает формула (27.16), малую величину e в знаменателе во второй степени, в то время как $p_{r\theta}$ содержит эту величину только в первой степени.

Итак:

$$P = a \int_0^{2\pi} \frac{dp}{d\theta} \cos\theta\, d\theta = a \int_0^{2\pi} \frac{dp}{d\theta} (\alpha + \cos\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{6a^2\mu U}{e^2}\left[I_1 - \frac{2\alpha(\alpha^2-1)}{2\alpha^2+1} I_2\right] = \frac{12\pi\mu a^2 U}{e^2(2\alpha^2+1)\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Исследуем полученные формулы

$$M = \frac{4\pi\mu U a^2 \alpha(\alpha^2+2)}{\delta(2\alpha^2+1)\sqrt{\alpha^2-1}}; \qquad P = \frac{12\pi\mu U a^2\alpha^2}{\delta^2(2\alpha^2+1)\sqrt{\alpha^2-1}}. \qquad (27.18)$$

Видно, что как P, так и M прямо пропорциональны как коэффициенту вязкости μ, так и окружной линейной скорости U. Считая известными μ, U, a, δ и P, мы по второй из предыдущих формул определим α, а следовательно, и эксцентриситет $e = \delta/\alpha$, после чего первая формула определит M. Введём безразмерную величину

$$f = \frac{M}{Pa},$$

являющуюся для закона сухого трения коэффициентом этого трения. В нашем случае

$$f = \frac{M}{Pa} = \frac{\delta}{a}\frac{\alpha^2+2}{3\alpha}. \tag{27.19}$$

При значениях α, близких к единице, коэффициент f имеет значение, близкое к

$$f_0 = \frac{\delta}{a}.$$

Но из (27.18) ясно, что значениям α, близким к единице, соответствуют малые значения скорости U, точнее, величины

$$\frac{\mu U a^2}{\delta^2 P}. \tag{27.20}$$

Таким образом, в случае малых скоростей гидродинамическая теория смазки приводит к формуле

$$M = Paf_0, \tag{27.21}$$

аналогичной закону сухого трения (27.2).

Напротив, в случае очень больших значений α значения величины (27.20) должны быть велики; в то же время из (27.18) простым предельным переходом получим для момента сил трения выражение

$$M = \frac{2\pi\mu U a^2}{\delta}, \tag{27.22}$$

совпадающее с формулой (27.4) Н. П. Петрова.

Минимальное значение f получится, как это легко установить из формулы (27.19), при $\alpha = \sqrt{2}$, тогда

$$f_{\min} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\delta}{a} = 0{,}943 f_0;$$

соответствующие же значения U и P связаны соотношением

$$\frac{\mu U a^2}{\delta^2 P} = \frac{5}{24\pi} = 0{,}0663.$$

Более строгое решение рассмотренной задачи было дано в работе Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина, рассмотревших плоскую задачу о движении вязкой жидкости в области между двумя эксцен-

трически расположенными окружностями при единственном предположении о том, что в уравнениях гидромеханики можно пренебречь инерционными членами. Для случая, когда радиусы окружностей отличаются друг от друга на весьма малую величину, их решение переходит в только что рассмотренное приближенное решение.

Нужно отметить, что разобранный выше простейший случай полного заполнения жидкостью области между цапфой и подшипником представляет простейшую схему явления и не позволяет полностью осветить его, тем более, что мы ограничились только плоской задачей.

Г. ПРИБЛИЖЁННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В СЛУЧАЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА

§ 28. Общая характеристика течений при больших числах Рейнольдса. Вывод основных уравнений теории пограничного слоя. Нами было уже указано, что приближённые методы решения уравнений движения вязкой жидкости были развиты только в двух случаях, а именно, в случае очень малых чисел Рейнольдса и, наоборот, в случае очень больших чисел Рейнольдса. В предыдущем разделе этой главы мы рассмотрели подробно методы, относящиеся к случаю движений с малыми числами Рейнольдса. Обратимся теперь к изучению методов исследования движений с большими числами Рейнольдса. Большие числа Рейнольдса получаются, когда характерная длина l велика, или когда характерная скорость V велика, или же когда кинематическая вязкость ν мала.

Казалось бы, в этом случае мы должны получить очень хорошее приближение, целиком отбрасывая силы вязкости, пропорциональные коэффициенту кинематической вязкости ν. Однако так делать нельзя, потому что при этом получаются уравнения Эйлера движения идеальной жидкости, решения которых не могут, вообще говоря, удовлетворить тем граничным условиям прилипания к стенкам, которые мы имеем для случая вязкой жидкости, движущейся хотя бы и при очень больших числах Рейнольдса.

Отсюда можно сделать вывод, что при больших числах Рейнольдса главное воздействие сил вязкости будет проявляться около стенок, ограничивающих жидкость; понятно, что частицы жидкости, побывавшие около стенок, попадая при дальнейшем своём движении внутрь жидкости, могут распространить эти воздействия сил вязкости на внутренние области жидкости. Мы можем, однако, ожидать, что во всей той области внутри жидкости, в которую не попадают частицы жидкости, побывавшие около стенок, движение жидкости будет мало отличаться от движения идеальной жидкости и с очень большим приближением может быть принято за движение идеальной жидкости. Остаётся определить характер течения жидкости в непо-

средственной близости стенок и в той области, которая заполнена частицами, побывавшими у стенок. К сожалению, мы не имеем пока полной теории этого вопроса.

Одна из первых работ на эту тему относится к 1904 г. и принадлежит Л. Прандтлю [1]). В результате развития идей Прандтля возникла теория, носящая название теории пограничного слоя, изложению основ которой и будет посвящён этот раздел.

Иначе подошёл к той же самой проблеме движений вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса Осеен [2]). Он поставил вопрос о том, во что переходит движение вязкой жидкости, если число Рейнольдса R устремить к бесконечности. Однако Осеен смог дать ответ на этот вопрос только для того случая, когда исходные уравнения Навье — Стокса берутся в упрощённом виде, и в этом состоит недостаток его теории, носящей название *теории исчезающей вязкости*. Полное изложение теории Осеена потребовало бы много места; поэтому мы ограничимся несколько упрощённой трактовкой этой теории (см. § 37 и далее).

Прежде чем переходить к выводу дифференциальных уравнений теории пограничного слоя, мы остановимся несколько на выяснении общего характера течений вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса. Для определённости будем рассматривать задачу об обтекании цилиндрического твердого тела потоком, имеющим на бесконечности заданную скорость V (рис. 172).

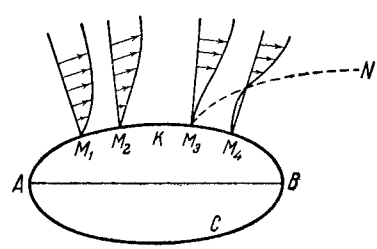

Рис. 172.

Если бы мы могли совсем пренебречь силами вязкости, то мы получили бы потенциальное обтекание тела потоком идеальной жидкости. В точках контура C нормальная составляющая скорости этого потока обращается в нуль, касательная же составляющая отлична от нуля. Но в течении вязкой жидкости как касательная, так и нормальная составляющие скорости должны в точках контура C обращаться в нуль. Принимая ещё во внимание, что при больших числах Рейнольдса в некотором отдалении от контура C течение жидкости мало отличается от течения идеальной жидкости, мы приходим к заключению, что распределение касательной составляющей скорости вдоль нормали к контуру C должно иметь вид (см. рис. 172) кривой, относящейся к точке M_1. Эта кривая показывает, что каса-

[1]) Prandtl L., Ueber Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlungen der dritten Internat. Math. Kongr. in Heidelberg 1904, Leipzig, 1905; имеется русский перевод.

[2]) Oseen C. W., Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik, Leipzig, 1927.

тельная скорость, равная нулю в точке M_1, для точек, расположенных на нормали к контуру, постепенно увеличивается и, наконец, на некотором расстоянии от контура принимает значение, очень мало отличающееся от значения, соответствующего потенциальному течению идеальной жидкости. Как мы увидим далее, при больших числах Рейнольдса, переход от нулевой скорости на контуре C к скорости, мало отличающейся от скорости потенциального течения идеальной жидкости, совершается в очень тонком слое жидкости, который и носит наименование пограничного слоя.

Как мы знаем, силы вязкости тем больше, чем больше соответствующие изменения скорости. Так как в пограничном слое происходит быстрое изменение касательной составляющей скорости от нуля до величины порядка V, то силы вязкости в пограничном слое могут получать значительную величину. Таким образом, главное воздействие сил вязкости будет иметь место около стенок: на далёких же от стенок расстояниях силы вязкости будут очень малы.

Мы можем поэтому представить себе схематически картину течения вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса следующим образом. Всю область течения мы разбиваем на две части, а именно на тонкий пограничный слой вблизи тела и на остающуюся область течения, в которой течение можно считать совпадающим с потенциальным течением идеальной жидкости. В пограничном же слое мы будем учитывать также и силы вязкости; однако, то обстоятельство, что толщина пограничного слоя очень мала, позволяет сильно упростить уравнения Навье — Стокса; в результате такого упрощения мы получим уравнения Прандтля, решения которых тем менее будут отличаться от точных решений уравнений движения вязкой жидкости, чем больше будет число Рейнольдса и чем, следовательно, меньше будет толщина пограничного слоя.

Необходимо, однако, обратить внимание на то, что частицы, побывавшие у стенок тела, могут в дальнейшем попасть внутрь жидкости; так как внутри пограничного слоя мы имеем сильно завихренное движение жидкости, то при этом внутрь жидкости попадают вихри, образовавшиеся в пограничном слое; происходит, как говорят, *отрыв вихрей*.

Причины такого отрыва вихрей лежат в следующем. Пусть для определённости выпуклый контур C имеет симметричную форму относительно прямой AB, имеющей направление скорости на бесконечности, и пусть циркуляция потока отсутствует. Тогда в потенциальном течении идеальной жидкости касательная скорость будет возрастать от нуля в точке A до максимальной скорости в точке K и затем будет убывать до нулевой скорости в точке B. В соответствии с этим, согласно уравнению Бернулли, $p + \rho v^2/2 = \text{const}$., давление будет убывать от точки A до точки K и затем возрастать от точки K до точки B. Как увидим в дальнейшем, распределение

давления в пограничном слое очень мало отличается от распределения давления по контуру C в потенциальном течении идеальной жидкости. Иначе будет обстоять дело с распределением скоростей. Ясно, что силы вязкости приводят к некоторому затормаживанию частиц жидкости в пограничном слое. Поэтому, попадая в область задней части тела, где давление возрастает, частицы начинают получать ускорение в направлении от точки B к точке K и в результате касательная скорость этих частиц обращается в нуль где-то на линии M_3N, проходящей между точками K и B. В области BM_3N касательная скорость частиц получает обратный знак, т. е. возникает возвратное движение жидкости, результатом которого является срыв завихренных частиц с поверхности тела и унос их внутрь жидкости. Теория пограничного слоя не даёт возможности проследить, как меняется в этом случае характер течения в области BM_3N, прилегающей к задней части тела.

Следует, таким образом, различать два случая.

Если мы имеем дело с телом, имеющим очень плавные очертания контура, то возможно, что срыва вихрей происходить не будет. В этом случае мы можем сказать, что вне тела имеет место потенциальное течение идеальной жидкости, и действие сил вязкости сказывается только в пограничном слое.

Если же условия обтекания таковы, что с тела срываются вихри, то за телом образуется вихревая зона; что касается пограничного слоя, то мы можем теоретически рассмотреть только ту часть его, которая простирается до места отрыва вихрей.

Сделаем ещё одно общее замечание. Течение жидкости внутри пограничного слоя может быть или ламинарным или турбулентным, в зависимости от значений числа Рейнольдса и от условий обтекания тела, например, от степени гладкости или шероховатости контура и т. п. Мы будем рассматривать только ламинарные течения; некоторые соображения о турбулентном пограничном слое будут изложены в следующей главе, посвящённой турбулентности.

Перейдём теперь к выводу дифференциальных уравнений Прандтля, определяющих течение в пограничном слое, причём рассмотрим для определённости случай течения вязкой жидкости вдоль пластинки.

Мы будем, таким образом, иметь дело с плоско-параллельным течением жидкости; предположим, что внешние силы отсутствуют. Тогда основные уравнения гидромеханики (5.1) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right),\\ \frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right),\\ \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}&=0. \end{aligned}\right\} \quad (28.1)$$

Дифференциальные уравнения Прандтля получаются в результате надлежащего упрощения предыдущих уравнений. В основе этого упрощения лежит сравнение различных членов уравнений (28.1) по их относительной величине. Как мы уже указывали, толщина пограничного слоя, которую мы будем обозначать буквой δ, очень мала (см. рис. 173); это выражение нужно, конечно, понимать так, что мало отношение $\delta : l$, где l есть характерный размер для рассматриваемой задачи. Отметим попутно, что толщина δ в разных точках контура и в разные моменты времени может быть различна, так что δ есть функция от x и t. Кроме того, нужно отметить, что самое понятие толщины пограничного слоя имеет несколько неопределённый характер, поскольку в действительности нет никакой резкой границы, отделяющей область пограничного слоя от внешней области, в которой силы вязкости совсем не учитываются. Однако мы увидим, что эта неопределённость понятия толщины пограничного слоя не повлияет на окончательный вид уравнений Прандтля. В следующем параграфе мы дадим иной вывод этих уравнений, свободный от только что указанного недостатка, сейчас же мы будем следовать Прандтлю.

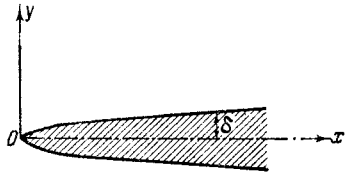

Рис. 173.

Составляющая v_x может иметь на внешней границе пограничного слоя различные значения, но все эти значения будут иметь один и тот же порядок, а именно V, где V есть характерная скорость рассматриваемого течения. На стенке эта составляющая обращается в нуль. Рассматривая изменение v_x в зависимости от координаты y, мы видим, что при изменении y от 0 до δ значение v_x изменяется от нуля до величины порядка V. Но отсюда следует, что среднее значение $\partial v_x/\partial y$ в точках внутри пограничного слоя имеет порядок V/δ. Точно так же придем к заключению, что $\partial^2 v_x/\partial y^2$ имеет внутри пограничного слоя порядок V/δ^2. Порядок производных по координате x мы можем оценить, учитывая, что составляющая скорости v_x при перемещении точки параллельно контуру C на отрезок порядка характерной длины l может испытать изменение порядка V; поэтому величина $\partial v_x/\partial x$ имеет порядок V/l, а величина $\partial^2 v_x/\partial x^2$ — порядок V/l^2.

Но тогда из последнего уравнения системы (28.1)

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

следует, что $\partial v_y/\partial y$ тоже имеет порядок V/l. А так как при $y = 0$ значение v_y вследствие условия прилипания равно нулю, то из ра-

венства

$$v_y = \int_0^y \frac{\partial v_y}{\partial y}\, dy$$

найдём, что v_y внутри пограничного слоя будет иметь порядок $V\delta/l$. Далее, для величины $\partial v_y/\partial x$ находим порядок $V\delta/l^2$, для $\partial^2 v_y/\partial x^2$ порядок $V\delta/l^3$ и, наконец, для $\partial^2 v_y/\partial y^2$ порядок $V/l\delta$.

Ясно теперь, что в первом из уравнений (28.1) мы можем отбросить член $\partial^2 v_x/\partial x^2$ порядка V/l^2 как малый по сравнению с членом $\partial^2 v_x/\partial y^2$, имеющим порядок V/δ^2, ибо отношение $\frac{V}{l^2} : \frac{V}{\delta^2} = \left(\frac{\delta}{l}\right)^2$ есть квадрат малой величины.

Итак, первое уравнение системы (28.1) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \qquad (28.2)$$

Второй и третий члены слева имеют, как показывает простой подсчёт, один и тот же порядок V^2/l, второй же член справа имеет порядок $\nu V/\delta^2$. Отношение сил вязкости к силам инерции имеет, таким образом, порядок:

$$\frac{\nu V}{\delta^2} : \frac{V^2}{l} = \frac{\nu l}{V\delta^2} = \frac{\nu}{lV}\left(\frac{l}{\delta}\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{R}\left(\frac{\delta}{l}\right)^2}.$$

Прандтль принимает, что внутри пограничного слоя силы вязкости и силы инерции имеют одинаковый порядок: но тогда величина $\mathrm{R}\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 = \frac{V\delta^2}{\nu l}$ должна иметь порядок единицы; иными словами, величина δ/l должна иметь порядок $1/\sqrt{\mathrm{R}}$. Мы получаем, таким образом, первый результат теории пограничного слоя: *образующийся при течениях с большими числами Рейнольдса* R *пограничный слой имеет толщину* δ, *порядок которой равен* $l/\sqrt{\mathrm{R}}$, т. е. $\sqrt{\frac{l\nu}{V}}$.

Приведём простой численный пример: возьмём $l = 1$ *м* $= 100$ *см*, $V = 1$ *м/сек* $= 100$ *см/сек*, $\nu = 0{,}01$ *см*^{2}*/сек* (вода при 20° С), тогда $\sqrt{\frac{l\nu}{V}} = 0{,}1$ *см* $= 1$ *мм*. Как видно, толщина образующегося пограничного слоя очень мала.

В уравнение (28.2) входят ещё члены $\partial v_x/\partial t$ и $(1/\rho)\,\partial p/\partial x$; мы будем предполагать, что изменение течения со временем, если оно происходит, совершается столь плавно, что порядок $\partial v_x/\partial t$ не превосходит порядка V^2/l, тогда член $(1/\rho)\,\partial p/\partial x$ сам собою должен будет иметь тот же порядок V^2/l.

Переходим теперь к рассмотрению второго из уравнений (28.1). Мы без всякого труда найдём, что порядок левой части этого уравнения равен $V^2\delta/l^2$. Точно так же для порядка сил вязкости, входящих в правую часть этого уравнения, найдём, по вышесказанному, выражение $\nu V/l\delta$, имеющее, по сделанному выше допущению Прандтля, тот же порядок, что и выражение $V^2\delta/l^2$.

Мы видим теперь из второго уравнения (28.1), что $(1/\rho)\,\partial p/\partial y$ имеет порядок $V^2\delta/l^2$ в то время, как $(1/\rho)\,\partial p/\partial x$ имеет порядок V^2/l. Но это означает, что градиент давления в направлении нормали к контуру очень мал в сравнении с обычными значениями градиента давления. Поэтому можно с большой степенью точности заменить второе уравнение системы (28.1) простым уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{28.3}$$

Мы получаем таким образом второй результат теории пограничного слоя: *давление внутри пограничного слоя не меняется вдоль нормали к контуру тела и равняется, следовательно, тому давлению, которое имеет место на внешней границе пограничного слоя в рассматриваемом месте.* В предыдущем параграфе мы уже воспользовались этим результатом при рассмотрении качественного характера течений вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса.

Итак, задача определения течения вязкой жидкости в пограничном слое свелась к решению следующей системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{28.4}$$

Здесь v_x и v_y суть неизвестные функции от x, y и t, а p есть заданная функция от x и t.

Если можно принять, что вне пограничного слоя течение жидкости есть потенциальное течение идеальной жидкости, то $p(x, t)$ совпадает со значениями давления этого течения на внешней границе пограничного слоя, а так как толщина пограничного слоя очень мала, то за $p(x, t)$ можно взять просто значения давления этого течения в точках самого контура C. Если же с тела срываются вихри и последние сильно видоизменяют картину течения пограничного слоя, то приходится p брать на основе экспериментальных данных.

Функции v_x и v_y должны удовлетворять следующим граничным условиям: во-первых, на стенке должно выполняться условие прилипания

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \tag{28.5}$$

и, во-вторых, на внешней границе пограничного слоя, т. е. при $y=\delta$, составляющая v_x должна переходить в соответствующую составляющую $\bar{v}_x$ скорости течения вне пограничного слоя. Как выше в случае давления, можно за $\bar{v}_x$ принять составляющую скорости в точках самого контура C: для краткости мы обозначим эту составляющую через $U(x)=(\bar{v}_x)_C$. Кроме того, ввиду неизвестности δ, мы можем потребовать выполнения граничного условия при $y=\infty$ вместо $y=\delta$, т. е. потребовать, чтобы v_x асимптотически приближалось к U. Тогда при $y=\delta$ величина v_x будет очень мало отличаться от $\bar{v}_x=U$, и мы получаем такое граничное условие:

$$v_x=U \quad \text{при} \quad y\to\infty. \tag{28.6}$$

Наконец, в случае неустановившегося движения нужно принимать ещё во внимание начальные условия: при $t=0$ v_x должно приводиться к заданной функции от x и y.

§ 29. Вывод Мизеса. Уравнение Мизеса. Дадим теперь вывод основных уравнений Прандтля, основная идея которого принадлежит Мизесу [1]). Этот вывод носит более формальный, но в то же время более строгий характер. Из него ясно вытекает, что уравнения Прандтля являются предельной формой уравнений гидромеханики вязкой жидкости, получающейся при определённых условиях при устремлении числа Рейнольдса R к бесконечности.

При этом выводе нет никакой необходимости ограничиваться случаем прямолинейного контура. Итак, положим, что мы имеем дело с обтеканием криволинейного контура C.

Мы будем исходить из тех же основных уравнений гидромеханики (5.1), что и в предыдущем параграфе, только напишем их в безразмерном виде. А именно, если l есть характерная длина, а V — характерная скорость, то мы введём новые безразмерные величины формулами:

$$\left.\begin{aligned} x=l\bar{x},\quad y=l\bar{y},\quad t=\frac{l}{V}\bar{t},\\ v_x=V\bar{v}_x,\quad v_y=V\bar{v}_y,\quad p=\rho V^2\bar{p},\quad \nu=\frac{lV}{\mathsf{R}}. \end{aligned}\right\} \tag{29.1}$$

После подстановки этих значений в формулы (5.1) и сокращения обеих частей двух первых уравнений этой системы на V^2/l, а по-

[1]) Mises R., Bemerkungen zur Hydrodynamik, Zeitschr. für angew. Math. und Mech., 7 (1927), стр. 425—431 и дискуссия по поводу этой статьи между Прандтлем и Мизесом в том же журнале, 8 (1928), стр. 249—252.

следнего уравнения — на V/l, легко получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\mathsf{R}}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right),\\
\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}&=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\mathsf{R}}\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right),\\
\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}&=0,
\end{aligned}\right\} \tag{29.2}$$

отбросив, для простоты, чёрточки над буквами.

Итак, уравнения гидромеханики, написанные в безразмерном виде, сохраняют свой вид, только плотность ρ заменяется при этом на 1, а кинематический коэффициент вязкости ν — на $1/\mathsf{R}$, где R — число Рейнольдса.

Пусть теперь q_1 и q_2 — криволинейные ортогональные координаты, а H_1 и H_2 — соответствующие коэффициенты Ламэ. Напишем уравнения (29.2) в криволинейных координатах q_1 и q_2, для чего воспользуемся общими формулами § 5. В результате мы получим систему из трёх уравнений, первым из которых будет

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}+\frac{v_2}{H_1H_2}\left(v_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-v_2\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)=\\
&\quad=-\frac{1}{H_1}\frac{\partial p}{\partial q_1}+\frac{1}{\mathsf{R}}\left[\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial q_1^2}+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial q_2^2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial\left(\frac{H_2}{H_1}\right)}{\partial q_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\right.\\
&\quad+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial\left(\frac{H_1}{H_2}\right)}{\partial q_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}+\frac{2}{H_1^2H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_1}-\frac{2}{H_1H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_2}+\\
&\quad+\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)v_1+\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)v_1+\\
&\quad\left.+\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)v_2-\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)v_2\right],
\end{aligned} \tag{29.3'}$$

а вторым и третьим —

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_2}{\partial t}+\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_2}-\frac{v_1}{H_1H_2}\left(v_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-v_2\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)=\\
&\quad=-\frac{1}{H_2}\frac{\partial p}{\partial q_2}+\frac{1}{\mathsf{R}}\left[\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial q_1^2}+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial q_2^2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial\left(\frac{H_2}{H_1}\right)}{\partial q_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1}+\right.\\
&\quad+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial\left(\frac{H_1}{H_2}\right)}{\partial q_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_2}-\frac{2}{H_1^2H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\frac{2}{H_1H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}+
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)v_2+\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)v_2-$$
$$-\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)v_1+\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)v_1\Big], \qquad (29.3'')$$

$$H_2\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+H_1\frac{\partial v_2}{\partial q_2}+v_1\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+v_2\frac{\partial H_1}{\partial q_2}=0. \qquad (29.3''')$$

Выберем теперь следующую систему криволинейных ортогональных координат (рис. 174). Проведём в точках контура C нормали к C, и пусть нормаль через произвольную точку M, лежащую вблизи контура C, пересекает этот контур в точке N. Выбрав на контуре C определённую точку O за начало отсчёта дуг, будем определять положение точки M координатами $q_1=s$ и $q_2=n$, где s и n суть взятые с надлежащими знаками длины дуги кривой ON и отрезка нормали NM. Возьмём соседнюю с M точку M' и вычислим расстояние $d\sigma$ между точками M и M'. Бесконечно близкие нормали MN и $M'N'$ пересекаются в центре кривизны K кривой C, соответствующем точке N. Обозначим радиус кривизны кривой C в точке N через $r(s)$ и предположим, что $r(s)$ есть непрерывная функция от s вместе со своей первой производной.

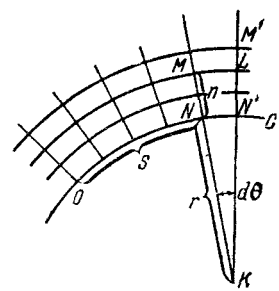

Рис. 174.

Так как, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, мы имеем:

$$d\sigma^2=ML^2+LM'^2, \quad LM'=dn, \quad ML=[r(s)+n]\,d\theta,$$
$$NN'=ds=r(s)\,d\theta, \quad ML=\frac{r(s)+n}{r(s)}\,ds,$$

то

$$d\sigma^2=\left[1+\frac{n}{r(s)}\right]^2ds^2+dn^2,$$

и следовательно,

$$H_1=1+\frac{n}{r(s)}, \quad H_2=1. \qquad (29.4)$$

Сделаем, наконец, последнее преобразование. Положим, чтобы не вводить новые буквы

$$\left.\begin{aligned} q_1&=s=x, & q_2&=n=\frac{y}{\sqrt{R}},\\ v_1&=v_s=v_x, & v_2&=v_n=\frac{v_y}{\sqrt{R}},\\ H_1&=1+\frac{y}{\sqrt{R}r(x)}, & H_2&=1. \end{aligned}\right\} \qquad (29.5)$$

Таким образом, теперь уже x означает расстояние между точками O и N, измеренное по кривой линии C (следует помнить, что за единицу расстояния принята длина l), y же означает расстояние точки M от контура C, увеличенное в $\sqrt{\mathrm{R}}$ раз; точно так же v_y есть проекция скорости на нормаль, увеличенная в $\sqrt{\mathrm{R}}$ раз.

Вставим теперь значения (29.5) в уравнения (29.3), обе части среднего из которых мы поделим на $\sqrt{\mathrm{R}}$ и найдём, *какую предельную форму они получат, если мы устремим* R *к бесконечности, считая при этом величины* v_x, v_y, p *и их первые и вторые производные по* t, x *и* y *конечными*. Легко видеть, что большинство членов уравнений (29.3) будет содержать множителями некоторые целые положительные степени $1/\sqrt{\mathrm{R}}$. В пределе все эти члены обратятся в нуль, и мы получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{29.6}$$

Мы будем считать, что вне пограничного слоя происходит обтекание контура C потенциальным потоком. Но при $\mathrm{R}\to\infty$ весь пограничный слой прижимается к контуру C; это видно из того, что по формулам (29.5) всякому конечному y соответствует значение n, сколь угодно малое при достаточно большом R.

Пусть в точках контура C для потенциального потока давление имеет значение $p(x, t)$, а скорость — значение $U(x, t)$. Тогда мы можем считать, что при $y\to\infty$ решение уравнений (29.6) должно удовлетворять граничным условиям:

$$\lim_{y\to\infty} p = p(x, t), \qquad \lim_{y\to\infty} v_x = U(x, t),$$

но по среднему из уравнений (29.6) p не зависит от y; следовательно, во всём пограничном слое p имеет значение $p(x, t)$.

Итак, мы приходим к следующей системе для определения v_x и v_y:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{29.7}$$

где $p(x, t)$ берётся из потенциального потока, обтекающего контур C; кроме того, должны выполняться пограничные условия

$$\left.\begin{aligned} v_x = v_y = 0 \quad &\text{при} \quad y = 0, \\ v_x = U(x, t) \quad &\text{»} \quad y \to \infty \end{aligned}\right\} \tag{29.8}$$

и, если речь идёт о неустановившемся движении, — также ещё и начальные условия.

Вернёмся теперь к первоначальным размерным координатам (29.1), т. е. заменим x на x/l, y на $y\sqrt{\mathsf{R}}/l$, t на Vt/l, v_x на v_x/V, v_y на $v_y\sqrt{\mathsf{R}}/V$, p на $p/\rho V^2$ и R на lV/ν.

Тогда вместо системы (29.7) мы получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{29.9}$$

вполне тождественную с уравнениями Прандтля. Напомним ещё раз, что в этой системе y означает расстояние какой-либо точки пограничного слоя от контура C, измеряемое по нормали к C, а x есть расстояние от основания этой нормали до начальной точки контура C, измеряемое вдоль этой кривой.

Приведённый в этом параграфе вывод показывает вполне чётко, что уравнения Прандтля являются предельной формой уравнений Навье — Стокса при $\mathsf{R} \to \infty$. Необходимо, однако, отметить следующее обстоятельство. При очень больших числах Рейнольдса движение вязкой жидкости имеет обычно турбулентный характер. С этой точки зрения может показаться, что предельный переход $\mathsf{R} \to \infty$ не может иметь физического смысла. На самом деле это не так, а именно: пусть число Рейнольдса R_k, характеризующее переход ламинарной формы течения в турбулентную, очень велико, тогда для больших чисел Рейнольдса R, не превосходящих R_k, мы с очень большим приближением можем считать верными уравнения Прандтля, так как эти уравнения отличаются от точных уравнений членами порядка $1/\sqrt{\mathsf{R}}$, малыми при больших R.

Для чисел же Рейнольдса R, превосходящих R_k, пограничный слой становится турбулентным, и к нему уже нельзя применять уравнения (29.9); теория турбулентного пограничного слоя будет затронута в главе о турбулентности.

Для случая установившегося движения Мизес свёл систему уравнений (29.9) к одному нелинейному уравнению в частных производных второго порядка типа уравнения теплопроводности. В основе вывода уравнения Мизеса лежит введение новых независимых переменных и новой функции.

Последнее из уравнений (29.9) показывает, что можно принять

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{29.10}$$

где $\psi(x, y)$ есть функция тока, причём можно считать, что на контуре C ψ обращается в нуль. Возьмём теперь за новые независимые переменные x и ψ и преобразуем уравнение

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{29.11}$$

к этим новым независимым переменным. Функции v_x и v_y, выраженные в новых переменных x и ψ, обозначим для ясности через $\bar{v}_x$ и $\bar{v}_y$, так что

$$v_x(x, y) = \bar{v}_x(x, \psi); \qquad v_y(x, y) = \bar{v}_y(x, \psi).$$

Теперь ясно, что, рассматривая v_x и v_y как сложные функции от x и y, мы будем иметь:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = v_x \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \psi}\right) = \bar{v}_x \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}\left(\frac{\bar{v}_x^2}{2}\right).$$

Подставляя эти значения в уравнение (29.11), получим:

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu \bar{v}_x \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}\left(\frac{\bar{v}_x^2}{2}\right).$$

По условию, нам должна быть известна функция $p(x)$. Эта функция связана с $U(x)$ интегралом Бернулли:

$$p + \frac{\rho U^2}{2} = \text{const}, \tag{29.12}$$

имеющим место в потенциальном течении вне пограничного слоя. Мы имеем таким образом уравнение

$$\frac{\partial \bar{v}_x^2}{\partial x} = \frac{dU^2}{dx} + \nu \bar{v}_x \frac{\partial^2 \bar{v}_x^2}{\partial \psi^2}. \tag{29.13}$$

Поэтому, если мы введём новую неизвестную функцию

$$z(x, \psi) = U^2 - \bar{v}_x^2, \tag{29.14}$$

так что

$$\bar{v}_x = \sqrt{U^2 - z},$$

го уравнение примет очень простой вид:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \nu \sqrt{U^2 - z}\, \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}. \tag{29.15}$$

Это и есть уравнение Мизеса. Найдём ещё, каким пограничным условиям должно удовлетворять решение этого уравнения. На контуре, т. е. при $\psi = 0$, составляющая скорости v_x обращается в нуль, следовательно, вследствие (29.14) имеем

$$z = U^2(x) \quad \text{при} \quad \psi = 0.$$

На внешней границе пограничного слоя, т. е. в наших новых независимых переменных при $\psi = \infty$, составляющая v_x должна переходить в $U(x)$; поэтому получаем второе пограничное условие:

$$z \to 0 \quad \text{при} \quad \psi \to \infty.$$

Наконец, если мы знаем распределение составляющей $v_x(x, y)$ при $x = 0$, т. е. знаем функцию $v_x(0, y)$, то нетрудно будет вычислить и значение функции $z(0, \psi)$. В самом деле, первое из уравнений (29.10) определяет ψ через y равенством

$$\psi(0, y) = \int_0^y v_x(0, y)\, dy;$$

решив это уравнение, мы найдём зависимость y от ψ, после чего по формуле (29.14) получим:

$$z(0, \psi) = U^2(0) - v_x^2(0, y).$$

Таким образом решение уравнения (29.15) должно удовлетворять таким трём пограничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} z &= U^2(x) && \text{при} && \psi = 0, \\ z &= 0 && \text{»} && \psi = \infty, \\ z &= z(0, \psi) && \text{»} && x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{29.16}$$

Найдя $z(x, \psi)$, мы определим $\bar{v}_x(x, \psi)$ из уравнения (29.14)

$$\bar{v}_x(x, \psi) = \sqrt{U^2 - z}, \tag{29.17}$$

после чего из первого уравнения (29.10) можем определить $y(x, \psi)$:

$$y = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{v_x} = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{U^2 - z}}. \tag{29.18}$$

Решая это последнее уравнение относительно ψ, мы получим функцию тока $\psi(x, y)$, т. е. окончательно решим задачу.

§ 30. Интегральное соотношение Кармана и его обобщения. При детальном изучении какого-либо движения жидкости приходится всегда исходить из дифференциальных уравнений движения жидкости. Но если мы хотим рассматривать движение только в общих чертах, то тут часто большую помощь оказывают общие теоремы гидромеханики, а именно закон количеств движения, закон моментов количеств движения и закон энергии.

Настоящий параграф будет посвящён применению закона количеств движения к теории пограничного слоя.

Для ясности мы будем исходить сначала из основных уравнений теории пограничного слоя (29.9). При этом мы введём в рассмотрение толщину пограничного слоя δ. Мы знаем уже, что понятие толщины пограничного слоя есть несколько неопределённая величина, так как в пограничном слое скорость v_x изменяется от нуля на контуре C до скорости U, имеющей место в потенциальном потоке, асимптотически приближаясь к этой последней величине (рис. 175). Можно было бы, например, определять δ как то расстояние от контура C, на котором величина v_x отличается от U на 1%. Для нас будет несущественно то или иное определение величины δ, лишь бы при этом соблюдались следующие два условия: во-первых, скорость v_x при $y=\delta$ должна мало отличаться от скорости U (т. е. разность $v_x - U$ должна быть мала в сравнении с характерной скоростью V), и, во-вторых, значение производной $\partial v_x/\partial y$ должно быть мало (опять-таки в сравнении с V/l). Наиболее точным с математической стороны представляется введение так называемой *толщины вытеснения* δ^*, определяемой условием:

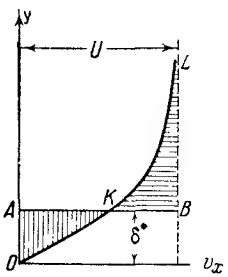

Рис. 175.

$$\int_0^\infty (U - v_x)\,dy = \delta^* U. \tag{30.1}$$

Если прямая AB на рис. 175 пересекает кривую распределения скоростей OKL так, что площадь OAK равна площади KBL, то ясно, что $\delta^* = OA$. Ясно, что в общем случае δ^* будет функцией от x и t.

Проинтегрируем теперь обе части первого из уравнений (29.9) по y в пределах от 0 до δ и рассмотрим по отдельности все получающиеся при этом члены. Мы имеем прежде всего по правилу дифференцирования интегралов с переменными пределами:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta v_x\,dy = \int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial t}\,dy + v_x(x, \delta, t)\frac{\partial \delta}{\partial t}, \tag{30.2}$$

следовательно,

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial t}\,dy = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\delta} v_x\,dy - v_x(x,\ \delta,\ t)\frac{\partial \delta}{\partial t}. \tag{30.3}$$

Мы имеем далее:

$$\int_0^{\delta} v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\,dy = v_y v_x\Big|_{y=0}^{y=\delta} - \int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_y}{\partial y}\,dy =$$

$$= v_y(x,\ \delta,\ t)\,v_x(x,\ \delta,\ t) - \int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_y}{\partial y}\,dy,$$

ибо $v_x = v_y = 0$ при $y = 0$. Но из второго уравнения (29.9) имеем:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad v_y(x,\ \delta,\ t) = -\int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dy;$$

заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} v_x\,dy = \int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dy + v_x(x,\ \delta,\ t)\frac{\partial \delta}{\partial x},$$

поэтому

$$v_y(x,\ \delta,\ t) = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} v_x\,dy + v_x(x,\ \delta,\ t)\frac{\partial \delta}{\partial x} \tag{30.4}$$

и, значит,

$$\int_0^{\delta} v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\,dy = -v_x(x,\ \delta,\ t)\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} v_x\,dy + v_x^2(x,\ \delta,\ t)\frac{\partial \delta}{\partial x} + \int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dy.$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^{\delta} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\delta} \frac{\partial v_x^2}{\partial x}\,dy = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} v_x^2\,dy - \frac{1}{2}v_x^2(x,\ \delta,\ t)\frac{\partial \delta}{\partial x}.$$

Собирая все полученные результаты, придём к выводу, что

$$\int_0^{\delta}\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\delta} v_x\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} v_x^2\,dy - v_x(x,\ \delta,\ t)\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} v_x\,dy - v_x(x,\ \delta,\ t)\frac{\partial \delta}{\partial t}.$$

Вычислим теперь интеграл от правой части уравнения (29.9). Здесь мы имеем:

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial p}{\partial x}\, dy = \delta \frac{\partial p}{\partial x},$$

так как p не зависит от y. Далее,

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\, dy = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\delta} - \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0},$$

поэтому

$$\int_0^{\delta} \left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) dy = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\delta + \nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\delta} - \nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

В итоге, первое уравнение системы (29.9) даёт нам следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\delta} v_x\, dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} v_x^2\, dy - v_x(x, \delta, t)\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} v_x\, dy - v_x(x, \delta, t)\frac{\partial \delta}{\partial t} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\delta + \nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\delta} - \nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}. \qquad (30.5)$$

Это равенство справедливо при любом значении δ; примем теперь, что δ есть как раз толщина пограничного слоя, тогда, как было выше указано, мы можем принять $v_x(x, \delta, t)$ равным $U(x, t)$, а $(\partial v_x/\partial y)_{y=\delta}$ можем заменить нулём. В результате получается *интегральное соотношение Кармана*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\delta} v_x\, dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} v_x^2\, dy - U(x, t)\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} v_x\, dy - U(x, t)\frac{\partial \delta}{\partial t} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\delta - \nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{y=0}, \qquad (30.6)$$

которое в частном случае установившегося движения имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} v_x^2\, dy - U(x)\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} v_x\, dy = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}\delta - \nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}. \qquad (30.7)$$

Подчеркнём ещё раз приближённый характер этих соотношений, вывод которых основывался на отбрасывании некоторых малых величин.

Сам Карман получил уравнение (30.6) путём применения закона количеств движения [1]). Выведем этим методом уравнение (30.6). Пусть кривая KK, уравнение которой есть

$$y = \delta(x, t), \tag{30.8}$$

ограничивает область пограничного слоя от области внешнего потенциального течения (рис. 176). Рассмотрим объём жидкости, вырезаемый из пограничного слоя ординатами AB и A_1B_1 (как всегда, толщину жидкого слоя в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, принимаем равной единице). Пусть $AA_1 = dx$. Количество движения вырезанного слоя (в направлении оси Ox), очевидно, равно

$$K = \int_0^{\delta} \rho v_x \, dy \, dx. \tag{30.9}$$

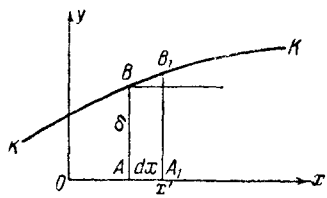

Рис. 176.

По закону количества движения, изменение количества движения какой-либо системы точек равняется импульсу всех внешних сил, действовавших на точки системы. Изменение за время dt количества движения системы частиц, заполнявших в начале этого промежутка времени объём ABB_1A_1, складывается из двух частей. Прежде всего, в случае нестационарного течения, происходит изменение скорости в каждой точке пространства; в силу этого обстоятельства мы получаем за время dt приращение количества движения рассматриваемого объёма жидкости на величину

$$d_1K = dx \int_0^{\delta} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \, dt \, dy.$$

Но, кроме того, нужно иметь в виду, что за время dt некоторые частицы, составляющие наш объём в начале этого промежутка времени, уйдут из пределов области ABB_1A_1; количество движения этих частиц нужно причислить к d_1K. Наоборот, количество движения тех частиц, которые вошли внутрь области ABB_1A_1 за время dt, надо вычесть из d_1K или, что то же самое, считая количества входящей в область жидкости отрицательными, нужно за d_2K принять количество движения, выносимое через контур ABB_1A_1. Через AA_1 протекания жидкости нет совсем, через A_1B_1 выносится

$$\left(\int_0^{\delta} \rho v_x \cdot v_x \, dy \, dt \right)_{x+dx},$$

[1]) Kármán, Ueber laminare und turbulente Reibung, Zeit. für ang. Math. und Mech., т. I, 1921, стр. 233—252.

через AB:

$$-\int_0^{\delta} \rho v_x \cdot v_x \, dy \, dt.$$

Итого через AB и A_1B_1 выносится количество движения жидкости

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho v_x^2 \, dy \, dt \, dx.$$

Ясно, далее, что через A_1B_1 и AB вытекает количество жидкости

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho v_x \, dy \, dt \, dx;$$

следовательно, такое же количество жидкости должно втекать через контур BB_1. Но на контуре BB_1 мы имеем равенство $v_x = U$, ибо на границе пограничного слоя KK скорость v_x переходит в скорость U внешнего потенциального потока. Итак, через BB_1 выносится количество движения

$$-U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho v_x \, dy \, dt \, dx$$

и, значит,

$$d_2K = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho v_x^2 \, dy \, dt \, dx - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho v_x \, dy \, dt \, dx.$$

Итак, полное изменение количества движения рассматриваемой системы точек равно:

$$dK = d_1K + d_2K = dx \, dt \left\{ \int_0^{\delta} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \, dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho v_x^2 \, dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho v_x \, dy \right\}.$$

Подсчитаем теперь импульс внешних сил. Прежде всего, на отрезке AA_1 действует сила трения, величина которой, отнесённая к единице площади, равна

$$-\tau_0 = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}. \tag{30.10}$$

причём знак минус берётся потому, что τ_0 есть напряжение на стенке, а нас интересует сейчас обратная по направлению сила воздействия на частицы жидкости. Умножая предыдущее выражение на величину

площади $1 \cdot dx$ и на промежуток времени dt, получим выражение импульса силы трения

$$-\tau_0\, dx\, dt = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} dx\, dt.$$

Мы имеем, далее, силы давления, приложенные к AB, BB_1 и A_1B_1 (соответствующими силами вязкости можно пренебречь). Проекции этих сил на ось Ox равны соответственно

$$(p\delta)_x,\quad p\, ds \cdot \frac{d\delta}{ds} = p\, d\delta,\quad -(p\delta)_{x+dx} = -(p\delta)_x - d(p\delta), \tag{30.11}$$

где $ds = BB_1$ и $d\delta/ds$ есть синус угла, который BB_1 составляет с осью Ox. Сумма этих проекций равна

$$(p\delta)_x + p\, d\delta - (p\delta)_x - d(p\delta) = -\delta\, dp = -\delta \frac{\partial p}{\partial x}\, dx,$$

импульс же этих сил будет равен

$$-\delta \frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, dt.$$

Приравнивая dK полному импульсу всех сил

$$-\tau_0\, dx\, dt - \delta \frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, dt,$$

приходим к требуемому равенству

$$\int_0^\delta \rho \frac{\partial v_x}{\partial t}\, dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x^2\, dy - U \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x\, dy = -\tau_0 - \delta \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{30.12}$$

Если теперь воспользоваться формулами (30.10) и (30.3), то получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta \rho v_x\, dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x^2\, dy - U \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x\, dy - \rho U \frac{\partial \delta}{\partial t} =$$

$$= -\delta \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}, \tag{30.13}$$

т. е. мы вновь докажем формулу (30.6).

Придадим полученному интегральному соотношению ещё иную форму, а именно такую, в которую входят интегралы по y, взятые по всему бесконечному интервалу от 0 до ∞. В этом случае, чтобы обеспечить сходимость интегралов, надо рассматривать вместо v_x его отклонение от предельного значения U, а именно пусть будет

$$U - v_x = q, \tag{30.14}$$

тогда будем, очевидно, иметь:

$$\int_0^\delta v_x^2\,dy = \int_0^\delta (U^2 - 2qU + q^2)\,dy = U^2\delta - 2U\int_0^\delta q\,dy + \int_0^\delta q^2\,dy,$$

$$\int_0^\delta v_x\,dy = \int_0^\delta (U - q)\,dy = U\delta - \int_0^\delta q\,dy,$$

поэтому равенство (30.13) принимает, после простых вычислений, форму:

$$\delta\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta q\,dy + \delta U\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta q\,dy - 2\frac{\partial U}{\partial x}\int_0^\delta q\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta q^2\,dy =$$

$$= -\frac{\delta}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Но для потенциального течения мы имеем соотношение

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{30.15}$$

являющееся следствием первого из уравнений гидромеханики идеальной жидкости.

Поэтому в предыдущем уравнении члены, содержащие множителем δ, взаимно сокращаются. В оставшихся членах мы можем положить $\delta = \infty$, тогда получим точное равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty q\,dy + U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty q\,dy + 2\frac{\partial U}{\partial x}\int_0^\infty q\,dy - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty q^2\,dy =$$

$$= \nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\tau_0}{\rho}. \tag{30.16}$$

В стационарном случае пропадает первый член левой части равенства (30.16), и уравнение это принимает вид:

$$U\frac{d}{dx}\int_0^\infty q\,dy + 2U'\int_0^\infty q\,dy - \frac{d}{dx}\int_0^\infty q^2\,dy = \frac{\tau_0}{\rho}. \tag{30.17}$$

Введём вновь толщину вытеснения по формуле (30.1), а также некоторую длину δ^{**}, которую называют «толщиной потери импульса»:

$$U^2\delta^{**} = \int_0^\infty v_x(U - v_x)\,dy.$$

Тогда, так как

$$\int_0^\infty q\,dy = \int_0^\infty (U - v_x)\,dy = U\int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{U}\right)dy = U\delta^*$$

и

$$\int_0^\infty q^2\,dy = \int_0^\infty (U - v_x)\,q\,dy = U\int_0^\infty q\,dy - U^2\int_0^\infty \frac{v_x}{U}\left(1 - \frac{v_x}{U}\right)dy =$$
$$= U^2\delta^* - U^2\delta^{**},$$

мы найдём, после простых вычислений:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'}{U}(2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_0}{\rho U^2}. \qquad (30.18)$$

Эта форма соотношения Кармана была предложена Прандтлем. Мы воспользуемся ею в приближённой теории пограничного слоя.

Л. С. Лейбензон указал, что можно получить интегральное соотношение, аналогичное соотношению Кармана, исходя из закона энергии [1]). Приведём вывод интегрального соотношения Лейбензона для случая установившегося движения. Вырезая, как выше, из пограничного слоя объём жидкости, ограниченный ординатами AB и A_1B_1 (рис. 176), для живой силы этого слоя будем иметь выражение:

$$T = \int_0^\delta \frac{\rho v_x^2}{2}\,dy\,dx, \qquad (30.19)$$

ибо составляющая v_y очень мала по сравнению с v_x. Изменение за время dt живой силы частиц, составляющих вырезанный объём, слагается из живой силы

$$\left(\int_0^\delta \rho\,\frac{v_x^2}{2}\cdot v_x\,dy\,dt\right)_{x+dx},$$

выносимой через A_1B_1, живой силы

$$-\int_0^\delta \rho\,\frac{v_x^2}{2}\cdot v_x\,dy\,dt,$$

[1]) Лейбензон Л. С., Энергетическая форма интегрального условия в теории пограничного слоя, Труды ЦАГИ, вып. 240, 1935.

выносимой через AB, и живой силы

$$-\frac{U^2}{2}\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x\,dy\,dt\,dx,$$

выносимой через BB_1. Поэтому полное изменение живой силы рассматриваемой системы точек равно:

$$dT = dx\,dt\left\{\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho\frac{v_x^3}{2}\,dy - \frac{U^2}{2}\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x\,dy\right\}.$$

Подсчитаем теперь работу внешних сил на контуре AA_1B_1B. Работа сил вязкости на отрезке AA_1 равна нулю, так как скорость жидкости на AA_1 обращается в нуль; на прочих частях контура работой сил вязкости можно пренебречь. Работа сил давления на контуре AA_1B_1B выражается интегралом

$$-\int_{AA_1B_1B} pv_n\,ds\,dt,$$

где n есть внешняя нормаль к контуру. Но по формуле Гаусса

$$\int_C pv_n\,ds = \int_S\int \operatorname{div}(pv)\,dx\,dy,$$

где S есть площадь, ограниченная контуром C; далее

$$\operatorname{div}(pv) = p\operatorname{div} v + \operatorname{grad} p\cdot v,$$

и в нашем случае $\operatorname{div} v = 0$, а p зависит только от x, так что

$$\operatorname{grad} p\cdot v = \frac{\partial p}{\partial x}v_x.$$

Поэтому искомая работа сил давления равна

$$dA = -\int_{AA_1B_1B} pv_n\,ds\,dt = -dx\frac{\partial p}{\partial x}\int_0^\delta v_x\,dy\,dt.$$

Как мы знаем, работа приложенных к частицам вязкой жидкости сил расходуется не только на увеличение кинетической энергии этих частиц, но частью диссипируется. Функция диссипации E (см. § 7) в нашем случае упрощается на основании (7.7), принимая следующий вид:

$$E = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2,$$

ибо остальные слагаемые, входящие в E, малы по сравнению с написанным. За время dt в рассматриваемом объёме жидкости рассеивается количество энергии, равное

$$dB = dt\,dx \int_0^{\delta} \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 dy.$$

Составляя равенство

$$dT = dA - dB,$$

приходим к интегральному соотношению Лейбензона:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} \frac{\rho v_x^3}{2}\,dy - \frac{U^2}{2}\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} \rho v_x\,dy = -\frac{dp}{dx}\int_0^{\delta} v_x\,dy - \mu\int_0^{\delta}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 dy. \tag{30.20}$$

Это соотношение может быть выведено также непосредственно из основных уравнений Прандтля (29.9). В. В. Голубев указал, что из этих уравнений можно получить даже ещё более общую форму интегрального соотношения.

В самом деле, умножая обе части уравнения

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

на v_x^k и интегрируя после этого по y в пределах от 0 до δ, получим:

$$\int_0^{\delta} v_x^{k+1}\frac{\partial v_x}{\partial x}\,dy + \int_0^{\delta} v_y v_x^k \frac{\partial v_x}{\partial y}\,dy = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\int_0^{\delta} v_x^k\,dy + \nu\int_0^{\delta} v_x^k\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,dy.$$

Простые преобразования дают:

$$\int_0^{\delta} v_y v_x^k \frac{\partial v_x}{\partial y}\,dy = \frac{1}{k+1}\int_0^{\delta} v_y\frac{\partial v_x^{k+1}}{\partial y}\,dy =$$

$$= \frac{U^{k+1}v_y(x,\delta)}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int_0^{\delta} v^{k+1}\frac{\partial v_y}{\partial y}\,dy =$$

$$= \frac{U^{k+1}}{k+1}v_y(x,\delta) + \frac{1}{k+1}\int_0^{\delta} v_x^{k+1}\frac{\partial v_x}{\partial x}\,dy;$$

вследствие (30.4) и того, что можно принять $v_x(x, \delta) = U(x)$,

$$\int_0^\delta v_x^{k+1} \frac{\partial v_x}{\partial x}\, dy + \int_0^\delta v_y v_x^k \frac{\partial v_x}{\partial y}\, dy =$$

$$= \frac{U^{k+1}}{k+1}\left[U \frac{d\delta}{dx} - \frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x\, dy\right] + \frac{k+2}{k+1}\int_0^\delta v_x^{k+1} \frac{\partial v_x}{\partial x}\, dy.$$

Но ясно, что

$$\int_0^\delta v_x^{k+1} \frac{\partial v_x}{\partial x}\, dy = \frac{1}{k+2}\int_0^\delta \frac{\partial v_x^{k+2}}{\partial x}\, dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta \frac{v_x^{k+2}}{k+2}\, dy - \frac{U^{k+2}}{k+2}\frac{d\delta}{dx}.$$

Далее, интегрирование по частям даёт, вследствие того что $(v_x)_{y=0} = 0$, $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\delta} = 0$, следующее соотношение:

$$\int_0^\delta v_x^k \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\, dy = -\int_0^\delta k v_x^{k-1}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 dy.$$

Поэтому окончательно при любом положительном k получаем:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \frac{v_x^{k+2}}{k+1}\, dy - \frac{U^{k+1}}{k+1}\frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x\, dy =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\int_0^\delta v_x^k\, dy - \nu k\int_0^\delta v_x^{k-1}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^3 dy. \quad (30.21)$$

При $k = 1$ получаем, в частности, интегральное соотношение Лейбензона.

§ 31. Уравнения теории пограничного слоя для сжимаемой жидкости. Рассуждения Прандтля мы можем легко обобщить на случай сжимаемой жидкости. Как и раньше, рассмотрим для простоты случай плоско-параллельного течения и предположим отсутствие внешних сил. Уравнения движения (4.8) примут вид:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y}, \quad (31.1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y}, \quad (31.2)$$

причём по (3.4)

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p+(\lambda+2\mu)\frac{\partial v_x}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v_y}{\partial y},\\ p_{yx} &= p_{xy}=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right),\\ p_{yy} &= -p+(\lambda+2\mu)\frac{\partial v_y}{\partial y}+\lambda\frac{\partial v_x}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{31.3}$$

Уравнение неразрывности даст:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho v_y}{\partial y}=0. \tag{31.4}$$

Введём вновь в рассмотрение δ и l как в § 28. Если в уравнении (31.4) все члены — одного порядка и если V есть характерная скорость рассматриваемого течения (v_x), то снова мы должны считать, что внутри пограничного слоя v_y имеет порядок $V\delta/l$. Но тогда четыре члена правой части (31.1), содержащие производные от скоростей по координатам

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial v_x}{\partial x}\right],\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial v_y}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_y}{\partial x}\right),$$

имеют соответственно порядок (λ и μ имеют один и тот же порядок):

$$\mu\frac{V}{l^2},\quad \mu\frac{1}{l}\frac{V\delta}{\delta l},\quad \mu\frac{V}{\delta^2},\quad \mu\frac{V\delta}{\delta l^2},$$

и мы должны оставить из них лишь один — третий — и записать вместо первого уравнения:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \tag{31.5}$$

Так же как и в несжимаемой жидкости, все члены левой части (31.5) имеют один и тот же порядок $\rho V^2/l$ и опять, по Прандтлю, мы примем, что $\rho V^2/l$ и $\mu V/\delta^2$ имеют один и тот же порядок. Тот же порядок имеет член $\partial p/\partial x$.

Обратимся теперь к уравнению (31.2). Порядок членов, содержащих коэффициент вязкости и стоящих здесь справа, т. е. членов

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v_y}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial v_x}{\partial x}\right],\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial v_y}{\partial y}\right),$$

будет

$$\mu\frac{V}{l\delta},\quad \mu\frac{V\delta}{l^2},\quad \mu\frac{V}{\delta l^2},\quad \mu\frac{V}{l\delta}$$

соответственно. Максимальная из них $\mu V/l\delta$, а это, по принятому уже нами допущению Прандтля, всё равно, что $\rho V^2\delta/l^2$. Таков же

порядок членов, стоящих слева. Итак, $\partial p/\partial y$ имеет порядок $\rho V^2\delta/l^2$, а $\partial p/\partial x$ — порядок $\rho V^2/l$. Отсюда заключаем, как и в случае несжимаемой жидкости, что второе уравнение движения заменяется соотношением

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{31.6}$$

Уравнение неразрывности остаётся без изменения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} = 0. \tag{31.7}$$

Посмотрим теперь, как видоизменится в пограничном слое уравнение притока тепла (10.6).

В случае плоско-параллельного движения и при $\varepsilon = 0$ уравнение (10.6) перепишется в виде:

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_x\frac{\partial p}{\partial x} + v_y\frac{\partial p}{\partial y}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + A\left\{\lambda\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\mu\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2\right] + \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2\right\}. \tag{31.8}$$

Из двух членов, содержащих коэффициент теплопроводности, мы должны в пограничном слое сохранить один:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Очевидно, далее, что из всех членов, содержащих коэффициенты вязкости, останется лишь

$$A\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2.$$

Принимая, наконец, во внимание (31.6), мы получим уравнение притока тепла в теории пограничного слоя в виде:

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_x\frac{\partial p}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + A\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2. \tag{31.9}$$

Уравнению этому мы можем дать ещё другую форму. Вставим $\partial p/\partial x$ из (31.5). Производя совершенно элементарные преобразования, по-

лучим окончательно:

$$\rho\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(Ec_pT+\frac{v_x^2}{2}\right)+v_x\frac{\partial}{\partial x}\left(Ec_pT+\frac{v_x^2}{2}\right)+v_y\frac{\partial}{\partial y}\left(Ec_pT+\frac{v_x^2}{2}\right)\right\}-$$
$$-\frac{\partial p}{\partial t}=E\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu v_x\frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \quad (31.10)$$

где $E=\frac{1}{A}$ — механический эквивалент тепла.

В заключение этого параграфа получим ещё интегральное соотношение Кармана для сжимаемой жидкости. Для этого запишем сперва (31.5), привлекая уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial\rho v_x}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_x^2}{\partial x}+\frac{\partial\rho v_xv_y}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right),$$

и проинтегрируем по y от 0 до δ:

$$\int_0^\delta\frac{\partial\rho v_x}{\partial t}dy+\int_0^\delta\frac{\partial\rho v_x^2}{\partial x}dy+(\rho v_xv_y)_{y=\delta}=-\frac{\partial p}{\partial x}\delta-\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}. \quad (31.11)$$

Но из уравнения неразрывности следует, что

$$\int_0^\delta\frac{\partial\rho}{\partial t}dy+\int_0^\delta\frac{\partial\rho v_x}{\partial x}dy+(\rho v_y)_{y=\delta}=0. \quad (31.12)$$

Обозначая, как и прежде,

$$(v_x)_{y=\delta}=U,$$

вставляя $(\rho v_y)_{y=\delta}$ из (31.12) в (31.11), вынося дифференцирование из-под знаков интегралов и производя сокращения, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta\rho v_x\,dy+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta\rho v_x^2\,dy-U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta\rho v_x dy-U\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta\rho\,dy=$$
$$=-\delta\frac{\partial p}{\partial x}-\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}. \quad (31.13)$$

Это и есть интегральное соотношение Кармана для сжимаемой жидкости. При $\rho=\text{const}$., $\mu=\text{const}$. оно автоматически перейдет в (30.13).

§ 32. Пограничный слой в несжимаемой жидкости вдоль плоской пластинки. Переходим теперь к исследованию конкретных случаев движений в пограничном слое.

Пусть плоская пластинка, бесконечно длинная в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа (рис. 173), движется с постоянной

скоростью U в направлении отрицательной оси Ox. Нам удобнее будет обратить движение и рассматривать обтекание пластинки, расположенной вдоль оси Ox, равномерным потоком, имеющим постоянную скорость U. Очевидно, в основном потоке мы имеем отсутствие градиента давления

$$\frac{dp}{dx} = 0,$$

и поэтому, предполагая, что мы имеем дело с несжимаемой жидкостью и со стационарным ламинарным пограничным слоем, можем написать основные уравнения в виде:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{32.1}$$

Вводя функцию тока $\psi(x, y)$, будем иметь:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{32.2}$$

и первое уравнение (32.1) даёт тогда

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \tag{32.3}$$

Но ясно теперь, что ψ, кроме x и y, может зависеть только от U и ν.

Следуя Блазиусу [1]), мы введём вместо ψ безразмерную величину ζ по формуле

$$\psi = \sqrt{\nu U x}\,\zeta, \tag{32.4}$$

а также безразмерную величину

$$\xi = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}. \tag{32.5}$$

Предположим теперь, что ζ зависит только от ξ:

$$\zeta = f(\xi).$$

Простые вычисления показывают, что если мы условимся штрихами обозначать производные по ξ, то

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{\nu U x}\,\zeta' \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = U\zeta', \\ v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}\,\zeta + \sqrt{\nu U x}\,\zeta' \cdot \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U}{\nu x^3}} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}\,(\xi\zeta' - \zeta). \end{aligned}\right\} \tag{32.6}$$

[1]) Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Zeit. für Math. und Phys., 56 (1908), стр. 1—37.

Подставляя эти значения в уравнение (32.3), после сравнительно простых вычислений найдём обыкновенное дифференциальное уравнение для определения ζ:

$$2\zeta''' + \zeta\zeta'' = 0. \tag{32.7}$$

Граничные условия $v_x = v_y = 0$ при $y = 0$ дают нам вследствие соотношений (32.6), что

$$\zeta = 0, \quad \zeta' = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \tag{32.8}$$

граничное же условие $v_x = U$ при $y = \infty$ показывает, что

$$\zeta' = 1 \quad \text{при} \quad \xi = \infty. \tag{32.9}$$

Итак, надо интегрировать уравнение (32.7) третьего порядка при трёх граничных условиях (32.8) и (32.9). Решение этой задачи мы уже привели выше (см. § 20). Этим решением сейчас и воспользуемся.

Напомним теперь ещё раз наши обозначения. По первому из уравнений (32.6):

$$\zeta'(\xi) = \frac{v_x}{U}, \tag{32.10}$$

по уравнению же (32.5)

$$\xi = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}. \tag{32.11}$$

Заметим, что в рассматриваемой задаче мы не имеем в нашем распоряжении характерной длины; рассматривая пограничный слой в месте пластины, соответствующем координате x, мы можем принять число Рейнольдса равным

$$\mathsf{R} = \frac{xU}{\nu}, \tag{32.12}$$

и тогда

$$\xi = \frac{y}{x}\sqrt{\mathsf{R}}.$$

Таким образом ξ пропорционально координате y.

Приведём теперь таблицу (см. таблицу IV), составленную Прандтлем на основе вычислений Тёпфера, и дадим (рис. 177), распределение скорости в пограничном слое. Так как в основе теории пограничного слоя лежит предположение о том, что число Рейнольдса R очень велико, то из формулы (32.12) явствует, что мы не можем применять полученные результаты к самому краю пластинки, где x имеет малые значения.

Прежде чем идти дальше, сопоставим решение, полученное здесь, с решением в точной постановке (§ 20). В качестве независимой

Таблица IV

ξ	$\zeta'(\xi)$	ξ	$\zeta'(\xi)$	ξ	$\zeta'(\xi)$	ξ	$\zeta'(\xi)$	ξ	$\zeta'(\xi)$
0	0,0000	1,2	0,3938	2,4	0,7290	3,6	0,9233	4,8	0,9878
0,2	0,0664	1,4	0,4563	2,6	0,7725	3,8	0,9411	5,0	0,9916
0,4	0,1328	1,6	0,5168	2,8	0,8115	4,0	0,9555	5,2	0,9943
0,6	0,1990	1,8	0,5747	3,0	0,8461	4,2	0,9670	5,4	0,9962
0,8	0,2647	2,0	0,6298	3,2	0,8761	4,4	0,9759	5,6	0,9975
1,0	0,3298	2,2	0,6813	3,4	0,9018	4,6	0,9827	5,8	0,9984
								6,0	0,9990

переменной в § 20 фигурировала величина

$$\xi = 2\sqrt{\frac{U}{\nu}}\, y_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}-X}{2}},$$

где $X = \frac{4U}{\nu}x$, $Y = \frac{4U}{\nu}y$ (см. (20.5) и (20.19)). Если $Y \ll X$ ($X > 0$, $Y > 0$), то $\xi = \sqrt{\frac{X\left(1+\frac{Y^2}{2X^2}+\ldots\right)-X}{2}} \approx \frac{Y}{2\sqrt{X}} = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$.

Таким образом, если только $Y \ll X$, аргумент, введённый в § 20,

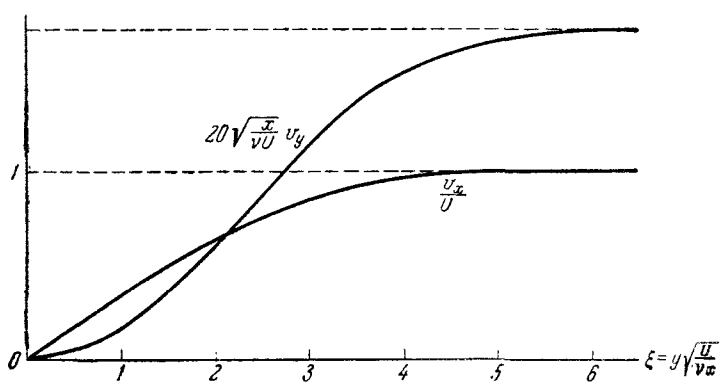

Рис. 177.

будет совпадать с независимым переменным теории пограничного слоя.

Кроме того, так как $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{U}}\sqrt{\frac{\sqrt{X^2+Y^2}+X}{2}}$, то для $Y \ll X$ имеем $x_1 \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{U}}\sqrt{X} = \sqrt{x}$. Таким образом, для $Y \ll X$

имеем по (20.9) (если ограничиться первым членом) $\psi = \sqrt{x} f\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right)$, или по (20.19) $\psi = \sqrt{\nu U x}\,\zeta\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right)$, и мы придём к формуле (32.4). Отметим, что по Блазиусу $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{v_y}{U} = \lim\frac{1}{2U}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}(\xi'' - \zeta)$, или, на основании (20.41), $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{v_y}{U} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}\lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{X}} \approx \frac{1{,}72}{\sqrt{X}}$, в то время как в точной постановке $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{v_y}{U} \to 0$. Различие в распределении значений v_y видно из сравнения рис. 165 и 177.

Чтобы вычислить сопротивление, испытываемое пластиной, найдём сначала

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0},$$

но вследствие предыдущих формул

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = U\zeta''(\xi)\sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \sqrt{\frac{U^3}{\nu x}}\zeta''(\xi),$$

поэтому

$$\tau_0 = \mu\sqrt{\frac{U^3}{\nu x}}\zeta''(0) = \sqrt{\mu\rho U^3}\,\frac{\alpha}{\sqrt{x}}. \qquad (32.13)$$

Если пластинка имеет ширину b и длину l, то суммарное сопротивление, испытываемое как верхней, так и нижней сторонами пластинки, будет равно:

$$W = 2b\sqrt{\mu\rho U^3}\int_0^l \frac{\alpha\,dx}{\sqrt{x}} = 4b\alpha\sqrt{\mu\rho U^3 l},$$

т. е.

$$W = 1{,}328b\sqrt{\mu\rho U^3 l}. \qquad (32.14)$$

Вводя коэффициент сопротивления по формуле

$$W = c_w F\cdot\frac{1}{2}\rho U^2, \qquad (32.15)$$

где $F = 2bl$, получим:

$$c_w = 1{,}328\sqrt{\frac{\nu}{lU}} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathsf{R}}}, \qquad (32.16)$$

где $\mathsf{R} = lU/\nu$ есть число Рейнольдса. Полученное значение коэффициента сопротивления хорошо согласуется с коэффициентами, найденными из экспериментов над гладкими пластинками для чисел Рейнольдса, не превосходящих $3\cdot 10^5$.

Определим ещё толщину пограничного слоя. Вычислим величину δ^*, определённую формулой (30.1):

$$\delta^* = \frac{1}{U}\int_0^\infty (U - v_x)\,dy.$$

По формулам (32.21) и (32.22)

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}\int_0^\infty [1 - \zeta'(\xi)]\,d\xi;$$

произведя вычисления, получим:

$$\delta^* = 1{,}72\sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \qquad (32.17)$$

Толщину пограничного слоя можно принять равной, например, $3\delta^*$, как рекомендует Прандтль; тогда будем иметь:

$$\delta = 5{,}2\sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \qquad (32.18)$$

Такому δ соответствует $\xi = 5{,}2$, т. е. по вышеприведённой табличке отклонение скорости от скорости внешнего потока на $^1/_2\%$.

Применим теперь к рассматриваемой задаче метод использования интегрального соотношения Кармана. Так как мы имеем дело с установившимся движением, в котором

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

то основное уравнение теории Кармана (30.7) напишется так:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x^2\,dy - U\frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x\,dy = -\nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}. \qquad (32.19)$$

Если бы нам было известно, что распределение скорости внутри пограничного слоя определяется формулой

$$v_x = Uf\left(\frac{y}{\delta}\right) = Uf(\eta),$$

где

$$\eta = \frac{y}{\delta},$$

то мы имели бы

$$\int_0^\delta v_x^2\,dy - U\int_0^\delta v_x\,dy = U^2\delta\int_0^1 [f^2(\eta) - f(\eta)]\,d\eta = -\gamma U^2\delta,$$

где для краткости введено обозначение

$$\gamma = \int_0^1 (f - f^2)\, d\eta. \tag{32.20}$$

Далее,

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = Uf'(0)\,\frac{1}{\delta}, \tag{32.21}$$

поэтому уравнение (32.19) принимает вид:

$$\gamma U^2 \frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu U f'(0)}{\delta},$$

откуда

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu f'(0)}{\gamma U}.$$

Интегрируя это уравнение и считая, что $\delta = 0$ при $x = 0$, получим:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu f'(0)\, x}{\gamma U}}. \tag{32.22}$$

Так как вследствие формул (32.32) и (32.33):

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\mu U f'(0)}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu\rho f'(0)\, U^3\gamma}{2x}},$$

то для сопротивления, испытываемого с обеих сторон пластинкой ширины b и длины l, мы получим формулу

$$W = 2b\int_0^l \sqrt{\frac{\mu\rho f'(0)\, U^3\gamma}{2x}}\, dx = 2b\sqrt{2\mu\rho f'(0)\, U^3\gamma l}; \tag{32.23}$$

в иной форме это соотношение принимает вид:

$$c_w = \sqrt{\frac{8\gamma f'(0)}{R}}. \tag{32.24}$$

Наконец, для определения величины δ^* мы имеем, согласно формуле (30.1):

$$\delta^* = \delta\int_0^1 [1 - f(\eta)]\, d\eta. \tag{32.25}$$

Основная идея метода Кармана состоит в том, что вместо того чтобы отыскивать точный вид функции $f(\eta)$, можно задать вид этой функции. Если мы правильно схватим общий характер распределения скоростей в пограничном слое, то получим хорошее приближение как для зависимости δ от x, так и для численной величины коэффициента сопротивления.

Отсюда видны и положительные и отрицательные стороны метода Кармана. Этот метод хорош тем, что он требует гораздо меньших вычислений по сравнению с точными методами интегрирования дифференциальных уравнений теории пограничного слоя. Плохая же сторона метода Кармана состоит в том, что он применим, в сущности говоря, только к тем случаям, когда мы имеем плавное распределение скорости в пограничном слое, так как только в этих случаях мы можем ожидать, что задаваемая с довольно большим произволом функция $f(\eta)$ отразит общий характер течения в пограничном слое. Поэтому, в сущности говоря, мы должны довольно много знать о характере течения в пограничном слое, чтобы иметь возможность применять метод Кармана.

В нашей задаче мы имеем дело с очень плавным распределением скоростей, и потому мы должны ожидать, что метод Кармана даст хорошие результаты. В самом деле, примем, например, что

$$f(\eta) = \eta; \tag{32.26}$$

это обеспечивает нам при $y = 0$ $v_x = 0$, а при $y = \delta$ $v_x = U$, как и должно быть. Мы будем тогда иметь:

$$\gamma = \int_0^1 \eta(1-\eta)\,d\eta = \frac{1}{6}, \quad f'(0) = 1,$$

поэтому формула (32.33) даёт:

$$\delta = 2\sqrt{\frac{3\nu x}{U}} = 3{,}464\sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \tag{32.27}$$

а по формулам (32.34) и (32.35)

$$W = 1{,}155 b \sqrt{\mu\rho l U^3}, \quad c_w = \frac{1{,}155}{\sqrt{R}}. \tag{32.28}$$

Наконец для δ^* имеем формулу:

$$\delta^* = \delta\int_0^1 (1-\eta)\,d\eta = \frac{1}{2}\delta = 1{,}732\sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \tag{32.29}$$

почти совпадающую (конечно, случайно) с формулой (32.28).

Возьмём теперь распределение скоростей по параболе третьей степени

$$f(\eta) = A + B\eta + C\eta^2 + D\eta^3,$$

причём выберем следующие граничные условия:

$$v_x = 0,\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0;\ v_x = U,\ \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \delta, \tag{32.30}$$

последнее из которых выражает, что на внешней границе пограничного слоя не только v_x, но и $\partial v_x/\partial x$ плавно переходят в соот-

ветствующие значения внешнего потенциального течения. Второе из взятых нами пограничных условий сразу вытекает из первого уравнения (32.1), если заметить, что при $y=0$ как v_x, так и v_y должны обращаться в нуль. Простое вычисление показывает, что надо взять

$$f(\eta)=\frac{3}{2}\eta-\frac{1}{2}\eta^3 \tag{32.31}$$

и далее

$$\gamma=\int_0^1 f(1-f)\,d\eta=\frac{39}{280},\qquad f'(0)=\frac{3}{2},\qquad \int_0^1[1-f(\eta)]\,dy=\frac{3}{8},$$

следовательно,

$$\left.\begin{aligned}\delta&=\sqrt{\frac{280\nu x}{13U}}=4{,}641\sqrt{\frac{\nu x}{U}},\\ c_w&=\sqrt{\frac{117}{70R}}=\frac{1{,}293}{\sqrt{R}},\\ \delta^*&=\frac{3}{8}\delta=1{,}74\sqrt{\frac{\nu x}{U}}.\end{aligned}\right\} \tag{32.32}$$

Примем ещё, чтобы показать пример применения уравнения (30.16), следующий закон распределения скорости:

$$v_x=U\,\mathrm{th}\,\frac{y}{\delta}, \tag{32.33}$$

тогда

$$q=U-v_x=U\left(1-\mathrm{th}\,\frac{y}{\delta}\right),$$

$$U\int_0^\infty q\,dy-\int_0^\infty q^2\,dy=U^2\delta\int_0^\infty(1-\mathrm{th}\,\eta)\,\mathrm{th}\,\eta\,d\eta.$$

Введём новую переменную

$$\zeta=\mathrm{th}\,\eta$$

и заметим, что

$$d\zeta=\frac{1}{\mathrm{ch}^2\eta}\,d\eta=\frac{\mathrm{ch}^2\eta-\mathrm{sh}^2\eta}{\mathrm{ch}^2\eta}\,d\eta=(1-\zeta^2)\,d\eta,$$

поэтому

$$\int_0^\infty(1-\mathrm{th}\,\eta)\,\mathrm{th}\,\eta\,d\eta=\int_0^1(1-\zeta)\zeta\frac{d\zeta}{1-\zeta^2}=$$

$$=\int_0^1\frac{\zeta\,d\zeta}{1+\zeta}=[\zeta-\ln(1+\zeta)]_{\zeta=0}^{\zeta=1}=1-\ln 2.$$

Далее

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{U}{\operatorname{ch}^2 \frac{y}{\delta}} \frac{1}{\delta};$$

поэтому уравнение (30.16) даёт нам

$$\rho U^2 (1 - \ln 2) \frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu U}{\delta},$$

откуда

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu}{\rho U (1 - \ln 2)}$$

и, следовательно, после интегрирования

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu x}{U(1-\ln 2)}} \approx 2{,}553 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \tag{32.34}$$

Вычисляем теперь сопротивление

$$\tau_0 = \frac{\mu U}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu \rho U^3 (1 - \ln 2)}{2x}},$$

и следовательно,

$$W = 2b \sqrt{2(1 - \ln 2) \mu \rho U^3 l} \approx 1{,}567\, b \sqrt{\mu \rho l U^3}, \quad c_w \approx \frac{1{,}567}{\sqrt{\mathrm{R}}}. \tag{32.35}$$

Наконец,

$$\delta^* = \delta \int_0^\infty (1 - \operatorname{th} \eta_1)\, d\eta = \delta \int_0^1 (1 - \zeta) \frac{d\zeta}{1 - \zeta^2} =$$

$$= \delta \int_0^1 \frac{d\zeta}{1 + \zeta} = \delta \ln 2 = 1{,}77 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \tag{32.36}$$

Мы видим, что величина δ^* во всех случаях получается очень близкой к той, которую даёт точное решение; ошибка в определении c_w доходит до 20%, хотя в частном случае, когда за $f(\eta)$ выбирается полином третьей степени, эта ошибка не превышает 4%.

Еще раз подчеркнём, что при применении метода интегральных соотношений мы имеем очень большой произвол в выборе распределения скорости. Кроме того, остаётся также произвол в выборе интегрального соотношения, которым мы можем воспользоваться.

§ 33. Пограничный слой в диффузоре. Ламинарная струя. В качестве второго примера применения теории пограничного слоя в несжимаемой жидкости рассмотрим течение в плоском диффузоре [1]).

---

[1]) Pohlhausen K., Zur näherungweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzshicht, Zeitschr. für angew. Math. und Mech., 1 (1921), стр. 252—268.

Пусть мы имеем плоское течение жидкости между двумя плоскими стенками OAB и OCD, наклонёнными друг к другу под углом α (рис. 160, стр. 461). Мы будем стараться придерживаться тех же обозначений, что и в § 17, в котором вопрос о течении в диффузоре был рассмотрен вполне строго. В соответствии с этим обозначим через Q обильность источника, считаемую положительной, если мы имеем дело с расходящимся течением в диффузоре, и отрицательной — для случая сходящегося течения.

Мы будем рассматривать пограничный слой, образующийся вдоль стороны OAB угла, и будем отсчитывать координату x вдоль этой стороны от точки O. Тогда для скорости течения идеальной жидкости мы будем иметь выражение

$$U = \frac{Q}{\alpha x}. \tag{33.1}$$

Мы можем теперь из уравнения Бернулли определить градиент давления

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -UU' = \frac{Q^2}{\alpha^2 x^3}.$$

Введя функцию тока $\psi(x, y)$, из основного уравнения теории пограничного слоя, получим:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{Q^2}{\alpha^2 x^3} + \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}. \tag{33.2}$$

Положим

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \psi = \zeta(\xi), \tag{33.3}$$

простые вычисления показывают тогда, что

$$\left.\begin{aligned} &v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{x}\zeta'(\xi), \qquad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\xi}{x}\zeta'(\xi),\\ &\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{x^2}\zeta' - \frac{\xi}{x^2}\zeta'', \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\zeta'',\\ &\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} = \frac{1}{x^3}\zeta''' . \end{aligned}\right\} \tag{33.4}$$

Поэтому уравнение (33.2) сильно упрощается:

$$-(\zeta')^2 = -\frac{Q^2}{\alpha^2} + \nu\zeta'''.$$

Введём для простоты обозначение:

$$\zeta'(\xi) = \frac{Q}{\alpha}u(\xi), \tag{33.5}$$

тогда будем иметь уравнение

$$\frac{\nu\alpha}{Q}u'' = 1 - u^2 \tag{33.6}$$

и граничные условия

$$u(0)=0, \quad u(\infty)=1, \tag{33.7}$$

вытекающие из (33.4), вследствие того, что при $y=0$ (т. е. $\xi=0$) v_x должно обращаться в нуль, а при $y=\infty$ (т. е. $\xi=\infty$) v_x должно обращаться в $U=Q/\alpha x$.

Умножая обе части уравнения (33.6) на u' и интегрируя, получим:

$$\frac{\nu\alpha}{2Q}u'^2=C+u-\frac{u^3}{3}, \tag{33.8}$$

где C есть произвольная постоянная. При $\xi\to\infty$ величина u по условию (33.7) стремится к единице, но тогда из предыдущего уравнения ясно, что u' тоже стремится к определённому пределу, и ясно, что этим пределом может быть только нуль. Итак, $C+1-\frac{1}{3}=0$, откуда

$$C=-\frac{2}{3}.$$

Но

$$-\frac{2}{3}+u-\frac{u^3}{3}=-\frac{1}{3}(u-1)^2(u+2),$$

и значит, уравнение (32.8) принимает вид:

$$\frac{\nu\alpha}{2Q}u'^2=-\frac{1}{3}(u-1)^2(u+2). \tag{33.9}$$

Так как правая часть всегда отрицательна в интервале $0<u<1$, то Q *непременно должно быть отрицательно*. Таким образом, пограничный слой рассматриваемого вида может образоваться только для случая сходящегося течения в диффузоре; для случая расходящегося течения такого правильного пограничного слоя не получается. Эти результаты находятся в полном согласии с тем, что мы нашли в § 16.

Для случая сходящегося течения мы можем продолжить вычисления дальше. Введём, как в § 17, число Рейнольдса

$$\mathrm{R}=-\frac{Q}{\nu}.$$

Заметим теперь, что вследствие граничных условий (33.7) u должно возрастать вместе с ξ; поэтому, разрешая уравнение (33.9) относительно u', найдем:

$$\left.\begin{aligned} u'&=\frac{du}{d\xi}=\sqrt{\frac{2\mathrm{R}}{3\alpha}}(1-u)\sqrt{2+u},\\ \xi\sqrt{\frac{2\mathrm{R}}{3\alpha}}&=\int_0^u\frac{du}{(1-u)\sqrt{2+u}}. \end{aligned}\right\} \tag{33.10}$$

Чтобы взять интеграл, совершим подстановку:

$$\sqrt{2+u} = q\sqrt{3}; \qquad u = 3q^2 - 2,$$
$$du = 6q\,dq; \qquad 1-u = 3(1-q^2),$$

тогда

$$\int_0^u \frac{du}{(1-u)\sqrt{2+u}} = \int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{q} \frac{2dq}{\sqrt{3}(1-q^2)}.$$

Положим далее

$$q = \operatorname{th} v; \quad dq = \frac{dv}{\operatorname{ch}^2 v}; \quad 1-q^2 = 1-\operatorname{th}^2 v = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 v}; \quad \frac{dq}{1-q^2} = dv$$

и заметим, что если $q = \sqrt{\frac{2}{3}}$, то $v = \ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 1{,}146$. Равенство (33.10) даёт теперь

$$\xi\sqrt{\frac{R}{2\alpha}} = v - \ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}).$$

Возвращаясь к переменной u, найдём:

$$u = 3\operatorname{th}^2\left[\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \xi\sqrt{\frac{R}{2\alpha}}\right] - 2,$$

и наконец по формулам (39.4), (39.5) и (39.3)

$$v_x = \frac{Q}{\alpha x}\left\{3\operatorname{th}^2\left[\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \frac{y}{x}\sqrt{\frac{R}{2\alpha}}\right] - 2\right\}. \qquad (33.11)$$

Преобразуем несколько эту формулу; мы имеем:

$$\operatorname{th}^2 z = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z} = 1 - \frac{4}{(e^z+e^{-z})^2};$$

поэтому предыдущая формула может быть записана и так:

$$v_x = \frac{Q}{x\alpha}\left\{1 - \frac{12}{\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,e^{\frac{y}{x}\sqrt{\frac{R}{2\alpha}}} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})\,e^{-\frac{y}{x}\sqrt{\frac{R}{2\alpha}}}\right]^2}\right\}. \qquad (33.12)$$

Эта формула является совершенно тождественной с формулой (17.44) § 17; в самом деле, для пограничного слоя y/x есть малая величина, которая с точностью до бесконечно малых высшего порядка определяет угол, составляемый OAB с радиусом, проведённым из точки O в рассматриваемую точку пограничного слоя. Но в § 17 этот угол выражался как раз величиной $\alpha/2 - \theta$. Заменяя в формуле (17.44) $\alpha/2 - \theta$ на y/x, мы опять получаем формулу (33.12).

Применим теперь к рассматриваемой задаче способ Мизеса, изложенный в § 29. В этом способе за независимые переменные берутся x и ψ, а за функцию берётся

$$z = U^2 - v_x^2. \qquad (33.13)$$

Уравнение (29.15) для определения функции z в нашем случае принимает вид:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \nu \sqrt{\frac{Q^2}{\alpha^2 x^2} - z}\, \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}, \tag{33.14}$$

причём, чтобы v_x получилось положительным, мы принимаем OAB за *отрицательную ось* Ox, так что в рассматриваемой нами области x всюду отрицательно. Граничные условия будут иметь вид:

$$z = \frac{Q^2}{\alpha^2 x^2} \quad \text{при} \quad \psi = 0,$$

$$z = 0 \qquad \text{»} \qquad \psi = \infty.$$

Будем искать решение уравнения (33.14), имеющее вид:

$$z = \frac{Q^2}{\alpha^2 x^2} w(\psi); \tag{33.15}$$

тогда функция w должна удовлетворять уравнению (мы опять вводим число Рейнольдса $\mathsf{R} = -Q/\nu$):

$$\frac{2w}{\sqrt{1-w}} = \frac{\nu^2 \mathsf{R}}{\alpha} w'' \tag{33.16}$$

и граничным условиям

$$w(0) = 1; \quad w(\infty) = 0. \tag{33.17}$$

Умножая уравнение (33.16) на w', интегрируя и принимая во внимание граничные условия, получим:

$$\frac{\nu^2 \mathsf{R}}{2\alpha} w'^2 = \int_0^w \frac{2w\, dw}{\sqrt{1-w}}.$$

Полагая

$$\sqrt{1-w} = q,$$

после простых вычислений получим:

$$\frac{\nu^2 \mathsf{R}}{2\alpha} q^2 q'^2 = -\int_1^q (1-q^2)\, dq = \frac{2}{3} - q + \frac{q^3}{3} = \frac{1}{3}(1-q)^2(2+q).$$

При возрастании ψ от 0 до ∞ изменение q происходит от нуля до единицы, поэтому из предыдущего уравнения находим:

$$\frac{\psi}{\nu} \sqrt{\frac{2\alpha}{3\mathsf{R}}} = \int_0^q \frac{q\, dq}{(1-q)\sqrt{2+q}}.$$

Сделаем теперь, как выше, подстановку

$$2 + q = 3 \operatorname{th}^2 v,$$

тогда простые вычисления покажут, что

$$\frac{\psi}{\nu}\sqrt{\frac{2\alpha}{3R}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_{\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})}^{v}(3\,\mathrm{th}^2 v-2)\,dv=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_{\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})}^{v}\left(1-\frac{3}{\mathrm{ch}^2 v}\right)dv=\frac{2}{\sqrt{3}}\{v-3\,\mathrm{th}\,v-\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{6}\}.$$

По формуле (33.13) мы определим v_x:

$$v_x=\sqrt{U^2-z}=\frac{Q}{\alpha x}\sqrt{1-w}=\frac{Q}{\alpha x}q=\frac{Q}{\alpha x}(3\,\mathrm{th}^2 v-2). \quad (33.18)$$

Чтобы выяснить геометрическое значение введённого нами параметра v, найдём y из уравнения (29.18):

$$y=\int\limits_0^{\psi}\frac{d\psi}{v_x}=\int\limits_{\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})}^{v}\frac{\nu\sqrt{\frac{2R}{\alpha}}(3\,\mathrm{th}^2 v-2)\,dv}{\frac{Q}{\alpha x}(3\,\mathrm{th}^2 v-2)}=$$

$$=-x\sqrt{\frac{2\alpha}{R}}\,[v-\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})].$$

Итак, в нашем движении

$$\psi=\nu\sqrt{\frac{2R}{\alpha}}\,\{v-3\,\mathrm{th}\,v-\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{6}\}, \quad (33.19)$$

где

$$v=\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\frac{y}{x}\sqrt{\frac{R}{2\alpha}}. \quad (33.20)$$

Для определения v_x имеем формулу (33.18), дающую:

$$v_x=\frac{Q}{\alpha x}\left\{3\,\mathrm{th}^2\left[\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\frac{y}{x}\sqrt{\frac{R}{2\alpha}}\right]-2\right\} \quad (33.21)$$

и совершенно тождественную с (33.11), если учесть перемену обозначений (x заменено у нас на $-x$, а v_x на $-v_x$).

В задаче о диффузоре для скорости течения на внешней границе пограничного слоя мы имели выражение

$$U=\frac{k}{x}.$$

Более общий случай, когда

$$U=kx^m, \quad (33.22)$$

допускает совершенно аналогичную трактовку вопроса [1]). А именно, вместо (33.2) мы будем иметь:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=mk^2x^{2m-1}+\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}.$$

Полагая

$$\xi=yx^{\frac{m-1}{2}};\quad \psi=x^{\frac{m+1}{2}}\zeta(\xi), \tag{33.23}$$

мы получим для определения $\zeta(\xi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$m\zeta'^2-\frac{m+1}{2}\zeta\zeta''-\nu\zeta'''-mk^2=0 \tag{33.24}$$

при граничных условиях

$$\zeta(0)=\zeta'(0)=0;\quad \zeta'(\infty)=k.$$

Не останавливаясь на дальнейшем рассмотрении получающегося течения, заметим только, что два частных случая, в которых уравнение (33.24) сильно упрощается, а именно, случаи $m=0$ (плоская пластинка) и $m=-1$ (диффузор), нами уже изучены.

Рассмотрим теперь задачу о плоском установившемся движении вязкой жидкости в виде струи, исходящей из узкого отверстия [2]). Пусть в покоящейся жидкости, расположенной справа от оси Oy, распространяется струя жидкости, исходящая из узкого отверстия, находящегося в начале координат, и имеющая ось Ox осью симметрии. Так как поперечные размеры струи весьма малы по сравнению с продольными, то мы можем применить уравнения теории пограничного слоя. Конечно, как и в случае пластинки, полученные результаты будут пригодны, только начиная с некоторого удаления от начала координат.

В виду того что в покоящейся жидкости мы имеем постоянное давление и, следовательно, отсутствие градиента давления, то для функции тока $\psi(x, y)$ мы получаем то же уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}, \tag{33.25}$$

как и в случае обтекания пластинки равномерным потоком. Однако граничные условия будут теперь другими. А именно, на оси Ox мы имеем условия:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}=0,\quad v_y=0\quad\text{при}\quad y=0, \tag{33.26}$$

---

[1]) Falkner V. M. и Skan Sylvia W., Some approximate solutions of the boundary layer equations, Aeronautical Research Committee, Reports and Memoranda, № 1314, 1930.

[2]) Schlichting H., Laminare Strahlausbreitung, Zeitschr. für angew. Math. und Mech., 13 (1933), стр. 260—263 и Bikeley W. G., The plane jet, Phil. Mag., 23 (1937), № 156, стр. 727—731.

вытекающие из симметрии движения относительно оси Ox. Условие на бесконечности в данном случае принимает вид:

$$v_x \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty, \tag{33.27}$$

так как основной поток отсутствует и, следовательно, $U = 0$.

Докажем теперь, что количество движения жидкости, проходящее через каждую прямую $x = x_0$, будет постоянной величиной, не зависящей от x_0. В самом деле, через элемент dy прямой $x = x_0$ проходит масса жидкости $\rho v_x\, dy$, несущая количество движения $\rho v_x v\, dy$, проекция которого на ось Ox равна $\rho v_x^2\, dy$. Вследствие симметрии, нам достаточно найти проекцию количества движения жидкости на ось Ox; эта проекция имеет величину

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \rho v_x^2\, dy = 2\int_0^{\infty} \rho v_x^2\, dy. \tag{33.28}$$

Но из уравнения (30.16), в котором надо положить $U = 0$, $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$, $g = -v_x$, следует, что

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} v_x^2\, dy = 0,$$

ибо первый член в левой части уравнения (30.16) пропадает вследствие стационарности движения. Итак,

$$\int_0^{\infty} v_x^2\, dy = \text{const.}, \tag{33.29}$$

т. е. количество движения жидкости M имеет действительно постоянное значение.

Чтобы решить уравнение (33.25), положим, обобщая приём Блазиуса, упомянутый в § 32,

$$\xi = x^{\alpha} y; \quad \psi = x^{\beta}\zeta(\xi).$$

Обозначая штрихами производные по ξ, легко найдём, что

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = x^{\alpha+\beta}\zeta', & v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -x^{\beta-1}(\alpha\xi\zeta' + \beta\zeta), \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = x^{2\alpha+\beta}\zeta'', & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} &= x^{\alpha+\beta-1}(\alpha\xi\zeta'' + \alpha\zeta' + \beta\zeta'), \\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= x^{3\alpha+\beta}\zeta''', \end{aligned}\right\} \tag{33.30}$$

Поэтому уравнение (33.25) принимает вид:

$$x^{2\alpha+2\beta-1}\left[(\alpha+\beta)\zeta'^2-\beta\zeta\zeta''\right]=\nu x^{3\alpha+\beta}\zeta'''. \tag{33.31}$$

Мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения ζ, если примем, что

$$2\alpha+2\beta-1=3\alpha+\beta,$$

откуда

$$\beta=\alpha+1.$$

С другой стороны, условие

$$2\int_0^\infty \rho v_x^2\,dy=M$$

приводит к равенству

$$2\rho x^{\alpha+2\beta}\int_0^\infty \zeta'^2\,d\xi=M, \tag{33.32}$$

и так как M не зависит от x, то необходимо положить

$$\alpha+2\beta=0.$$

Решая два полученных уравнения для α и β, находим

$$\alpha=-\frac{2}{3};\quad \beta=\frac{1}{3}.$$

Итак, если мы примем, что

$$\xi=yx^{-2/3},\quad \psi=x^{1/3}\zeta(\xi), \tag{33.33}$$

то для определения $\zeta(\xi)$ мы будем иметь вытекающее из (33.31) уравнение

$$\zeta'^2+\zeta\zeta''+3\nu\zeta'''=0. \tag{33.34}$$

Из (33.26), (33.27) и (33.30) вытекают граничные условия, которым должна удовлетворять функция $\zeta(\xi)$:

$$\left.\begin{aligned}\zeta=0,\quad \zeta''=0 \quad &\text{при} \quad \xi=0,\\ \zeta'\to 0 \quad &\text{»} \quad \xi\to\infty.\end{aligned}\right\} \tag{33.35}$$

Уравнение (33.34) очень легко интегрируется

$$\zeta\zeta'+3\nu\zeta''=C_1.$$

Из условий (33.35) следует, что надо принять $C_1=0$, так что

$$\zeta\zeta'+3\nu\zeta''=0.$$

Это уравнение опять-таки сразу интегрируется

$$\frac{\zeta^2}{2} + 3\nu\zeta' = C_2.$$

Так как $\zeta' \to 0$ при $\xi \to \infty$, то значение C_2 неотрицательно, положим поэтому

$$C_2 = \frac{b^2}{2}.$$

Итак,

$$6\nu\zeta' = b^2 - \zeta^2, \quad \text{или} \quad \frac{2d\zeta}{b^2 - \zeta^2} = \frac{d\xi}{3\nu};$$

интегрируя это уравнение, находим:

$$\ln \frac{b+\zeta}{b-\zeta} = \frac{b\xi}{3\nu} + C_3.$$

Так как $\zeta = 0$ при $\xi = 0$, то $C_3 = 0$. Поэтому

$$\frac{b+\zeta}{b-\zeta} = e^{\frac{b\xi}{3\nu}}, \qquad \zeta = b\,\frac{e^{\frac{b\xi}{3\nu}} - 1}{e^{\frac{b\xi}{3\nu}} + 1} = b \operatorname{th} \frac{b\xi}{6\nu}.$$

Для сокращения письма положим:

$$b = 6\nu a,$$

тогда находим окончательный результат

$$\zeta(\xi) = 6\nu a \operatorname{th} a\xi. \tag{33.36}$$

Величина a легко выражается через M путём использования формулы (33.32):

$$M = 2\rho \int_0^\infty \zeta'^2\, d\xi;$$

но

$$\zeta' = \frac{b^2 - \zeta^2}{6\nu} = 6\nu a^2 - \frac{1}{6\nu}\zeta^2; \quad \zeta'\, d\xi = d\zeta; \quad \zeta(0) = 0; \quad \zeta(\infty) = 6\nu a,$$

поэтому

$$M = 2\rho \int_0^{6\nu a} \left(6\nu a^2 - \frac{1}{6\nu}\zeta^2\right) d\zeta = 48\rho\nu^2 a^3. \tag{33.37}$$

Итак,

$$a = \sqrt[3]{\frac{M}{48\rho\nu^2}}. \tag{33.38}$$

Пользуясь выражениями (33.36) и (33.33) для $\zeta(\xi)$, получаем:

$$\psi(x,\ y) = 6a\nu x^{1/3}\,\mathrm{th}\,(ayx^{-2/3}). \tag{33.39}$$

Для проекций скорости легко находим выражения

$$v_x = \frac{6\nu a^2 x^{-1/2}}{\mathrm{ch}^2\,(ayx^{-2/3})},$$

$$v_y = 2\nu a\left[\frac{2ayx^{-4/3}}{\mathrm{ch}^2\,(ayx^{-2/3})} - x^{-2/3}\,\mathrm{th}\,(ayx^{-2/3})\right]. \tag{33.40}$$

Рис. 178 даёт построенные на основе этих выражений линии тока и зависимость составляющей скорости v_x от y в трёх сечениях струи. Из неё ясно видно, как струя постепенно захватывает всё большее и большее количество жидкости. Легко проверить это и аналитически. Количество жидкости, протекающей через прямую, параллельную оси Oy и отстоящую от неё на расстоянии x, очевидно, равно

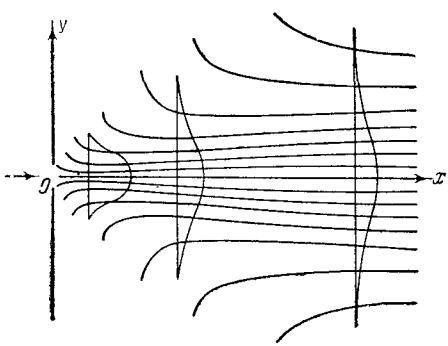

Рис. 178.

$$Q = \rho\int_{-\infty}^{\infty} v_x\,dy = 2\rho\int_0^{\infty} v_x\,dy =$$

$$= 2\rho x^{1/3}\int_0^{\infty}\zeta'\,d\xi = 2\rho x^{1/3}\zeta(\infty);$$

но

$$\zeta(\infty) = 6\nu a,$$

и, следовательно,

$$Q = 12\rho\nu a x^{1/3}. \tag{33.41}$$

Этот процесс связан с подтеканием жидкости к оси Ox, и действительно, легко видеть, что

$$\lim_{y\to+\infty} v_y = -2\nu a x^{-2/3};\qquad \lim_{y\to-\infty} v_y = 2\nu a x^{-2/3};$$

это подтекание наиболее интенсивно в непосредственной близости от оси Oy и убывает по мере возрастания x.

§ 34. Приближённые методы теории пограничного слоя. Отрыв слоя. Метод Кочина — Лойцянского. Мы уже упоминали выше, при общем описании теории пограничного слоя, что следствием этой теории является возможность срыва вихрей с поверхности обтекаемого тела. Этот факт имеет кардинальную важность: в самом деле, в предыдущих главах, при изучении движений идеальной жидкости, рассматривались такие теории, в которых необходимым элементом является наличие вихрей или, вообще, циркуляций, отличных от нуля,

как, например, теория вихревых цепочек Кармана или теория обтекания контура плоским потенциальным циркуляционным потоком несжимаемой жидкости. В рамках самих этих теорий наличие таких циркуляций, отличных от нуля, не может быть обосновано, ибо, как мы знаем, в рассматриваемых условиях, т. е. когда жидкость идеальна и несжимаема, а силы консервативны, вихреобразование невозможно.

Таким образом, с рассматриваемой точки зрения, значение теории пограничного слоя состоит в том, что она объясняет появление вихрей в жидкости и тем делает более обоснованными некоторые схемы движений идеальной жидкости, вроде вышеупомянутых.

Нетрудно теперь установить условия для отрыва слоя. Обозначим через x_0 координату точки отрыва; рассматривая кривые распределения скорости (рис. 172, стр. 543) в различных точках обтекаемого контура, мы видим, что отрыв слоя происходит в той точке M_3, в которой происходит смена прямого течения на возвратное. Но на самом контуре $v_x = 0$, вблизи же контура $v_x > 0$ для $x < x_0$ и $v_x < 0$ для $x > x_0$ (предполагаем, что основное течение происходит в направлении возрастающих значений x). Поэтому

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} > 0 \quad \text{для} \quad x < x_0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} < 0 \quad \text{для} \quad x > x_0.$$

Ясно, что место отрыва слоя должно определяться формулой:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.$$

Установим ещё одно условие, которое должно выполняться для того, чтобы отрыв слоя был возможен. В самом деле, в той точке контура M_3, в которой происходит отрыв, во всяком случае должно быть

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} > 0, \tag{34.1}$$

ибо профиль скоростей обращён в этой точке своей вогнутостью в направлении течения. Во внешней части пограничного слоя знак кривизны меняется, и следовательно, в какой-то из точек профиля скоростей мы должны иметь точку перегиба. Условие (34.1), относящееся к точке M_3, имеет простое динамическое истолкование. В самом деле, в точках контура $v_x = v_y = 0$, поэтому основное уравнение теории пограничного слоя для случая установившегося движения (29.9) даёт нам, что в точке M_3

$$\frac{\partial p}{\partial x} > 0.$$

Итак, для возможности отрыва слоя необходимо, чтобы на некотором участке контура давление возрастало, а так как во внешнем

потенциальном потоке давление p и скорость U связаны формулой

$$p+\frac{\rho U^2}{2}=\text{const.},$$

то предыдущее условие равносильно тому, чтобы на некотором участке контура происходило замедление основного движения.

Отметим ещё то обстоятельство, что при заданном распределении давления место отрыва слоя определяется однозначно и, следовательно, не зависит от числа Рейнольдса, если только последнее не скажется на распределении давления в окружающем потоке. Напротив, угол, под которым линия отрыва слоя M_3N (рис. 172) наклонена к контуру AKB, будет тем меньше, чем больше число Рейнольдса. В самом деле, мы знаем, что при увеличении числа Рейнольдса R толщина пограничного слоя изменяется обратно пропорционально корню квадратному из числа Рейнольдса; также будет изменяться и угол NM_3B. В пределе при безграничном увеличении числа Рейнольдса толщина пограничного слоя обратится в нуль, место отрыва слоя останется без изменения, и срыв вихрей будет происходить по линии, касательной к контуру.

Для нахождения течения в пограничном слое и для определения точки отрыва имеется ряд приближённых методов. Мы остановимся только на некоторых из них.

В способе Блазиуса предполагается, что мы имеем дело с обтеканием симметричного контура бесциркуляционным установившимся потоком, имеющим на бесконечности скорость, параллельную оси симметрии. При этих условиях, обозначая через x длину дуги контура от точки разветвления потока, будем иметь, что U есть нечётная функция от x, разложение которой в ряд Тейлора есть

$$U=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\ldots \tag{34.2}$$

Простое вычисление позволяет теперь определить

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=U\frac{dU}{dx}=a_1^2x+4a_1a_3x^3+\left(6a_1a_5+3a_3^2\right)x^5+\ldots$$

Вводя функцию тока $\Psi(x,\ y)$, так что

$$v_x=\frac{\partial\Psi}{\partial y},\qquad v_y=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \tag{34.3}$$

напишем основное уравнение Прандтля в следующем виде:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=$$
$$=\nu\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3}+a_1^2x+4a_1a_3x^3+\left(6a_1a_5+3a_3^2\right)x^5+\ldots \tag{34.4}$$

Ищем формально решение этого уравнения в виде

$$\Psi=x\psi_1(y)+x^3\psi_3(y)+x^5\varphi_5(y)+\ldots, \tag{34.5}$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3, ... суть функции одного только y. Слово «формально» мы прибавляем потому, что на самом деле неизвестно даже, можно ли разложить Ψ в ряд вида (34.5).

Подставляя разложение (34.5) в уравнение и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем ряд равенств, из которых мы выпишем только первые три:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1'^2 - \psi_1\psi_1'' &= \nu\psi_1''' + a_1^2, \\ 4\psi_1'\psi_3' - 3\psi_1''\psi_3 - \psi_1\psi_3'' &= \nu\psi_3''' + 4a_1a_3, \\ 6\psi_1'\psi_5' - 5\psi_1''\psi_5 - \psi_1\psi_5'' &= \nu\psi_5''' - 3\psi_3'^2 + 3\psi_3\psi_3'' + 6a_1a_5 + 3a_3^2. \end{aligned}\right\} \quad (34.6)$$

Граничные условия

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad v_x = U \quad \text{при} \quad y = \infty$$

дают для ψ_1, ψ_3 и ψ_5 следующие граничные значения:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(0) = \psi_1'(0) = 0, \quad \psi_1'(\infty) = a_1; \qquad \psi_3(0) = \psi_3'(0) = 0, \\ &\psi_3'(\infty) = a_3; \qquad \psi_5(0) = \psi_5'(0) = 0, \qquad \psi_5'(\infty) = a_5. \end{aligned}\right\} \quad (34.7)$$

Введём теперь безразмерные величины, полагая

$$\left.\begin{aligned} &y = \eta\sqrt{\frac{\nu}{a_1}}, \quad \psi_1 = \sqrt{a_1\nu}\,f_1(\eta), \quad \psi_3 = 4a_3\sqrt{\frac{\nu}{a_1}}\,f_3(\eta), \\ &\psi_5 = 6a_5\sqrt{\frac{\nu}{a_1}}\left[g_5(\eta) + \frac{a_3^2}{a_1a_5}\,h_5(\eta)\right]; \end{aligned}\right\} \quad 34.8)$$

тогда уравнения (34.6) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} f_1'^2 - f_1''f_1 &= f_1''' + 1, \\ 4f_1'f_3' - 3f_1''f_3 - f_1f_3'' &= 1 + f_3''', \\ 6f_1'g_5' - 5f_1''g_5 - f_1g_5'' &= 1 + g_5''', \\ 6f_1'h_5' - 5f_1''h_5 - f_1h_5'' &= \frac{1}{2} + h_5''' - 8\left(f_3'^2 - f_3f_3''\right), \end{aligned}\right\} \quad (34.9)$$

а граничные условия (34.7) обратятся в

$$\left.\begin{aligned} &f_1(0) = f_1'(0) = 0; \quad f_1'(\infty) = 1; \quad f_3(0) = f_3'(0) = 0; \\ &f_3'(\infty) = \frac{1}{4}; \quad g_5(0) = g_5'(0) = 0; \quad g_5'(\infty) = \frac{1}{6}; \\ &h_5(0) = h_5'(0) = h_5'(\infty) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (34.10)$$

Задавая $f_1''(0)$, можно численно проинтегрировать первое из уравнений (34.9); путём проб можно определить то значение $f_1''(0)$, при котором окажется выполненным граничное условие $f_1'(\infty) = 1$,

Совершенно так же можно поступить с остальными уравнениями (34.9). В результате получается следующая таблица значений $f_1'(\eta)$, $f_3'(\eta)$, $g_5'(\eta)$ и $h_5'(\eta)$:

Таблица V

η	$f_1'(\eta)$	$f_3'(\eta)$	$g_5'(\eta)$	$h_5'(\eta)$	η	$f_1'(\eta)$	$f_3'(\eta)$	$g_5'(\eta)$	$h_5'(\eta)$
0	0,0000	0,000	0,00	0,00	1,6	0,9324	0,298	0,21	—0,05
0,2	0,2266	0,125	0,11	0,01	1,8	0,9569	0,288	0,20	—0,05
0,4	0,4144	0,213	0,18	0,01	2,0	0,9732	0,278	0,19	—0,04
0,6	0,5662	0,269	0,22	0,00	2,2	0,9841	0,269	0,18	—0,03
0,8	0,6859	0,300	0,24	—0,02	2,4	0,9905	0,263	0,18	—0,03
1,0	0,7778	0,313	0,24	—0,03	2,6	0,9946	0,258	0,18	—0,02
1,2	0,8467	0,313	0,24	—0,05	2,8	0,9971	0,256	0,17	0,00
1,4	0,8968	0,307	0,23	—0,05	3,0	0,9985	0,253	0,17	0,00

Совершенно аналогично определяются следующие члены разложения (34.5).

Тот же самый метод может быть применён и к более общему случаю, когда распределение скорости на внешней границе пограничного слоя даётся вместо (34.2) формулой

$$U = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \tag{34.11}$$

Конечно, в этом случае вместо (34.5) надо полагать:

$$\Psi = x\psi_1(y) + x^2\psi_2(y) + x^3\psi_3(y) + \ldots \tag{34.12}$$

Возвращаемся к рассматриваемому нами случаю. Распределение скоростей в пограничном слое выражается, если мы ограничимся только тремя членами в (34.5), формулой

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = x\psi_1'(y) + x^3\psi_3'(y) + x^5\psi_5'(y) =$$

$$= a_1 x f_1'(\eta) + 4a_3 x^3 f_3'(\eta) + 6a_5 x^5 g_5'(\eta) + 6\frac{a_3^2}{a_1} x^5 h_5'(\eta). \tag{34.13}$$

Условие для отрыва слоя

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \tag{34.14}$$

приводит к соотношению

$$a_1 x f_1''(0) + 4a_3 x^3 f_3''(0) + 6a_5 x^5 g_5''(0) + 6\frac{a_3^2}{a_1} x^5 h_5''(0) = 0,$$

но $f_1''(0) = 1{,}23264$, $f_3''(0) = 0{,}7246$, $g_5''(0) = 0{,}637$, $h_5''(0) = -0{,}12$, следовательно, для определения места отрыва получается биквадратное уравнение

$$1{,}23264\, a_1 + 2{,}8984\, a_3 x^2 + \left(3{,}822\, a_5 + 0{,}72\, \frac{a_3^2}{a_1}\right) x^4 = 0. \quad (34.15)$$

Применим этот результат к круговому цилиндру.

Хименц [1]) нашёл экспериментальным путём распределение давления вдоль контура цилиндра диаметром 9,75 *см* при обтекании его водяным потоком, имеющим скорость 19,2 *см/сек*. Исходя из этого распределения давления, Хименц получил следующее распределение скорости:

$$U = 7{,}151\, x - 0{,}04497\, x^3 - 0{,}00033\, x^5, \quad (34.16)$$

где U даётся в *см/сек*, x есть длина дуги цилиндра от точки разветвления, измеренная в сантиметрах. Применяя уравнение (34.15), находим для точки отрыва $x_0 = 6{,}97$ *см*, что даёт в угловой мере $\theta = 82^\circ$, в согласии со значением, получающимся из опыта.

Другой приближённый метод, который мы изложим, основан на применении интегрального соотношения Кармана и его обобщений и был уже использован в § 32 при рассмотрении пограничного слоя вдоль плоской пластинки. Сущность метода в применении к этому последнему случаю заключалась в том, что распределение скорости внутри пограничного слоя задавалось формулой

$$v_x = U f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right),$$

и затем из интегрального соотношения Кармана получалось уравнение для определения функции $\delta(x)$. Таким образом, в этом примере профили скорости в различных точках контура предполагались подобными между собой, и менялся только масштаб.

В общем случае такое предположение недостаточно, и необходимо рассматривать более общий класс профилей.

Из основных уравнений теории пограничного слоя

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = U\frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (34.17)$$

[1]) Hiemenz K., Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder, Dinglers Polytechnisches Journal, **326**, 1911.

и из того, что на контуре $v_x = v_y = 0$, без труда получим, что на контуре имеют место соотношения:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{U}{\nu}\frac{dU}{dx}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0;$$

продифференцировав же первое из уравнений (34.17) по y, найдём, что на контуре будет также

$$\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} = 0.$$

Итак, должны выполняться условия

$$v_x = 0, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{UU'}{\nu}; \quad \frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \tag{34.18}$$

Обозначая толщину пограничного слоя через δ, условия плавного перехода скорости пограничного слоя в скорость внешнего потенциального течения можно записать в виде ряда равенств:

$$v_x = U, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0, \quad \ldots, \quad \text{при} \quad y = \delta. \tag{34.19}$$

Положив

$$\eta = \frac{y}{\delta},$$

примем, следуя Польгаузену, что v_x представляется полиномом четвёртой степени от η:

$$v_x = U(A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3 + A_4\eta^4).$$

Для определения пяти коэффициентов этого полинома воспользуемся двумя первыми условиями (34.18) и тремя первыми условиями (34.19), тогда получим:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 2 + \frac{1}{6}\frac{\delta^2 U'}{\nu}, \quad A_2 = -\frac{\delta^2 U'}{2\nu}, \quad A_3 = -2 + \frac{\delta^2 U'}{2\nu},$$

$$A_4 = 1 - \frac{1}{6}\frac{\delta^2 U'}{\nu}.$$

Введём обозначение

$$\lambda(x) = \frac{\delta^2 U'(x)}{\nu},$$

тогда, после простых вычислений, найдём:

$$q = U - v_x = U(1-\eta)^3\left(1 + \frac{6-\lambda}{6}\eta\right). \tag{34.20}$$

Остаётся определить $\delta(x)$ или, что то же, $\lambda(x)$, для чего воспользуемся интегральным соотношением Кармана (30.7)

$$U\frac{d}{dx}\int_0^\delta q\,dy + 2U'\int_0^\delta q\,dy - \frac{d}{dx}\int_0^\delta q^2\,dy = \nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{34.21}$$

Произведя соответствующие вычисления, получим для определения функции

$$z(x)=\frac{\delta^2(x)}{\nu}=\frac{\lambda(x)}{U'(x)} \tag{34.22}$$

следующее дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{g(\lambda)}{U}+\frac{U''}{U'^2}f(\lambda), \tag{34.23}$$

где

$$g(\lambda)=\frac{0{,}8\,[-\lambda^3-47{,}4\lambda^2+1670{,}4\lambda-9072]}{\lambda^2+5{,}76\lambda-213{,}12};$$

$$f(\lambda)=\frac{0{,}8\,[4{,}8\lambda^2+\lambda^3]}{213{,}12-5{,}76\lambda-\lambda^2},$$

причём λ надо заменить на zU'.

Интегрируя полученное уравнение, для чего надо знать начальное значение $\delta(0)$, найдём $\delta(x)$ и, следовательно, $\lambda(x)$, после чего можем определить все элементы движения. Затруднение возникает в том случае, если в начальной точке пограничного слоя мы имеем критическую точку, т. е. если $U(0)=0$. Чтобы правая часть в уравнении (34.23) оставалась конечной, необходимо, чтобы $\lambda(0)$ было корнем уравнения $g(\lambda)=0$. Корнями последнего уравнения являются 7,052; 17,75 и 70. Последний корень не годится, если $U'(0)>0$ и нужно принять

$$\lambda(0)=7{,}052,\quad \delta(0)=\sqrt{\frac{7{,}052\nu}{U'(0)}}=2{,}65\sqrt{\frac{\nu}{U'(0)}},$$

чтобы между критической точкой и точкой минимума давления, в которой $U'=0$, и следовательно, $\lambda=0$, не лежала точка $\lambda=12$, в которой правая часть (34.23) обращается в бесконечность. Условие для отрыва потока

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}=0 \quad \text{при} \quad y=0$$

приводится к обращению в нуль коэффициента A_1, что будет при $\lambda=-12$.

Вычислим ещё толщину вытеснения

$$\delta^*=\frac{1}{U}\int_0^{\delta}(U-v_x)\,dy=\delta\left(\frac{3}{10}-\frac{\lambda}{120}\right). \tag{34.24}$$

Только что изложенный метод, применённый к круговому цилиндру, даёт для рассмотренного Хименцем случая почти то же положение точки отрыва, какое получилось у Хименца. Однако распределение скоростей получается менее удовлетворительным, особенно в области за точкой минимума давления.

Можно думать, что только что рассмотренный метод даёт более или менее приемлемые результаты только в области ускоренного движения, где давление падает. Дело в том, что профиль скоростей должен удовлетворять при $y = 0$ бесчисленному множеству условий, первыми из которых являются три условия (34.18). Принятое же распределение скоростей удовлетворяет только двум первым из этих условий. Получается сравнительно малое разнообразие профилей скоростей, что сильно ограничивает область применения метода.

Конечно, метод можно различными способами видоизменять. Можно, например, взять три условия (34.18) и два первых условия (34.19).

Можно, определяя распределение скоростей полиномом четвёртой степени, взять два условия (34.18) и два условия (34.19), тогда наряду с λ появится ещё один параметр и можно использовать вместе с интегральным соотношением Кармана (30.7) интегральное соотношение Лейбензона (30.18). Можно также использовать вместо полиномов другие функции и т. д.

В частности, мы должны ожидать гораздо лучших результатов, если возьмём набор профилей, получающихся при решении какой-либо частной задачи из теории пограничного слоя. В самом деле, в этом случае автоматически удовлетворяются три условия (34.18) и, кроме того, все условия (34.19). В этом состоит, по существу, идея метода, предложенного Хауэрсом [1]). Сначала решается некоторая частная задача, относящаяся к тому случаю, когда скорость внешнего потока определяется линейной функцией

$$U = b_0 - b_1 x, \quad b_0 > 0, \ b_1 > 0.$$

После введения функции тока $\Psi(x, y)$ первое из уравнений (34.17) примет в рассматриваемом случае вид:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} - b_1 (b_0 - b_1 x). \tag{34.25}$$

Положим теперь

$$\xi = \frac{b_1 x}{b_0}, \quad \eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b_0}{\nu x}}\, y \tag{34.26}$$

и будем искать функцию тока в виде ряда

$$\Psi(x, y) = \sqrt{b_0 x \nu}\, f(\xi, \eta) =$$
$$= \sqrt{b_0 x \nu}\,\{f_0(\eta) - 8\xi f_1(\eta) + (8\xi)^2 f_2(\eta) - \ldots\}, \tag{34.27}$$

так что

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{2} b_0 \{f_0'(\eta) - 8\xi f_1'(\eta) + (8\xi)^2 f_2'(\eta) - \ldots\} \tag{34.28}$$

---

[1]) Howarth, On the solution of the laminar boundary layer equations, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A., 164 (1938), № 919, стр. 547—579.

Подставляя это разложение в уравнение (34.25) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ, получаем ряд равенств, из которых первые три имеют вид:

$$f_0''' + f_0 f_0'' = 0,$$

$$f''' + f_0 f_1'' - 2f_0' f_1' + 3f_0' f_1 = -1,$$

$$f''' + f_0 f_2'' - 4f_0' f_2' + 5f_0'' f_2 = -\frac{1}{8} + 2f_1'^2 - 3f_1 f_1''.$$

Граничные условия

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad v_x = U = b_0 - b_1 x \quad \text{при} \quad y = \infty$$

приводят к следующим пограничным условиям для функции f_k:

$$f_k(0) = 0, \quad f_k'(0) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$f_0'(\infty) = 2, \quad f_1'(\infty) = \frac{1}{4}, \quad f_k'(\infty) = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Для функции $f_0(\eta)$ получилось то же самое уравнение и те же граничные условия, что и для функции $\zeta(2\eta)$ в § 32; следовательно, эти две функции совпадают. Для остальных функций f_1, f_2, ... получились линейные неоднородные уравнения, которые могут быть численно проинтегрированы. Главная трудность заключается в отыскании таких значений вторых производных этих функций при $\eta = 0$, чтобы получились требуемые значения первых производных при $\eta = \infty$. Этими значениями являются

$$f_0'' = 1{,}32824, \quad f_1'' = 1{,}02054, \quad f_2'' = -0{,}06926,$$

$$f_3'' = 0{,}0560, \quad f_4'' = -0{,}0372, \quad f_5'' = 0{,}0272,$$

$$f_6'' = -0{,}0212, \quad f_7'' = 0{,}0174, \quad f_8'' = -0{,}0147.$$

Для определения места отрыва из условия

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0$$

получается равенство

$$f_0''(0) - 8\xi f_1''(0) + (8\xi)^2 f_2''(0) - \ldots = 0,$$

однако полученные ряды не обеспечивают достаточной точности вблизи места отрыва. В результате дополнительных вычислений Хауэрс нашёл для места отрыва значение $\xi = 0{,}120$.

Давая ξ все значения от 0 до 0,120 и определяя

$$\frac{v_x}{U} = \frac{1}{2} \frac{f_\eta'(\xi, \eta)}{1 - \xi}$$

по формуле (34.28), мы получаем набор профилей скоростей, зависящих от одного параметра. Дадим таблицу, определяющую одиннадцать таких профилей.

Таблица VI

Значения величины $\frac{v_x}{U} \cdot 100$

η \ ξ	0	0,0125	0,0250	0,0375	0,0500	0,0625	0,0750	0,0875	0,1000	0,1125	0,1200
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	133	125	117	108	99	89	78	66	52	34	10
0,4	265	251	237	222	205	188	168	146	120	85	38
0,6	394	377	358	338	317	293	267	237	202	152	85
0,8	517	498	477	455	430	403	372	337	294	234	149
1,0	630	611	590	567	541	513	480	442	394	325	227
1,2	729	711	692	670	645	617	585	546	498	426	318
1,4	812	796	779	760	738	712	682	646	598	527	416
1,6	876	864	850	834	815	794	769	736	692	625	517
1,8	923	914	904	891	877	860	839	812	776	716	616
2,0	956	949	942	934	923	910	894	872	844	794	708
2,2	976	972	967	962	954	946	934	918	897	858	787
2,4	988	985	983	979	975	969	961	951	936	908	853
2,6	994	993	991	990	987	984	979	972	962	943	903
2,8	998	997	996	995	994	992	989	985	978	967	940
3,0	999	998	998	998	997	996	995	992	989	982	965
3,2	999	999	999	999	999	999	998	997	994	991	981
3,4	1000	1000	1000	1000	1000	1000	999	999	998	995	990
3,6	—	—	—	—	—	—	1000	1000	999	998	995
3,8	—	—	—	—	—	—	—	—	1000	999	998
4,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1000	999
4,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1000

Для применения полученного набора профилей необходимо составить характеристики этих профилей. А именно, нам понадобятся прежде всего величины

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{2} b_0 f''_{\eta\eta}(\xi, 0) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b_0}{\nu x}} = \frac{1}{4} \frac{b_0 \sqrt{b_1}}{\sqrt{\nu}} \frac{1}{\sqrt{\xi}} f''_{\eta\eta}(\xi, 0);$$

выражая b_0 и b_1 через скорость U и её производную U', получим:

$$b_1 = -U'; \quad b_0(1-\xi) = U,$$

поэтому величина

$$\sqrt{\frac{\nu}{-U'}} \frac{1}{U} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{4(1-\xi)} \frac{1}{\sqrt{\xi}} f''_{\eta\eta}(\xi, 0) = F(\xi) \quad (34.29)$$

зависит только от ξ. Составим затем выражение для толщины вытеснения

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy = \int_0^\infty \left[1 - \frac{1}{2}\frac{f'_{\eta_1}(\xi, \eta_1)}{(1-\xi)}\right] 2\sqrt{\frac{\nu x}{b_0}}\, d\eta =$$

$$= \sqrt{\frac{\nu\xi}{-U'}} \int_0^\infty \left(2 - \frac{f'_{\eta_1}(\xi, \eta_1)}{1-\xi}\right) d\eta;$$

таким образом, величина

$$\sqrt{-\frac{U'}{\nu}}\,\delta^* = \sqrt{\xi}\int_0^\infty \left(2 - \frac{f'_{\eta_1}(\xi, \eta_1)}{1-\xi}\right) d\eta = G(\xi) \qquad (34.30)$$

тоже зависит только от ξ. Составим также толщину потери импульса δ^{**}:

$$\sqrt{-\frac{U'}{\nu}}\,\delta^{**} = \sqrt{-\frac{U'}{\nu}} \int_0^\infty \frac{v_x}{U}\left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\xi}\int_0^\infty \frac{f'_{\eta_1}(\xi, \eta_1)}{1-\xi}\left[2 - \frac{f'_{\eta_1}(\xi, \eta_1)}{1-\xi}\right] d\eta = \chi(\xi) \qquad (34.31)$$

это также будет функция одного ξ.

Вставляя выражения

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\nu}{-U'}}\, G(\xi), \qquad \delta^{**} = \sqrt{\frac{\nu}{-U'}}\, \chi(\xi) \qquad (34.32)$$

и

$$\tau_0 = \rho\nu\left(\frac{\partial U_x}{\partial y}\right) = \nu U \rho \sqrt{-\frac{U'}{\nu}}\, F(\xi) \qquad (34.33)$$

в уравнение Кармана, взятое в форме Прандтля (30.16), и вспоминая, что в нашем случае

$$U = b_0(1-\xi), \quad U' = -b_1, \quad x = \frac{b_0}{b_1}\xi, \qquad (33.34)$$

получим следующее соотношение

$$(1-\xi)\chi'(\xi) - 2\chi(\xi) - G(\xi) = F(\xi). \qquad (34.35)$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $\chi(0) = 0$, вытекающем из (34.31), найдём:

$$\chi(\xi) = \frac{1}{(1-\xi)^2}\int_0^\xi [G(\xi) + F(\xi)](1-\xi)\, d\xi. \qquad (34.36)$$

При малых ξ главной частью подынтегральной функции будет, как следует из (34.29) и (34.30):

$$\frac{1}{4\sqrt{\xi}} f_0''(0) = \frac{0{,}33206}{\sqrt{\xi}}, \tag{34.37}$$

поэтому при малых ξ первым членом разложения в ряд функции $\chi(\xi)$ будет

$$\chi(\xi) = \alpha\sqrt{\xi}, \quad \alpha = 0{,}664\ldots \tag{34.38}$$

Нижеследующая таблица даёт для ряда значений ξ функции F, G, χ, χ' и χ/χ'.

Таблица VII

ξ	$F=\sqrt{\frac{\nu}{-U'}}\frac{1}{U}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0$	$G=\sqrt{\frac{-U'}{\nu}}\delta^*$	χ	χ'	χ/χ'
0,0000	∞	0,0000	0,000	∞	0,000
0,0125	2,773	0,199	0,076	3,16	0,024
0,0250	1,817	0,292	0,110	2,39	0,046
0,0375	1,360	0,371	0,137	2,08	0,066
0,0500	1,064	0,447	0,162	1,93	0,084
0,0625	0,843	0,523	0,186	1,85	0,100
0,0750	0,663	0,603	0,209	1,82	0,115
0,0875	0,503	0,691	0,231	1,81	0,128
0,1000	0,345	0,794	0,254	1,83	0,139
0,1125	0,184	0,931	0,276	1,88	0,147
0,1200	0,000	1,110	0,290	1,92	0,151

Мы можем теперь применить полученный набор профилей для определения движения в произвольном пограничном слое в той области последнего, в которой давление возрастает. Скорость внешнего потока $U(x)$ предполагается, таким образом, убывающей функцией от x. Решение основывается на предположении, что профиль скорости, соответствующий некоторой точке контура, полностью определяется значениями U, U' и δ^{**} в этой точке и совпадает с соответствующим профилем нашего набора, т. е. с тем профилем, для которого U, U' и δ^{**} имеют заданные значения. Этот последний профиль определяется следующим образом. По U' и δ^{**} находим:

$$\chi = \sqrt{\frac{-U'}{\nu}}\delta^{**},$$

после чего по вышеприведённой таблице определяем ξ.

Параметры b_0, b_1 и x определяются очевидными формулами:

$$b_1 = -U'; \quad b_0 = \frac{U}{1-\xi}; \quad x = -\frac{U\xi}{(1-\xi)U'},$$

после чего нетрудно установить связь между y и η:

$$\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-U'}{\nu\xi}}\,y, \tag{34.39}$$

и по таблице стр. 598 найти v_x в функции y. Наконец, по предыдущей таблице найдём толщину вытеснения δ^* и поверхностное трение на стенке

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0.$$

Как видим, для определения всех элементов движения достаточно знать значение ξ, соответствующее каждой точке контура. Если мы будем знать значение ξ в одной точке контура, то во всех других точках контура его можно определить, используя интегральное соотношение Кармана в форме (30.17).

Вспоминая опять соотношения (34.32), получаем из (30.17) для определения функции $\xi(x)$ следующее уравнение:

$$U^2\left[\frac{1}{\sqrt{-U'}}\chi'(\xi)\frac{d\xi}{dx} + 2\frac{U''}{\sqrt{-U'^3}}\chi\right] + \frac{2UU'}{\sqrt{-U'}}\chi + \frac{UU'}{\sqrt{-U'}}G = U\sqrt{-U'}\,F,$$

или

$$\chi'(\xi)\frac{d\xi}{dx} - \frac{U''}{2U'}\chi + \frac{U'}{U}(2\chi + G + F) = 0.$$

Воспользовавшись (34.35), можем также написать:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\chi}{\chi'}\frac{U''}{U'} - \frac{U'}{U}(1-\xi). \tag{34.40}$$

Так как функцию χ/χ' мы знаем, а функция $U(x)$ предполагается заданной, то из этого уравнения мы сможем найти ξ в функции x, если только известно начальное значение ξ. Тот набор профилей, который мы получили выше, относится только к случаю возрастания давления, поэтому пограничный слой до того места, откуда мы начинаем применять только что рассмотренный метод, надо исследовать каким-либо другим способом, который и даст нам профиль скорости в начальной точке; определив для этого профиля δ^{**}, мы найдём $\chi(\xi)$, а тем самым и ξ, которое и нужно принять за начальное значение. В частности, если мы берём за начальную точку точку минимума давления, в которой $U' = 0$, то χ обращается в нуль, и следовательно, начальным значением ξ будет тоже 0. Но тогда уравнение (34.40) будет иметь в начальной точке особую точку. Чтобы найти направление

интегральной кривой в этой точке, достаточно заметить, что по правилу Лопиталя

$$\delta_0^{**} = \lim_{\xi \to 0} \sqrt{\frac{\nu}{-U'}}\, \chi(\xi) = \lim_{\xi \to 0} \sqrt{\frac{\nu \chi^2(\xi)}{-U'}} = \lim_{\xi \to 0} \sqrt{\frac{\nu \chi^2 \xi}{-U'}} = \sqrt{\frac{\nu \chi^2}{-U''_0}} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_0, \tag{34.41}$$

и следовательно,

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_0 = -\frac{U''_0}{\nu \chi^2}\, \delta_0^{**2} = -\frac{2{,}269}{\nu} U''_0 \delta_0^{**2}. \tag{34.42}$$

Точно так же из уравнения (34.39) получим, что в этом случае

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{U''_0}{\nu} \left(\frac{dx}{d\xi}\right)_0}\, y = \frac{\alpha y}{2\delta_0^{**}} = \frac{0{,}332 y}{\delta_0^{**}}. \tag{34.43}$$

Дальнейшее интегрирование уравнения (34.40) может быть произведено либо численным путём, либо методом графического интегрирования. То значение координаты x, при котором достигается значение $\xi = 0{,}120$, определяет место отрыва пограничного слоя.

Шубауер[1]) измерил распределение давления на эллиптическом цилиндре, обтекаемом в направлении большой оси, превосходящей малую ось в 2,96 раза. Беря за единицу длины величину малой полуоси, он нашёл, что минимум давления находится на расстоянии $x = 1{,}30$ от передней критической точки, а срыв происходит при $x = 1{,}99$.

Хауэрс, определив графически U' и U'' по экспериментальным значениям U и применив до точки минимума давления метод Польгаузена, а после неё свой метод, получил отрыв в точке $x = 1{,}925$, в то время как по способу Польгаузена отрыва не получается вовсе.

Выше было уже отмечено, что профили скоростей, употребляемые в только что рассмотренном способе, лучше соответствуют граничным условиям, чем профили способа Польгаузена, и в этом состоит преимущество метода Хауэрса. Но зато в последнем методе мы не имеем для профилей таких простых аналитических выражений, как в способе Польгаузена. Очевидно, что метод Хауэрса можно сделать применимым ко всему пограничному слою; для этого надо решить сначала задачу о пограничном слое для случая, когда скорость внешнего потока $U(x)$ есть какая-либо функция, сначала возрастающая от нуля, а затем убывающая.

Мы уже упоминали, что удача Хауэрса состоит в том, что он берёт набор профилей, получающихся при решении частной задачи

[1]) Schubauer, NACA, Rep. № 527, 1935.

теории пограничного слоя, именно — того случая, когда скорость U есть линейная функция от x. Однако, к сожалению, решение для такого U получается само в виде рядов, и расчёт оказывается, как мы видели, довольно громоздким. Если бы удалось подобрать такое U, для которого задача о пограничном слое допускала бы замкнутое решение (подобно случаю Блазиуса), мы могли бы надеяться, применяя идею Хауэрса, притти к менее громоздким выкладкам. Случай Блазиуса не подходит, ибо мы здесь не имеем ни одного параметра типа b_1, которым мы смогли бы распорядиться. Как мы уже знаем, ещё один случай точного решения в виде одночлена получается по Фалькнеру (Falkner) и Сильвии Скан (Sylvia Skan)[1]), если взять

$$U = cx^m. \tag{34.44}$$

Уравнение для пограничного слоя примет здесь вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = mc^2x^{2m-1} + \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}, \tag{34.45}$$

где $\psi = \psi(x, y)$ — функция тока. Полагая

$$\psi = \sqrt{\frac{2c\nu x^{m+1}}{m+1}}\,\Phi(\xi), \quad \xi = y\sqrt{\frac{(m+1)\,cx^{m-1}}{2\nu}}, \tag{34.46}$$

мы получим:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \sqrt{\frac{2c\nu x^{m+1}}{m+1}}\,\Phi'(\xi)\sqrt{\frac{(m+1)\,cx^{m-1}}{2\nu}} = cx^m\Phi'(\xi). \tag{34.47}$$

Перейдём от переменных x, y к переменным $\bar{x} = x$ и ξ, тогда

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{D\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}, \psi\right)}{D(x, y)} = \frac{D\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}, \psi\right)}{D(\bar{x}, \xi)}\frac{D(\bar{x}, \xi)}{D(x, y)} =$$

$$= \left\{mc\bar{x}^{m-1}\sqrt{\frac{2c\nu\bar{x}^{m+1}}{m+1}}\,\Phi'^2 - c\bar{x}^m\Phi''\frac{m+1}{2}\sqrt{\frac{2c\nu\bar{x}^{m-1}}{m+1}}\,\Phi\right\} \times$$

$$\times\sqrt{\frac{(m+1)\,c\bar{x}^{m-1}}{2\nu}} = c^2\bar{x}^{2m-1}\left\{m\Phi'^2 - \frac{m+1}{2}\Phi\Phi''\right\}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} = c^2\bar{x}^{2m-1}\frac{m+1}{2\nu}\Phi'''(\xi),$$

и мы получим, после приведения подобных членов и сокращений, уравнение

$$\Phi''' + \Phi\Phi'' = \beta(\Phi'^2 - 1), \tag{34.48}$$

где

$$\beta = \frac{2m}{m+1}. \tag{34.49}$$

[1]) См. сноску [1]) на стр. 584.

Таким образом, как и в случае Блазиуса, задача сводится к определению одной функции из обыкновенного дифференциального уравнения. Случай Блазиуса мы вновь получим, полагая $m = 0$, т. е. $\beta = 0$ [1]).

Краевые условия задачи: $v_x = v_y = 0$ при $y = 0$, $v_x = U$ при $y = \infty$ дадут сразу же:

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \quad \Phi'(\infty) = 1. \tag{34.50}$$

Решение уравнения (34.48) при краевых условиях (34.50) будет зависеть от ξ и от параметра β; будем его записывать так:

$$\Phi = \Phi(\xi, \beta). \tag{34.51}$$

Хартри [2]) дал численное решение уравнения (34.48) при различных β и при краевых условиях (34.50).

Кочин и Лойцянский [3]) использовали функцию Хартри для построения приближённого решения задачи о пограничном слое совершенно так же, как Хауэрс использовал решение, отвечающее $U = b_0 - b_1 x$. Именно, заметив сперва, что у Хартри $U' = mcx^{m-1}$ и что поэтому

$$\xi = y\sqrt{\frac{(m+1)cx^{m-1}}{2\nu}} = y\sqrt{\frac{U'}{\beta\nu}},$$

попробуем искать *приближённые* решения, отвечающие любой функции $U(x)$ в виде

$$v_x(x, y) = U(x)\Phi'_\xi\left(y\sqrt{\frac{U'}{\nu\beta}};\ \beta\right), \tag{34.52}$$

где $\Phi'_\xi(\xi; \beta)$ есть производная по аргументу ξ от функции $\Phi(\xi, \beta)$ из (34.51). Однако будем теперь считать, что β будет не постоянной величиной, а функцией от x, причём функцию эту подберём так, чтобы при помощи (34.52) можно было бы удовлетворить интегральному соотношению Кармана в форме Прандтля (30.16). В соотношение Прандтля входят три величины δ^*, δ^{**}, τ_0. Подсчитаем их. Прежде всего имеем

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy = \int_0^\infty (1 - \Phi'_\xi)\, dy = \sqrt{\frac{\beta\nu}{U'}} \int_0^\infty (1 - \Phi'_\xi)\, d\xi.$$

Определённый интеграл, входящий справа, будет зависеть лишь от второго аргумента, входящего в Φ'_ξ, т. е. от β. Обозначим его бук-

---

[1]) Блазиус не вводит двойки под корень в подстановку для ζ и ξ; отсюда разница в множителе при Φ''' в (34.48) и при ζ''' в (32.7).

[2]) Hartree D. R., Proc. Cambridge Phil. Soc., **33** (1937).

[3]) Кочин Н. Е. и Лойцянский Л. Г., Об одном приближённом методе расчёта ламинарного пограничного слоя, ДАН СССР, **35** (1942), № 9.

вой $A(\beta)$. Вид функции $A(\beta)$ будет, конечно, определяться полностью из решения Хартри. Ниже мы приводим табличные значения этой функции. Итак,

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\beta\nu}{U'}}\, A(\beta), \tag{34.53}$$

где

$$A(\beta) = \int_0^\infty (1 - \Phi'_\xi)\, d\xi,$$

причём Φ'_ξ взято из решения Хартри.

Далее

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{v_x}{U}\left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy = \int_0^\infty \Phi'_\xi (1 - \Phi'_\xi)\, dy = \sqrt{\frac{\nu\beta}{U'}} \int_0^\infty \Phi'_\xi (1 - \Phi'_\xi)\, d\xi,$$

т. е.

$$\delta^{**} = \sqrt{\frac{\beta\nu}{U'}}\, B(\beta), \tag{34.54}$$

где

$$B(\beta) = \int_0^\infty \Phi'_\xi (1 - \Phi'_\xi)\, d\xi,$$

причём $B(\beta)$ так же, как и $A(\beta)$, находится из решения Хартри и может быть табулировано (см. ниже).

Наконец,

$$\frac{1}{\rho}\tau_0 = \nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \nu U(x)\, \Phi''_{\xi\xi}(0;\ \beta) \sqrt{\frac{U'}{\nu\beta}} = \sqrt{\frac{\nu U^2 U'}{\beta}}\, \Phi''_{\xi\xi}(0,\ \beta), \tag{34.55}$$

где $\Phi''_{\xi\xi}(0,\ \beta)$ есть вторая производная от функции Хартри по ξ, вычисленная при $\xi = 0$; это — функция от β и таблица для неё приведена ниже.

Теперь соотношение Прандтля примет вид:

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{\beta\nu}{U'}}\, B(\beta)\right] + \frac{U'}{U}\sqrt{\frac{\beta\nu}{U}}\,(2B + A) = \sqrt{\frac{\nu U'}{U^2\beta}}\, \Phi''_{\xi\xi}(0;\ \beta).$$

Сократив на $\sqrt{\nu}$, продифференцировав первый член и умножив всё на $\sqrt{U'}$, получим:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\beta}\, B(\beta) - \frac{U''}{2U'}\sqrt{\beta}\, B(\beta) + \frac{U'}{U}\left(2\sqrt{\beta}B + \sqrt{\beta}\, A\right) = \frac{U'}{U}\frac{1}{\sqrt{\beta}}\, \Phi''_{\xi\xi}(0;\ \beta).$$

Умножим обе части нашего равенства на $2\sqrt{\beta}B$ и обозначим

$$\beta B^2 = f, \tag{34.56}$$

$$-4f - 2\beta AB + 2B\Phi''_{\xi\xi}(0;\ \beta) = F. \tag{34.57}$$

Мы получим тогда

$$\frac{df}{dx} = \frac{U''}{U'} f + \frac{U'}{U} F, \tag{34.58}$$

и, так как f и F зависят (и притом известным образом) лишь от β, мы получим дифференциальное уравнение для определения β в функциях от x. В таблице VIII приведены значения функций $\Phi''_{\xi\xi}(0, \beta)$, A, B, f и F. Для практических расчётов удобно выразить F через f.

Таблица VIII

β	$\Phi''_{\xi\xi}(0)$	$A(\beta)$	$B(\beta)$	f	F
—0,1988	0,0000	2,359	0,585	—0,0681	0,821
—0,19	0,086	2,007	0,577	—0,0632	0,792
—0,18	0,1285	1,871	0,568	—0,0580	0,760
—0,16	0,1905	1,708	0,552	—0,0488	0,708
—0,14	0,2395	1,597	0,539	—0,0406	0,661
—0,10	0,3191	1,444	0,515	—0,0266	0,584
0,00	0,4696	1,217	0,470	0,0000	0,441
0,10	0,5870	1,080	0,435	0,0190	0,341
0,20	0,6869	0,984	0,408	0,0333	0,266
0,30	0,7748	0,911	0,386	0,0446	0,208
0,40	0,8542	0,853	0,367	0,0538	0,161
0,50	0,9277	0,804	0,350	0,0613	0,123
0,60	0,996	0,764	0,336	0,0677	0,090
0,80	1,120	0,699	0,312	0,0778	0,039
1,00	1,2326	0,648	0,292	0,0854	0,000
1,20	1,336	0,607	0,276	0,0914	—0,030
1,60	1,521	0,544	0,250	0,1002	—0,075
2,00	1,687	0,498	0,231	0,1069	—0,107

Зависимость F от f оказывается близкой к линейной. Мы её представим поэтому в виде

$$F = a - bf + \varepsilon(f),$$

так что уравнение (34.58) примет вид:

$$\frac{df}{dx} = \frac{U''}{U'} f + \frac{U'}{U}[a - bf + \varepsilon(f)].$$

Уравнение это будем решать методом последовательных приближений. В первом приближении можно отбросить $\varepsilon(f)$ и проинтегрировать наше уравнение относительно f, как линейное. Мы получим:

$$f_0 = c\frac{U'}{U^b} + a\frac{U'}{U^b}\int_0^x U^{b-1}\,dx, \tag{34.59}$$

где c — произвольная постоянная интегрирования, определённая из условия, что f принимает заданное значение при $x = 0$. Так, например, если при $x = 0$ пограничный слой только начинает развиваться, следует положить $c = 0$. В качестве второго приближения можно принять:

$$f_1 = \frac{U'}{U^b}\left\{c + \int_0^x [a + \varepsilon(f_0)]\, U^{b-1}\, dx\right\}.$$

Выберем

$$a = 0{,}45, \quad b = 5{,}35;$$

тогда, как показывает таблица IX, в нужном нам интервале значений f будет иметь место неравенство

$$|\varepsilon(f)| < 0{,}03a,$$

а это показывает, что в большинстве случаев практически достаточно пользоваться формулой (34.59).

Таблица IX

f	F	$\varepsilon(f)$
—0,0681	0,821	0,007
—0,06	0,772	0,001
—0,05	0,715	—0,003
—0,04	0,658	—0,006
—0,03	0,602	—0,008
—0,02	0,548	—0,009
—0,01	0,495	—0,009
—0,00	0,441	—0,009
0,01	0,388	—0,008
0,02	0,336	—0,007
0,03	0,283	—0,006
0,04	0,232	—0,004
0,05	0,180	—0,002
0,06	0,130	0,001
0,07	0,078	0,003
0,08	0,028	0,006
0,09	—0,023	0,009
0,10	—0,074	0,011

Как только найдено f в функции от x, мы сейчас же, по предыдущей таблице VIII, определим β в функции от x и по той же таблице $\Phi''_{\xi\xi}(0; \beta)$, $A(\beta)$, $B(\beta)$ и, значит, по (34.55), (34.54), (34.53)— напряжение трения, толщину вытеснения и толщину потери импульса. В частности, можем найти и точку отрыва — точку, в которой $\tau_0 = \Phi''_{\xi\xi}(0, \beta) = 0$, т. е. $f = -0{,}0681$ (см. таблицу VIII). В качестве примера рассмотрим случай Хауэрса. Пусть

$$U = U_0(1 - x),$$

и потребуем, чтобы пограничный слой начинался при $x = 0$ (т. е. при $x = 0$, $f = 0$). Тогда

$$f_0 = -\frac{0{,}45}{(1-x)^{5{,}35}}\int_0^x (1-\xi)^{4{,}35}\, d\xi = -0{,}0841\left[(1-x)^{-5{,}35} - 1\right].$$

Для точки отрыва x_s имеем:

$$-0{,}0681 = -0{,}0841\left[(1 - x_s)^{-5{,}35} - 1\right],$$

откуда получим

$$x_s \approx 0{,}105$$

вместо точного значения $x_s = 0{,}120$.

Второе приближение (f) дало бы $x_s = 0{,}106$, и это же значение получилось бы при интеграции точного уравнения (34.58).

Мы видим, что практически достаточно пользоваться простой формулой (34.59).

§ 35. Пограничный слой в сжимаемой жидкости. Обтекание пластинки. Метод Дородницына. Обратимся теперь к пограничному слою в сжимаемой жидкости. Как и в несжимаемой жидкости, ограничимся рассмотрением стационарного случая.

В качестве отправных уравнений мы имеем (см. § 31):

$$\rho\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \tag{35.1}$$

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} = 0, \tag{35.2}$$

$$\rho v_x \frac{\partial}{\partial x}\left(Ec_p T + \frac{v_x^2}{2}\right) + \rho v_y \frac{\partial}{\partial y}\left(Ec_p T + \frac{v_x^2}{2}\right) =$$

$$= E \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu v_x \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \tag{35.3}$$

В эти уравнения входят кроме величин v_x, v_y еще ρ и T. Величину p мы должны считать известной. Именно, по уравнению Бернулли

$$p = p_0 \left[1 - \frac{U^2(x)}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} a_*^2}\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}, \tag{35.4}$$

где $U(x)$ — скорость на внешней границе пограничного слоя, p_0 — давление в той точке адиабатического потока, где скорость обращается в нуль, a_* — критическая скорость в адиабатическом потоке.

По закону Клапейрона, p, ρ и T связаны соотношением $p = R\rho T$. Таким образом,

$$\rho = \rho_0 \frac{T_0}{T}\left[1 - \frac{U^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} a_*^2}\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}, \tag{35.5}$$

где T_0 и ρ_0 — температура и плотность «адиабатически заторможённого» потока. Заметим, что

$$a_* = \sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}\varkappa R T_0} = \sqrt{2Ec_p T_0 \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}. \tag{35.6}$$

Наконец, μ следует считать известной функцией от T; в обычных приложениях принимают закон

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^n, \tag{35.7}$$

где μ_0 — постоянная, $n = 0{,}5$, или $n = 0{,}76$, или $n = 1$.

Таким образом, задача сводится к определению v_x, v_y и T из системы уравнений (35.1), (35.2), (35.3), причём p задано по (35.4), а ρ и μ определяются из (35.5), (35.7) соответственно. Краевые условия для скоростей остаются те же, что и в несжимаемой жидкости:

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \tag{35.8}$$

$$v_x = U \quad \text{при} \quad y = \infty. \tag{35.9}$$

Краевые условия, содержащие температуру, будут различными в разных задачах; так, например, если мы решаем задачу в предположении, что температура стенки T_w искусственно поддерживается постоянной (вопросы теплоотдачи), мы должны просто написать:

$$\text{при } y = 0 \quad T = T_w. \tag{35.10}$$

Кроме того,

$$\text{при } y = \infty \quad T = T_\infty, \tag{35.11}$$

где T_∞ есть также заданная величина. В задаче обтекания самолёта или снаряда естественно считать, что поверхность $y = 0$ предоставлена сама себе и что задано лишь T_∞, а T_w есть величина неизвестная, определяемая попутно вместе с решением задачи. Здесь можно принять, что отсутствует теплоотдача обтекаемой поверхности, т. е. что

$$\text{при } y = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \tag{35.12}$$

Это предположение обычно и делается при решении задач на обтекание в вязкой сжимаемой жидкости, хотя точнее было бы принять условие «теплового баланса», приравняв то тепло, которое поверхность получает, к тому теплу, которое она отдаёт. Так, если k^* есть теплопроводность, а T^* — температура обтекаемого предмета и если принять ещё в расчёт, что обтекаемая поверхность может излучать как абсолютно чёрное тело и что к ней подходит поток радиации S со стороны жидкости, мы должны написать:

$$-k\frac{\partial T}{\partial y} + k^*\frac{\partial T^*}{\partial y} = S - \sigma T^4, \tag{35.13}$$

где

$$\sigma = 0{,}817 \cdot 10^{-10} \; \text{г/кал см}^2 \text{ мин град}^4$$

есть постоянная Стефана — Больцмана.

Кроме того,

$$(T)_{y=0} = (T^*)_{y=0}.$$

Пренебрегая притоком тепла, идущим от обтекаемой поверхности, и считая, что $S \approx \sigma T^4$, мы вновь придём к условию (35.12).

Переходя к решению нашей системы дифференциальных уравнений, преобразуем сперва уравнение (35.3), вводя вместо неизвестной температуры T величину θ из соотношения

$$\theta = T + \frac{v_x^2}{2Ec_p}. \tag{35.14}$$

Путём элементарных преобразований получим:

$$\rho\left(v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \frac{1}{\mathsf{P}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + \left(1 - \frac{1}{\mathsf{P}}\right) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu v_x}{Ec_p} \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \tag{35.15}$$

где P — число Прандтля, определяемое равенством

$$\mathsf{P} = \frac{\mu c_p}{k} \tag{35.16}$$

и не зависящее от T.

Величина θ носит название температуры торможения; она равна температуре там, где скорость жидкости равна нулю.

Решению уравнений (35.1), (35.2), (35.15) посвящено большое количество работ, из которых наиболее значительными являются исследования Буземана, Кармана и Цяня и Дородницына. Наибольшими преимуществами обладает метод Дородницына. Путём остроумной подстановки Дородницын приводит систему уравнений к виду, сходному с тем, что имеет место для жидкости несжимаемой, и получает широко обозримые результаты. Подстановка Дородницына заключается во введении вместо координаты x величины ξ:

$$\xi = \int_0^x \frac{p(x)}{p_0}\, dx, \tag{35.17}$$

а вместо координаты y — величины η:

$$\eta = \int_0^y \frac{\rho(x, y)}{\rho_0}\, dy = \frac{p(x)}{p_0} \int_0^y \frac{T_0}{T}\, dy. \tag{35.18}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{p(x)}{p_0} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

то уравнение (35.1) принимает теперь вид:

$$\rho v_x \frac{p}{p_0} \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \rho v_y \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial \eta} + \rho v_y \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial v_x}{\partial \eta} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\rho}{\rho_0} \mu \frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right). \tag{35.19}$$

С другой стороны, по уравнению Бернулли

$$\frac{dp}{dx}=\rho_0\left(1-\frac{U^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}U\frac{dU}{dx}=\rho_0\left(1-\frac{U^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}U\frac{dU}{d\xi}\frac{p}{p_0}$$

поэтому, деля обе части (35.19) на $\rho\frac{p}{p_0}$, мы получим, вставляя ρ по (35.5):

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial\xi}+\left[v_x\frac{p_0}{p}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{T_0}{T}v_y\right]\frac{\partial v_x}{\partial\eta}=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{U^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}}\frac{T}{T_0}U\frac{dU}{d\xi}+\frac{\mu_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1}\frac{\partial v_x}{\partial\eta}\right]. \quad (35.20)$$

Преобразуем теперь уравнение неразрывности. Вводя функцию тока ψ, получим:

$$\rho v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \quad \text{т. е.} \quad v_x=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}. \quad (35.21)$$

С другой стороны,

$$\rho v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{p}{p_0}=-\rho_0 v_x\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{p}{p_0}\frac{\partial\psi}{\partial\xi},$$

так что

$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=\frac{T_0}{T}v_y+v_x\frac{p_0}{p}\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

Поэтому, если мы обозначим

$$\frac{T_0}{T}v_y+v_x\frac{p_0}{p}\frac{\partial\eta}{\partial x}=V_y, \quad (35.22)$$

то получим

$$v_x=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \quad V_y=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}. \quad (35.23)$$

Теперь уравнение неразрывности можно записать в виде:

$$\frac{\partial v_x}{\partial\xi}+\frac{\partial V_y}{\partial\eta}=0, \quad (35.24)$$

а уравнение (35.20) даст

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial\xi}+V_y\frac{\partial v_x}{\partial\eta}=\frac{T}{T_0}\frac{UU'}{1-\frac{U^2}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}}+\nu_0\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1}\frac{\partial v_x}{\partial\eta}\right], \quad (35.25)$$

где $U'=\frac{dU}{d\xi}$, а $\nu_0=\frac{\mu_0}{\rho_0}$.

Мы видим, что в переменных ξ и η уравнения для v_x и V_y будут отличаться от уравнений (29.9), имеющих место для жидкости несжимаемой, лишь наличием множителя T/T_0 в (35.25).

Преобразуем теперь уравнение притока тепла (35.15). Вводя ξ и η и заменяя Ec_p по (35.6), получим:

$$\rho v_x\left(\frac{p}{p_0}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)+\rho v_x\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=$$

$$=\frac{1}{\mathsf{P}}\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)+\left(1-\frac{1}{\mathsf{P}}\right)\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu T_0\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{v_x^2}{a_*^2}\right)\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}. \quad (35.26)$$

Деля на $\rho\, p/p_0$ и принимая в расчёт (35.22), придём к уравнению

$$v_x\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\theta}{T_0}+V_y\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\theta}{T_0}=$$

$$=\frac{\nu_0}{\mathsf{P}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\theta}{T_0}\right)\right]+\nu_0\left(1-\frac{1}{\mathsf{P}}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{v_x^2}{a_*^2}\right)\right]\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}.$$

Если

$$\mathsf{P}=1, \quad (35.27)$$

уравнение (35.26) сильно упрощается и принимает вид:

$$v_x\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+V_y\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=\nu_0\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right]. \quad (35.28)$$

Мы перейдём к подробному изучению этого случая.

Начнём с конкретной задачи обтекания пластинки, расположенной вдоль оси Ox. Здесь $U=\text{const}$., так что

$$U'=0,$$

и уравнение (35.25) примет вид:

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial\xi}+V_y\frac{\partial v_x}{\partial\eta}=\nu_0\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1}\frac{\partial v_x}{\partial\eta}\right]. \quad (35.29)$$

Если обозначить

$$\frac{\Psi}{\rho_0}=\Psi, \quad (35.30)$$

то уравнения (35.23) примут вид:

$$v_x=\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}, \quad V_y=-\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}. \quad (35.31)$$

Вводя (35.31) в (35.29), получим окончательно:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2}=\nu_0\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2}\right]; \quad (35.32)$$

в качестве краевых условий мы должны написать:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } \eta = 0 \qquad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0; \\ &\text{при } \eta = \infty \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = U\ ^{1}). \end{aligned}\right\} \tag{35.33}$$

Наконец, вследствие (35.14), (35.31) получим:

$$T = \theta - \frac{1}{2Ec_p}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)^2. \tag{35.34}$$

В качестве первого примера решим задачу об обтекании пластинки без теплоотдачи, т. е. при краевых условиях:

$$\text{при } \eta = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0; \quad \text{при } \eta = \infty \quad T = T_\infty,$$

или, на основании (35.34) и условия прилипания:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } \eta = 0 \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0, \\ &\text{при } \eta = \infty \qquad \theta = T_\infty + \frac{U^2}{2Ec_p}. \end{aligned}\right\} \tag{35.35}$$

Заметим теперь, что уравнение (35.28) имеет тривиальное решение $\theta = \text{const}$. Если выбрать эту постоянную равной $T_\infty + \frac{U^2}{2Ec_p}$, то мы удовлетворим и краевым условиям $\left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \equiv 0\right)$. Используя (35.34), получим теперь:

$$T = T_\infty + \frac{U^2}{2Ec_p} - \frac{1}{2Ec_p}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)^2. \tag{35.36}$$

В частности, на поверхности пластинки, где $\partial\Psi/\partial\eta = 0$, будем иметь температуру

$$T_w = T_\infty + \frac{U^2}{2Ec_p}. \tag{35.37}$$

Замечательно, что мы, не решая уравнения (35.32), можем при помощи (35.37) найти температуру пластинки по температуре набегающей жидкости (T_∞) и по числу Маха набегающего потока (U/a_∞). В самом деле, так как

$$a_\infty^2 = \varkappa R T_\infty = \varkappa E (c_p - c_v) T_\infty = c_p E (\varkappa - 1) T_\infty,$$

---

[1]) Любопытно отметить, что при $n = 1$ T выпадает из уравнения (35.29) и последнее обращается в точности в уравнение (32.3), если заменить Ψ на ψ, ξ на x, η на y. Так как краевые условия будут и здесь и там одинаковы, то мы можем здесь прямо заимствовать готовое для несжимаемой жидкости решение Блазиуса. Нужно только, конечно, установить затем связь между плоскостью (x, y) и плоскостью (ξ, η).

мы получим из (35.37):

$$T_w = T_\infty \left[1 + \frac{\varkappa - 1}{2} \frac{U^2}{a_\infty^2} \right]. \tag{35.38}$$

Если $U/a_\infty \ll 1$, температура T_w будет незначительно превосходить T_∞. Но при скоростях жидкости, превосходящих скорость звука или приближающихся к таковой, пластинка будет нагреваться сильно. Так, при $U/a_\infty = 0{,}1$ будем иметь $T_w = 1{,}002 T_\infty$, так что, если $T_\infty = 273$, $T_w = 273{,}005$; если $U/a_\infty = 1$, $T_w = 1{,}2 T_\infty$ (при $T_\infty = 273°$ $T_w = 327°{,}6$), если $U/a_\infty = 10$, $T_w = 21 T_\infty$ (при $T_\infty = 273°$ $T_w = 5733°$). Конечно, при таких больших температурах едва ли можно пренебречь излучением пластинки и краевые условия надо, повидимому, взять в форме (35.13), а не в виде (35.12). К этому вопросу мы ещё вернёмся, а сейчас обратимся к анализу уравнения (35.32).

Заметим, что в этой задаче температура на стенке T_w будет совпадать с температурой T_0 адиабатически заторможённого потока. В самом деле, по уравнению Бернулли:

$$\frac{T_\infty}{T_0} = 1 - \frac{U^2}{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} a_*^2}; \tag{35.39}$$

сопоставляя с этим равенством (35.36) и (35.37), получим, что

$$T_w = T_0.$$

Отметим ещё, что давление на стенке будет, как и везде,

$$p_w = p_0 \left(1 - \frac{U^2}{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} a_*^2} \right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \neq p_0,$$

плотность же на стенке ρ_w будет

$$\rho_w = \rho_0 \left(1 - \frac{U^2}{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} a_*^2} \right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \neq \rho_0.$$

Уравнение (35.32), если принять в расчёт (35.36) и (35.37), может быть записано в виде:

$$\frac{D\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau_i}, \Psi\right)}{D(\xi, \tau_i)} = \nu_0 \frac{\partial}{\partial \tau_i} \left\{ \left[1 - \frac{1}{2 E c_p T_0} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau_i} \right)^2 \right]^{n-1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau_i^2} \right\}. \tag{35.40}$$

Совершенно аналогично тому, как мы поступали в случае Блазиуса, введём вместо Ψ величину ζ по формуле

$$\Psi = 2 \sqrt{\nu_0 U \xi}\, \zeta, \tag{35.41}$$

а также безразмерную величину

$$\tau = \frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{U}{\nu_0 \xi}}. \tag{35.42}$$

Предположим, что ζ зависит только от τ:

$$\zeta = \zeta(\tau);$$

тогда

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 2\sqrt{\nu_0 U \xi}\,\zeta' \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U}{\nu_0 \xi}} = U\zeta'(\tau), \tag{35.43}$$

и если ввести ещё $\bar{\xi} = \xi$:

$$\frac{D\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \Psi\right)}{D(\xi, \eta)} = U\frac{D(\zeta', 2\sqrt{\nu_0 U \xi}\,\zeta)}{D(\bar{\xi}, \tau)} \cdot \frac{D(\bar{\xi}, \tau)}{D(\xi, \eta)} = -U^2 \frac{\zeta\zeta''}{2\xi}.$$

Вставим ещё в (35.39) $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = \frac{U^2}{4\nu_0 \xi}\zeta''$, перенесём все члены в одну сторону, произведём сокращения и привлечём (35.6). Получим окончательно

$$2\zeta\zeta'' + \frac{d}{d\tau}\left[\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\frac{U^2}{a_*^2}\zeta'^2\right)^{n-1}\zeta''\right] = 0. \tag{35.44}$$

Уравнение это по виду отличается от уравнения Блазиуса (32.7) лишь наличием при ζ'' выражения в скобке, возведённого в степень $n - 1$. Краевые условия для ζ те же, что и в случае Блазиуса. По (35.41) и (35.43)

$$\text{при } \tau = 0 \quad \zeta = 0, \quad \zeta' = 0;$$

$$\text{при } \tau = \infty \quad \zeta' = 1.$$

В отличие от того, что имеет место в несжимаемой жидкости, скорость U на бесконечности входит в уравнение для ζ, но, как мы увидим далее, вхождение это будет слабым. Однако величина U/a_* будет весьма существенным образом входить в представления ξ и η через x и y.

Для решения обыкновенного дифференциального уравнения (35 44) Дородницын вводит новую независимую переменную z и искомую функцию Z из условий

$$z = \sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}}\frac{U}{a_*}\zeta', \tag{35.45}$$

$$Z = \left[\sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}}\frac{U}{a_*}\right]^{3/2}\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\frac{U^2}{a_*^2}\zeta'^2\right)^{n-1}\zeta''. \tag{35.46}$$

Уравнение (35.44) даст нам по (35.46):

$$2\zeta\zeta'' + \left[\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\,\frac{U}{a_*}\right]^{-3/2}\frac{dZ}{dz}\,\frac{dz}{d\tau} = 0,$$

так что по (35.45) получим, сокращая на ζ'':

$$2\zeta + \left[\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\,\frac{U}{a_*}\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{dZ}{dz} = 0. \tag{35.47}$$

Дифференцируя обе части этого равенства по z и замечая, что

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\frac{d\zeta}{d\tau}}{\frac{dz}{d\tau}} = \frac{\zeta'}{\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\,\frac{U}{a_*}\,\zeta''} = \frac{z}{\left(\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\,\frac{U}{a_*}\right)^{\frac{1}{2}} Z\,(1-z^2)^{1-n}},$$

получим окончательно

$$Z\frac{d^2Z}{dz^2} = -\frac{2z}{(1-z^2)^{1-n}}. \tag{35.48}$$

Граничные условия для функции Z будут

$$\text{при } z = 0 \quad \frac{dZ}{dz} = 0, \tag{35.49}$$

$$\text{при } z = \sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\,\frac{U}{a_*} \quad Z = 0. \tag{35.50}$$

Решение уравнения (35.48) при граничных условиях (35.49) и (35.51) проще всего получить, задавая сперва произвольное значение функции Z при $z = 0$, назовём его Z_0, удовлетворяя условию (35.49) (задача Коши) и подбирая затем Z_0 так, чтобы выполнялось условие (35.50).

После того, как $Z(z)$ известно, легко найти все интересующие нас величины. Именно, по (35.46) имеем:

$$\zeta'' = \left[\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\,\frac{U}{a_*}\right]^{-3/2}(1-z^2)^{1-n}\,Z(z). \tag{35.51}$$

По (36.45)

$$\zeta' = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\,\frac{a_*}{U}\,z. \tag{35.52}$$

Так как, далее, $\zeta'' = \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\zeta' = \zeta'\frac{d\zeta'}{d\zeta}$ и при $\zeta = 0$ $z = 0$ (ибо $\zeta'(0) = 0$), то

$$\zeta = \left(\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\,\frac{U}{a_*}\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^z \frac{z\,dz}{(1-z^2)^{1-n}\,Z(z)}. \tag{35.53}$$

Наконец, так как $\zeta' = \frac{d\zeta}{d\tau} = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\,\frac{a_*}{U}\,z$, то

$$\tau = \left(\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\,\frac{U}{a_*}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^z \frac{dz}{(1-z^2)^{1-n}\,Z(z)}. \tag{35.54}$$

Таким образом, все нужные нам величины параметрически находятся через z.

Чтобы построить профили скоростей и температур, нам остаётся только научиться переходить от переменных ξ и τ к переменным x и y. В нашем случае обтекания пластинки, когда $p(x) = \text{const.}$, формула (35.17) даёт прямо

$$\xi = x\,\frac{p}{p_0},$$

где, по (35.4)

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 \quad \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,\frac{U^2}{a_*^2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}. \tag{35.55}$$

Далее, по (35.18), (35.36), (35.39) имеем:

$$\eta = \frac{p}{p_0}\int_0^y \frac{1}{1-\dfrac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,\dfrac{U^2}{a_*^2}\,\zeta'^2}\,dy, \tag{35.56}$$

так что

$$y = \frac{p_0}{p}\int_0^\eta (1-z^2)\,d\eta = 2\sqrt{\frac{\nu_0\xi}{U}}\,\frac{p_0}{p}\int_0^\tau (1-z^2)\,d\tau, \tag{35.57}$$

и мы можем написать:

$$\frac{y}{2\sqrt{x}}\sqrt{\frac{U}{\nu_0}} = \left(\frac{p_0}{p}\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\,\frac{U}{a_*}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^z \frac{(1-z^2)^n}{Z(z)}\,dz. \tag{35.58}$$

Найдём ещё сопротивление, испытываемое пластинкой. Напряжение трения на пластинке τ_0 будет:

$$\tau_0 = \left(\mu\,\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \mu_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_{y=0}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U^3}{\nu_0\xi}}\,\zeta''(0),$$

так что по (35.5) и (35.55) имеем:

$$\tau_0 = \mu_0\left(1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,\frac{U^2}{a_*^2}\right)^{\frac{1}{2}\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U^3}{\nu_0 x}}\,\zeta''(0). \tag{35.59}$$

Для пластинки ширины b и длины L суммарное сопротивление, испытываемое как верхней, так и нижней сторонами, будет:

$$W = 2b\int_0^L \tau_0\,dx = b\mu_0\left(1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{U^2}{a_*^2}\right)^{\frac{1}{2}\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\sqrt{\frac{U^3}{\nu_0}}\,\zeta''(0)\int_0^L\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Введём коэффициент сопротивления c_w по формуле

$$W = c_w F\frac{1}{2}\rho_\infty U^2,$$

где $F = 2bL$ — площадь обеих поверхностей пластинки. Так как по (35.5)

$$\rho_\infty = \rho_0\frac{T_0}{T_\infty}\left(1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{U^2}{a_*^2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}},$$

а по (35.38)

$$\frac{T_0}{T_\infty} = 1+\frac{\varkappa-1}{2}\mathsf{M}^2 \quad \left(\mathsf{M}=\frac{U}{a_\infty}\right),$$

то мы получим после простых преобразований

$$c_w = 2\sqrt{\frac{\nu_0}{UL}}\left(1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{U^2}{a_*^2}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}\mathsf{M}^2\right)^{-1}\zeta''(0).$$

Наконец, введём ещё число Рейнольдса R_∞ из равенства

$$\mathsf{R}_\infty = \frac{UL\rho_\infty}{\mu_\infty},$$

причём будем помнить, что по (35.7)

$$\mu_\infty = \mu_0\left(\frac{T_\infty}{T_0}\right)^n,$$

получим окончательно

$$c_w = \frac{2}{\sqrt{\mathsf{R}_\infty}}\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}\mathsf{M}^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\zeta''(0).$$

На рис. 179 нанесены значения $\zeta''(0)$ в функции от величины $\dfrac{U^2}{\dfrac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_*^2}$ — единственного параметра, от которого зависело решение для ζ. Кривая начинается от значений $\zeta'' = 0{,}664$, что отвечает числу Блазиуса ($2\zeta''(0) = 1{,}328$).

На рис. 180, заимствованном из работы Дородницына, по вертикальной оси отложено $\frac{v_x}{U}=\zeta'$, по горизонтальной оси отложено $\xi=\frac{y}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{U}{\nu_0}}$, причём кривая *1* даёт профиль скоростей для не-

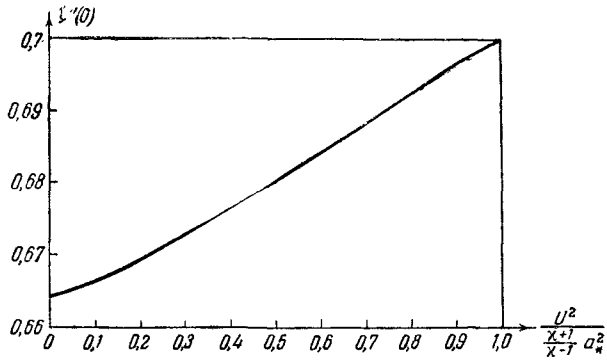

Рис. 179.

сжимаемой жидкости (случай Блазиуса, ср. рис. 177), кривая *2* даёт профиль скоростей при $\mathrm{M}=3{,}05$, когда в качестве абсцисс стоят не $\frac{y}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{U}{\nu_0}}$, а $2\tau=\frac{\eta}{\sqrt{\xi}}\sqrt{\frac{U}{\nu_0}}$. Зависимость v_x/U от τ остаётся почти неизменной при изменении числа Маха, даже в сравнительно широких пределах; этого и следовало ожидать, ибо, как мы уже отмечали, вид уравнения (35.44) в переменных τ близок к виду уравнения Блазиуса в переменных $\frac{y}{2\sqrt{x}}\sqrt{\frac{U}{\nu_0}}$.

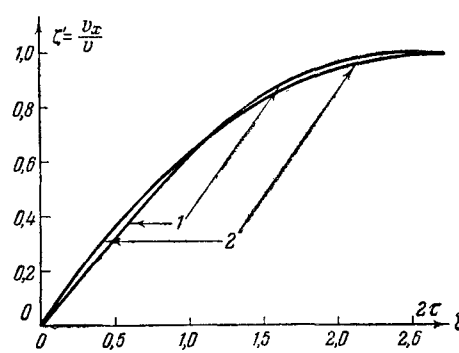

Рис. 180

На рис. 181 по вертикальной оси отложено v_x/U, по горизонтальной $\frac{y}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{U}{\nu_\infty}}$. Кривые дают резко различные профили скоростей для различных значений числа Маха.

На рис. 182 по одной оси отложено T/T_∞, по другой снова $\frac{y}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{U}{\nu_\infty}}$; это — кривые распределения температур в жидкости.

Для построения их достаточно было воспользоваться формулой, получающейся сразу же из (35.36):

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{\varkappa - 1}{2} \mathsf{M}^2 \left[1 - \left(\frac{v_x}{U}\right)^2\right],$$

и уже готовым графиком скоростей. Так решается задача обтекания пластинки, когда $\mathsf{P} = 1$ и когда теплоотдача отсутствует.

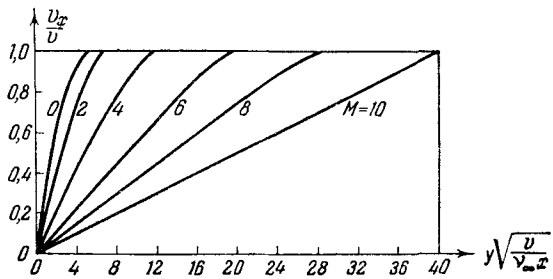

Рис. 181.

В качестве второго конкретного примера рассмотрим случай обтекания пластинки, когда по-прежнему $\mathsf{P} = 1$, но в качестве краевого условия на пластинке мы имеем

$$\text{при } y = 0 \quad T = T_w,$$

где T_w — заданное число. Мы будем вновь иметь уравнение (35.32) и должны решать его при прежних краевых условиях (35.33). Но

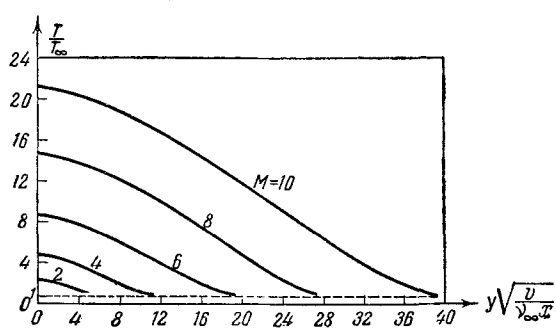

Рис. 182.

теперь отношение T/T_0 будет выражаться иначе. Краевые условия для θ будут теперь иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } \eta = 0 \quad \theta = T_w, \\ &\text{при } \eta = \infty \quad \theta = T_\infty + \frac{U^2}{2Ec_p} = T_0, \end{aligned}\right\} \tag{35.60}$$

причём θ должно удовлетворять по-прежнему уравнению (35.28). Легко видеть, что это последнее уравнение имеет следующий интеграл:

$$\theta = \alpha + \beta v_x, \tag{35.61}$$

где α и β — постоянные. В самом деле, подставляя (35.61) в (35.28), мы получим:

$$\beta v_x \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + V_y \beta \frac{\partial v_x}{\partial \eta} = \nu_0 \beta \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right],$$

что после сокращения на β совпадёт с (35.29).

Постоянные α и β мы подберём так, чтобы удовлетворялись краевые условия, и получим:

$$\theta = T_w + (T_0 - T_w)\frac{v_x}{U}.$$

Теперь вместо (35.36) мы будем иметь:

$$T = T_w + (T_0 - T_w)\frac{1}{U}\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} - \frac{1}{2Ec_p}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)^2, \tag{35.62}$$

так что уравнение (35.39) надо заменить на уравнение:

$$\frac{D\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \Psi\right)}{D(\xi, \eta)} = \nu_0 \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\left[\frac{T_w}{T_0} + \left(1 - \frac{T_w}{T_0}\right)\frac{1}{U}\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} - \frac{1}{2Ec_p T_0}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)^2\right]^{n-1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}\right\}.$$

Вводя, как и прежде, ζ и τ по (35.41) и (35.42), мы получим для определения ζ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$2\zeta\zeta'' + \frac{d}{d\tau}\left\{\left[\frac{T_w}{T_0} + \left(1 - \frac{T_w}{T_0}\right)\zeta' - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\frac{U^2}{a_*^2}\zeta'^2\right]^{n-1}\zeta''\right\} = 0. \tag{35.63}$$

Вводим

$$z = \sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}}\frac{U}{a_*}\zeta' \tag{35.64}$$

и

$$Z = \left(\sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}}\frac{U}{a_*}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{T_w}{T_0} + \left(1 - \frac{T_w}{T_0}\right)\zeta' - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\frac{U^2}{a_*^2}\zeta'^2\right]^{n-1}\zeta''. \tag{35.65}$$

Получим теперь вместо уравнения (35.48) уравнение

$$Z\frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{2z}{\left[1 - \left(1 - \frac{T_w}{T_0}\right)(1 - \zeta') - z^2\right]^{1-n}}. \tag{35.66}$$

Краевые условия будут иметь прежний вид: (35.49) и (35.50). Все величины: ζ'', ζ', ζ, τ, $y/\sqrt{x}$, легко найдутся параметрически через z.

Например, для $y/\sqrt{x}$ получим:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{U}{\nu_0}}\frac{y}{\sqrt{x}} = \left(\frac{p}{p_0}\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\right)\left(\frac{U}{a_*}\right)^{1/2}\int_0^z \frac{\left[1-\left(1-\frac{T_w}{T_0}\right)\left(1-\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\frac{a_*}{U}z\right)-z^2\right]^n}{Z(z)}\,dz. \tag{35.67}$$

Наконец, для c_w будем иметь:

$$c_w = \frac{2}{\sqrt{\mathsf{R}_\infty}}\zeta''(0)\left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{n-1}\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}\mathsf{M}^2\right)^{\frac{n-1}{2}}, \tag{35.68}$$

причём, по-прежнему

$$\mathsf{R}_\infty = \frac{UL\rho_\infty}{\mu_\infty}, \tag{35.69}$$

где L — длина пластинки. Заметим, что $\zeta''(0)$ зависит теперь от двух параметров: от числа Маха $\mathsf{M} = \frac{U}{a_*}$ и от отношения T_w/T_0, где T_w — заданная температура пластинки, а T_0 — заданная температура в адиабатически заторможённом потоке. Второе из этих отношений входит в дифференциальное уравнение для Z. Краевые условия содержат лишь M.

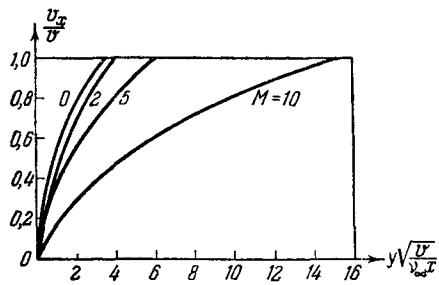

Рис. 183.

На рис. 183 изображены распределения скоростей v_x/U в функциях от $\frac{y}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{U}{\nu_\infty}}$ для значений $\frac{T_\infty}{T_w}=4$ и для разных чисел M.

На рис. 184 даны распределения T/T_∞, которые получаются, по нижеприводимой формуле, после того как скорости станут известны:

$$\frac{T}{T_\infty} = \frac{T_w}{T_\infty} + \left(\frac{T_0}{T_\infty}-\frac{T_w}{T_\infty}\right)\frac{v_x}{U} - \frac{\varkappa-1}{2}\mathsf{M}^2\left(\frac{v_x}{U}\right)^2. \tag{35.70}$$

Поток тепла через единицу площади пластинки будет:

$$\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = c_p\left(\mu\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = c_p\frac{T_0-T_w}{U}\tau_0, \tag{35.71}$$

причём τ_0 находится по (35.59).

В качестве третьего примера рассмотрим обтекание пластинки, предоставленной самой себе, но излучающей. По-прежнему будем считать, что $\mathsf{P} = 1$. Здесь температура пластинки, так же, как и в первом примере, будет неизвестна и в качестве краевого условия для температуры мы примем (35.13), в котором

$$k^* = 0$$

и

$$S = \sigma T_\infty^4,$$

причём будем считать его удовлетворяющимся в среднем, так что

при $y = 0$ $$-\int_0^L k \frac{\partial T}{\partial y}\, dx =$$

$$= \int_0^L \sigma \left(T_\infty^4 - T^4\right) dx, \qquad (35.72)$$

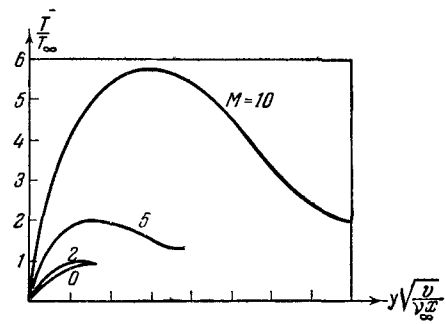

Рис. 184.

где L — длина пластинки. Температуру пластинки мы будем считать постоянной, подлежащей определению [1]); обозначим её через T_w.

Решение для температуры торможения ищем по-прежнему в виде (35.61) и записываем его в виде (35.62), так что будет опять

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T_w}{T_0} + \left(1 - \frac{T_w}{T_0}\right)\frac{v_x}{U} + \frac{U^2}{2i_0}\left(\frac{v_x}{U}\right)^2. \qquad (35.73)$$

Вновь задача сводится к уравнению (35.65), и опять в него будет входить неизвестное заранее отношение T_w/T_0, и решение ζ будет зависеть от одного данного параметра M и от одного неизвестного: T_w/T_0. Предположим, что нам удалось найти это решение в общем виде, для любого значения T_w/T_0 [2]). Тогда условие (35.72) даст нам трансцендентное уравнение для определения T_w/T_0. В самом деле вследствие (35.73) имеем:

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = T_0 \left\{ k \left(1 - \frac{T_w}{T_0}\right) \frac{1}{U} \frac{\partial v_x}{\partial y} \right\}_{y=0}$$

или, так как число Прандтля равно единице,

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = c_p \left(1 - \frac{T_w}{T_0}\right) \frac{T_0}{U} \tau_0,$$

---

[1]) Решение задачи будет приближённым в том смысле, что мы берём в условии (35.72) конечную длину L, а пластинка до сих пор считалась бесконечной в направлении оси x.

[2]) Технически это удаётся сделать, отыскивая решение в виде рядов по τ около $\tau = 0$ и в виде асимптотических разложений для больших τ.

где τ_0, как и прежде, есть напряжение трения на пластинке; но по (35.69) имеем:

$$\int_0^L \tau_0\, dx = \frac{L\rho_\infty U^2}{\sqrt{\mathrm{R}_\infty}} \left(\frac{T_\infty}{T_0}\right)^{\frac{1-n}{2}} \zeta''(0) \left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{n-1},$$

поэтому (35.72) примет после простых преобразований вид:

$$\left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{n-1} \frac{c_p \rho_\infty U}{\sqrt{\mathrm{R}_\infty}} \left(\frac{T_\infty}{T_0}\right)^{-\frac{1+n}{2}} \left(1 - \frac{T_w}{T_0}\right) \zeta''(0) = \sigma T_\infty^3 \left[\left(\frac{T_w}{T_\infty}\right)^4 - 1\right]; \tag{35.74}$$

в этом равенстве $\zeta''(0)$ есть функция от U/a_* и от T_w/T_0. Таким образом, из (35.74) мы можем найти T_w/T_0 в функциях от безразмерного параметра

$$\varepsilon = \frac{\sigma T_\infty^3}{c_p \rho_\infty U} \sqrt{\mathrm{R}_\infty}$$

и от U/a_*. На рис. 185 по оси абсцисс отложена величина $2 \cdot 10^4 \varepsilon^2 \mathbf{M}$, по оси ординат — значения T_w/T_∞ для различных $\mathbf{M}$. Мы получим значение T_w/T_∞, отвечающее (35.38), теоретически говоря, лишь для $L = 0$. При любом конечном L T_w/T_0 будет значительно ниже. При $L \to \infty$ мы получим для всех $\mathbf{M}$ $\frac{T_w}{T_\infty} \to 1$.

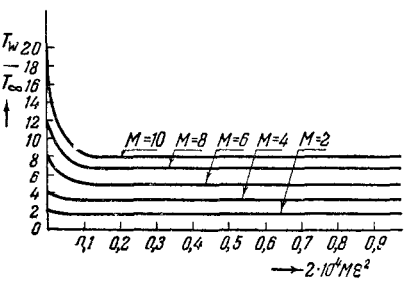

Рис. 185.

До сих пор мы рассматривали примеры в предположении, что $\mathbf{P} = 1$. Если $\mathbf{P} \neq 1$, то приходится обратиться к уравнениям (35.25) и (35.26). В качестве примера рассмотрим обтекание пластинки, т. е. случай, когда $U' = 0$. По-прежнему, вводим функцию Ψ так, что

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}.$$

Уравнение движения примет вид:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi\, \partial \eta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} = \nu_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2}\right], \tag{35.75}$$

а уравнение притока энергии запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\theta}{T_0} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\theta}{T_0} = \frac{\nu_0}{\mathbf{P}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\theta}{T_0}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\nu_0}{2i_0} \left(1 - \frac{1}{\mathbf{P}}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{n-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)^2\right], \tag{35.76}$$

причём

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\theta}{T_0} - \frac{1}{2i_0}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)^2. \tag{35.77}$$

Уравнение (35.76) не допускает тривиального интеграла, поэтому приходится искать решение системы (35.75)—(35.77) в виде

$$\Psi = 2\sqrt{\nu_0 U \xi}\,\zeta(\tau); \quad \frac{\theta}{T_0} = \Phi(\tau),$$

где

$$\tau = \frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{U}{\nu_0 \xi}}.$$

Тогда (35.75) примет вид:

$$2\tau\zeta'' + \frac{d}{d\tau}\left[\left(\Phi - \frac{U^2}{2i_0}\zeta'^2\right)^{n-1}\zeta''\right] = 0, \tag{35.78}$$

а (35.76) даст после простых преобразований

$$2\mathsf{P}\cdot\zeta\Phi' + \frac{d}{d\tau}\left[\left(\Phi - \frac{U^2}{2i_0}\zeta'^2\right)^{n-1}\Phi'\right] -$$

$$-(1-\mathsf{P})\frac{U^2}{2i_0}\frac{d}{d\tau}\left[\left(\Phi - \frac{U^2}{2i_0}\zeta'^2\right)^{n-1}\frac{d}{d\tau}\zeta'^2\right] = 0. \tag{35.79}$$

Таким образом задача сводится к совместному определению двух функций Φ и ζ от τ из системы обыкновенных дифференциальных уравнений 5-го порядка (35.78), (35.79). В качестве краевых условий мы примем прежде всего три условия для ζ:

$$\zeta(0) = \zeta'(0) = 0, \quad \zeta'(\infty) = 1.$$

По определению θ (35.77) мы имеем далее:

$$\Phi(\infty) = 1.$$

Остаётся поставить последнее, пятое, краевое условие. Оно, как и при $\mathsf{P} = 1$ будет иметь различный вид в зависимости от того, какую задачу мы изучаем.

Если

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 0,$$

то мы должны написать

$$\Phi'(0) = 0.$$

Если

$$(T)_{y=0} = T_w$$

где T_w — заданная величина, то

$$\Phi(0) = \frac{T_w}{T_0}$$

и т. д.

Для решения системы (35.78), (35.79) удобно принять, как мы это уже делали раньше при $\mathsf{P}=1$, в качестве независимого переменного не τ, а переменную:

$$z=\frac{U}{\sqrt{2i_0}}\zeta'.$$

Мы не будем останавливаться на этом общем случае подробнее.

Чтобы выяснить влияние числа Прандтля, положим для простоты $n=1$. Это значение близко к действительному значению n для воздуха ($n\approx 0{,}8$). Тогда Φ выпадает из (35.78) и последнее просто перейдёт в уравнение Блазиуса

$$2\zeta\zeta''+\zeta'''=0,$$

решение которого нам уже известно, уравнение же (35.79) даст

$$\Phi''+2\mathsf{P}\zeta\Phi'=(1-\mathsf{P})\frac{U^2}{2i_0}\frac{d^2}{d\tau^2}(\zeta'^2).$$

Задача сводится к двум квадратурам. Мы получим, принимая в расчёт, что $\Phi(\infty)=1$:

$$\Phi(\tau)=1+c\int_{\infty}^{\tau}(\zeta'')^{\mathsf{P}}\,d\tau+$$

$$+(1-\mathsf{P})\frac{U^2}{2i_0}\int_{\infty}^{\tau}(\zeta'')^{\mathsf{P}}\int_{0}^{\tau}(\zeta'')^{-\mathsf{P}}\frac{d^2}{d\tau^2}(\zeta'^2)\,d\tau\,d\tau, \qquad (35.80)$$

где c — произвольная постоянная, подлежащая определению из второго краевого условия для Φ.

Так как

$$\Phi'(0)=c\,[\zeta''(0)]^{\mathsf{P}},$$

где $\zeta''(0)=0{,}664$, то, если $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}=0$, имеем $\Phi'(0)=0$ и $c=0$. Мы получим тогда температуру пластинки T_w по формуле:

$$\frac{T_w}{T_0}=\Phi(0)=1-\frac{U^2}{2i_0}a,$$

где

$$a=(1-\mathsf{P})\int_{0}^{\infty}(\zeta'')^{-\mathsf{P}}\int_{0}^{\tau}(\zeta'')^{-\mathsf{P}}\frac{d^2}{d\tau^2}\zeta'^2\,d\tau\,d\tau. \qquad (35.81)$$

Таким образом вместо прежней формулы (35.38) мы получим теперь,

$$\frac{T_w}{T_\infty}=1+\frac{\varkappa-1}{2}(1-a)\mathsf{M}^2,$$

так как

$$\frac{U^2}{2i_0} = \frac{\varkappa - 1}{2} M^2 \frac{1}{1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M^2}. \tag{35.82}$$

Если $P = 1$, то $a = 0$ и мы вернёмся к (35.38). Для воздуха $P \approx 0{,}75$ (точное значение: $P = 14/19$). Принимая в (35.81) $P = 0{,}75$, получим путём численного интегрирования $a \approx 0{,}132$ [1]).

Таким образом температуры на пластинке при $P = 0{,}75$ будут несколько ниже, чем «температуры торможения» в (35.38), отвечающие числу $P = 1$.

§ 36. Сжимаемая жидкость. Пограничный слой для произвольного профиля. В случае криволинейного профиля мы должны обратиться к уравнениям (35.25) и (35.28). Если ограничиться случаем, когда теплопередача отсутствует, т. е. когда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad \text{следовательно,} \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \tag{36.1}$$

то мы можем вновь взять в качестве θ тривиальный интеграл $\theta = C = \text{const}$. Чтобы найти значение этой постоянной C, обратимся к условию на бесконечности. Теперь $U = U(x)$, но также и T_∞ будет зависеть от x, следовательно, $T_\infty = T_\infty(x)$. Эти величины связаны уравнением Бернулли [глава I, (8.1)], которое, если учесть (8.5) из главы I, мы можем написать в виде:

$$\frac{U^2(x)}{2} + \frac{\varkappa R T_\infty(x)}{\varkappa - 1} = \frac{\varkappa R T_0}{\varkappa - 1}, \tag{36.2}$$

где T_0 — постоянная (температура в том месте, где скорость равна нулю), R — газовая постоянная. Но по определению θ (35.14), мы имеем:

$$\theta = T + \frac{v_x^2}{2Ec_p} = \frac{1}{Ec_p}\left(\frac{v_x^2}{2} + Ec_p T\right)$$

или, так как

$$Ec_p = \frac{R\varkappa}{\varkappa - 1},$$

$$\theta = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa R}\left(\frac{v_x^2}{2} + \frac{\varkappa R T}{\varkappa - 1}\right), \tag{36.3}$$

[1]) Подсчёт был произведён А. С. Мониным, который, использовав уравнение Блазиуса, преобразовал предварительно (35.81) к виду:

$$a = 1 - 2P \int_0^\infty (\zeta'')^P \int_0^\zeta (\zeta'')^{2-P}\, d\zeta\, d\zeta.$$

эта величина должна быть постоянной и равной C. На бесконечности правая часть (36.3), вследствие (36.2), обратится в T_0, поэтому $C = T_0$. Определив θ полностью, мы можем найти T/T_0 в виде:

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa R T_0} v_x^2. \tag{36.4}$$

Вместо уравнения (35.29) мы будем теперь иметь (35.25):

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + V_y \frac{\partial v_x}{\partial \eta} = \frac{T}{T_0} \frac{UU'}{1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \frac{U^2}{a_*^2}} + \nu_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right], \tag{36.5}$$

где T/T_0 определяется по (36.4), а V_y — по-прежнему находится из (35.22) и удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{\partial V_y}{\partial \eta} = 0. \tag{36.6}$$

Следуя Дородницыну, дадим приближённый метод решения задачи, основанный на идее работы Кочина и Лойцянского (см. § 34). Построим сперва интегральное соотношение, аналогичное соотношению Прандтля (30.18). Для этого уравнение (36.5) запишем, вследствие (36.6), в виде

$$\frac{\partial v_x^2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_x V_y}{\partial \eta} = \frac{T}{T_0} \frac{UU'}{1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \frac{U^2}{a_*^2}} + \nu_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right] \tag{36.7}$$

и уравнение (36.6) (умножив его обе части на U) приведём к виду:

$$\frac{\partial U v_x}{\partial \xi} + \frac{\partial V_y U}{\partial \eta} = v_x \frac{dU}{d\xi}. \tag{36.8}$$

Вычтем из уравнения (36.8) уравнение (36.7) и проинтегрируем обе части по η от 0 до ∞. Получим:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\int_0^\infty v_x (U - v_x)\, d\eta \right] + \int_0^\infty V_y (U - v_x) =$$

$$= U' \int_0^\infty \left(v_x - \frac{T}{T_0} \frac{U}{1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \frac{U^2}{a_*^2}} \right) d\eta - \nu_0 \left| \left(\frac{T}{T_0} \right)^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right|_0^\infty. \tag{36.9}$$

По аналогии со введёнными в несжимаемой жидкости толщиной потери импульса и толщиной вытеснения введём величины:

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{v_x}{U} \left(1 - \frac{v_x}{U} \right) d\eta, \quad \delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{U} \right) d\eta. \tag{36.10}$$

Привлекая (36.4), мы можем написать:

$$v_x - \frac{T}{T_0}\frac{U}{1-\dfrac{U^2}{\dfrac{\varkappa-1}{\varkappa+1}a_*^2}} = v_x - U\frac{1-\dfrac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\dfrac{v_x^2}{a_*^2}}{1-\dfrac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\dfrac{U^2}{a_*^2}} =$$

$$= \frac{v_x-U}{1-\dfrac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\dfrac{U^2}{a_*^2}} - \frac{\dfrac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\dfrac{U^2}{a_*^2}v_x\left(1-\dfrac{v_x}{U}\right)}{1-\dfrac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\dfrac{U^2}{a_*^2}}.$$

Принимая ещё во внимание, что $(V_y)_{y=0} = 0$ по (35.22) и $\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial \eta}\right)_{\eta\to\infty} \to 0$, мы получим из (36.9):

$$\frac{d}{d\xi}(U^2\delta^{**}) + \frac{UU'}{1-\dfrac{U^2}{2i_0}}\delta^* + \frac{\dfrac{U^2}{2i_0}}{1-\dfrac{U^2}{2i_0}}UU'\delta^{**} = \nu_0\left(\frac{\partial v_x}{\partial r_i}\right)_{\eta=0}$$

или после деления на U^2:

$$\frac{d\delta^{**}}{d\xi} + \frac{U'}{U}\left[\left(2+\frac{\dfrac{U^2}{2i_0}}{1-\dfrac{U^2}{2i_0}}\right)\delta^{**} + \frac{\delta^*}{1-\dfrac{U^2}{2i_0}}\right] = \frac{\nu_0}{U^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}. \quad (36.11)$$

Это уравнение является обобщением соотношения Прандтля (30.18). При $U^2/2i_0 \to 0$ и, заменяя η на y, ξ на x, мы вернёмся к несжимаемой жидкости и (36.11) перейдёт в точности в (30.18).

Вместе с Дородницыным будем искать приближённое решение, предполагая, что безразмерная скорость $v_x/U\,(x)$ есть функция от η/δ^{**} и некоторого параметра β, зависящего от ξ. Именно, положим, что

$$v_x = U(x)\,\Phi'\left(\frac{B(\beta)\,\eta}{\delta^{**}},\ \beta\right). \quad (36.12)$$

Здесь Φ' означает дифференцирование по первому аргументу, а в качестве функции Φ от двух аргументов мы примем вновь как раз ту функцию Хартри, которую Кочин и Лойцянский использовали при построении приближённого решения для несжимаемой жидкости [см. стр. 604, формулу (34.51) и др.]; под функцией $B(\beta)$ по-прежнему разумеем

$$B(\beta) = \int_0^\infty \Phi'_\xi(\xi,\ \beta)\left[1-\Phi'_\xi(\xi,\ \beta)\right]d\xi, \quad (36.13)$$

а δ^{**} есть функция, входящая в уравнение (36.11). Параметр β и функцию δ^{**} подберём так, чтобы выполнялось соотношение (36.11) и чтобы, кроме того (на обтекаемом профиле $\eta = 0$) выполнено было дифференциальное уравнение (36.7). Последнее условие, вследствие (36.4), даст

$$\frac{UU'}{1-\frac{U^2}{2i_0}} = -\nu_0\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0}, \tag{36.14}$$

т. е. по (36.12)

$$\frac{U'}{1-\frac{U^2}{2i_0}} = -\nu_0 \frac{B^2}{\delta^{**2}} \Phi'''(0, \beta), \tag{36.15}$$

где Φ''' означает третью производную от Φ по первому аргументу. Обозначим, как и в § 34 (34.56)[1]),

$$-B^2\Phi'''(0, \beta) = f(\beta). \tag{36.16}$$

Таким образом δ^{**}, β и ξ связаны соотношением

$$\delta^{**2} = \frac{\nu_0\left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)}{U'} f(\beta), \tag{36.17}$$

где f — известная функция от β. Далее,

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1-\frac{v_x}{U}\right) d\eta = \frac{\delta^{**}}{B}\int_0^\infty [1-\Phi'(\xi, \beta)]\, d\xi = \frac{\delta^{**}}{B} A, \tag{36.18}$$

где под A разумеется, как и в § 34, известная функция одного β

$$A = \int_0^\infty [1-\Phi'(\xi, \beta)]\, d\xi.$$

Наконец,

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \frac{UB}{\delta^{**}} \Phi''(0, \beta). \tag{36.19}$$

Теперь уравнение (36.11) запишется в виде:

$$\frac{d\delta^{**}}{d\xi} + \frac{U'}{U}\left[2 + \frac{\frac{U^2}{2i_0}}{1-\frac{U^2}{2i_0}} + \frac{A}{B}\frac{1}{1-\frac{U^2}{2i_0}}\right]\delta^{**} = \frac{\nu_0 B}{U\delta^{**}} \Phi''(0, \beta)$$

[1]) Так как Φ удовлетворяет уравнению (34.48) и так как $\Phi(0, \beta) = \Phi'(0, \beta) = 0$, то $\Phi'''(0, \beta) = -\beta$ и (36.16) совпадает с (34.56).

или после умножения на δ^{**}, по (36.19):

$$\frac{d}{d\xi}\frac{\nu_0\left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)}{U'}f(\beta)+2\frac{\nu_0}{U}\left(2-\frac{U^2}{2i_0}+\frac{A}{B}\right)f=\frac{2\nu_0 B}{U}\Phi''(0,\beta).$$

После простых преобразований получим:

$$\frac{df}{d\xi}=f\left[\frac{U''}{U'}+\frac{2UU'}{i_0\left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)}\right]+\frac{U'}{U}\frac{2}{1-\frac{U^2}{2i_0}}\left[-\left(2+\frac{A}{B}\right)f+B\Phi''(0,\beta)\right],$$

или, если вспомнить обозначение (34.57)]:

$$\frac{df}{d\xi}=\left[\frac{U''}{U'}+\frac{2UU'}{i_0\left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)}\right]f+\frac{U'}{U\left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)}F(f). \quad (36.20)$$

Уравнение (36.20) перейдёт в (34.58), если $i_0\to\infty$.

Используем вновь тот факт, что $F(f)\approx a-bf$ (см. таблицу на стр. 607), где $a=0{,}45$, $b=5{,}35$. Мы получим тогда

$$\frac{df}{d\xi}=\left[\frac{U''}{U'}+\frac{2UU'}{i_0\left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)}-\frac{bU'}{U\left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)}\right]f+\frac{aU'}{U\left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)}.$$

Отсюда путём простых квадратур (полагая попутно $f(0)=0$) получим:

$$f=a\frac{dU}{d\xi}\left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)^{\frac{b}{2}-2}U^{-b}\int_0^{\xi}\left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)^{1-\frac{b}{2}}U^{b-1}d\xi.$$

Наконец, так как

$$\xi=\int_0^x\frac{p}{p_0}dx=\int_0^x\left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)^{\frac{x}{x-1}}dx,$$

то мы можем избавиться от ξ и написать:

$$f(x)=a\frac{dU}{dx}\left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)^{\frac{b}{2}-\frac{3x-2}{x-1}}\int_0^x\left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)^{\frac{2x-1}{x-1}-\frac{b}{2}}U^{b-1}dx. \quad (36.21)$$

Эта формула была получена Лойцянским и Дородницыным [1]). Уравнение это позволит, зная $U=U(x)$, найти для всякого x значение $f(x)$. Так как таблица на стр. 607 даёт нам β и B в функциях от f, то мы будем знать теперь β и B в функциях от x. Формула (36.17) даст нам δ^{**}. Таким образом может быть построен весь

[1]) Лойцянский Л. Г. и Дородницын А. А., К теории перехода ламинарного слоя в турбулентный, ПММ, т. IX, вып. 4, 1945.

профиль скоростей. Точка отрыва на профиле получится для того значения x, при котором $f(x)$, вычисленное по (36.21), даст значение $f = -0{,}0681$.

§ 37. Основные уравнения теории исчезающей вязкости. Теория пограничного слоя показала нам, что при движении твёрдого тела в вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса возможен при известных условиях отрыв от тела вихрей. Мы уже указывали на большое значение этого обстоятельства для обоснования тех схем движения тела в идеальной жидкости, в которых существенное значение имеет наличие вихрей или вихревых слоёв (как, например, схема вихревых дорожек Кармана). Однако во всех таких схемах имеется известная доля произвола. Чтобы избавиться от этого произвола, следовало бы, рассматривая движение какого-либо тела в жидкости, решить такую задачу: проинтегрировать точные уравнения гидромеханики вязкой жидкости, а затем в полученных интегралах перейти к пределу, устремив μ к нулю. Ничто не заставляет нас ожидать, что при этом получится как раз движение тела в идеальной жидкости, так как мы многократно уже указывали на то, что различный характер движений в вязкой и идеальной жидкостях определяется не только и не столько различием вида уравнений, сколько различием граничных условий. Задача в таком виде была поставлена Осееном, который в своих исследованиях сделал и первые шаги к её разрешению, совершив предельный переход для упрощённой системы уравнений движения вязкой жидкости.

Не имея возможности, за недостатком места, изложить оригинальные методы Осеена [1]), мы дадим эвристический вывод тех уравнений, к которым он приходит; основные идеи этого вывода принадлежат Бюргерсу [2]).

Мы будем исходить из уравнений движения вязкой жидкости (5.4) в форме Ламба, причём сразу же предположим, что внешние силы отсутствуют, так что эти уравнения принимают вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} q + \nu \Delta \boldsymbol{v}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{37.1}$$

где

$$q = p + \frac{\rho v^2}{2}. \tag{37.2}$$

Предположим теперь, что в вязкой безграничной жидкости движется с постоянной по величине и направлению скоростью U твёрдое тело, ограниченное поверхностью S. Для определённости примем, что

---

[1]) Oseen C. W., Hydrodynamik, Leipzig, 1927. См. также изложение теории Осеена в книге H. Villat, Leçons sur l'hydrodynamique, Paris, 1929.

[2]) Burgers J. M., On Oseen's theory for the approximate determination of the flow of a fluid with very small friction along a body, Proced. of the Kon. Akad, von Wetenschappen Amsterdam, 31 (1928), № 4 и 5.

S есть выпуклая поверхность. Свяжем с телом систему осей x, y, z, причём ось Ox выберем так, чтобы тело двигалось как раз в направлении положительной оси Ox. Введём ещё на время систему осей $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, неподвижных в пространстве и совпадающих в момент времени $t=0$ с системой осей x, y, z. Ясно, что между координатами x, y, z и $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ имеют место зависимости

$$x=\bar{x}-Ut, \quad y=\bar{y}, \quad z=\bar{z}. \tag{37.3}$$

Будем под $\mathbf{v}$ понимать вектор абсолютной скорости частиц жидкости, т. е. вектор скорости частиц жидкости относительно системы осей $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. С другой стороны, мы будем считать движение стационарным относительно системы осей x, y, z. Но тогда ясно, что вектор $\boldsymbol{v}$ есть функция только от x, y, z, а так как для всякой функции $f(x, y, z)=f(\bar{x}-Ut, \bar{y}, \bar{z})=f_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t)$, мы имеем тождество

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}=-U\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{37.4}$$

то равенство (37.1) в системе осей x, y, z принимает вид:

$$-U\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}-\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}q+\nu\Delta\boldsymbol{v}. \tag{37.5}$$

Наибольшие трудности интегрирования этого уравнения связаны с присутствием квадратичного члена $\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$. Мы допустим, что можно этим членом пренебречь. Тогда мы получаем систему уравнений:

$$\mu\Delta\boldsymbol{v}+\rho U\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}-\operatorname{grad}q=0; \ \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0, \tag{37.6}$$

причём q имеет значение (37.2). Так как на поверхности тела S абсолютная скорость частиц жидкости $\boldsymbol{v}$ должна совпадать со скоростью точек самой поверхности тела, то мы легко можем написать граничные условия в следующем виде:

$$v_x=U, \quad v_y=0, \quad v_z=0 \text{ на } S. \tag{37.7}$$

Система уравнений (37.6) и послужила предметом исследований Осеена. Как мы видели, эта система получается из точных уравнений гидромеханики вязкой жидкости, если в последних пренебречь квадратичным членом $\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$, содержащим вихрь скорости, иными словами, если пренебречь вихрями. Если бы в результате перехода к пределу $\mu\to 0$ в интегралах точных уравнений движения вязкой жидкости мы получили теорию идеальной жидкости, а в частности отсутствие вихрей, то при очень малых значениях μ вихри были бы очень малы, т. е. наше допущение о пренебрежимости вихрями было бы оправдано, и мы, исходя из решений уравнений (37.6), должны

были бы в пределе при $\mu \to 0$ тоже получить теорию идеальной жидкости. Как показал Осеен, это не имеет места, а следовательно, теория исчезающей вязкости должна отличаться от теории идеальной жидкости.

Установим теперь некоторые общие свойства движений, определяемых системой уравнений (37.6). Беря вихрь от обеих частей первого из уравнений этой системы и вводя обычное обозначение

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega},$$

мы получим уравнение

$$\rho U \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \mu \Delta \boldsymbol{\Omega} = 0, \tag{37.8}$$

заменяющее для рассматриваемого случая обобщённое уравнение Гельмгольца (8.2).

Чтобы истолковать это уравнение, вернёмся к координатам $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ относительно неподвижных в пространстве осей координат. Применяя тождество (37.4), можем переписать предыдущее уравнение в виде

$$\rho \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{t}} = \mu \Delta \boldsymbol{\Omega}. \tag{37.9}$$

Если в этом уравнении положить $\mu = 0$, то получится равенство

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{t}} = 0,$$

из которого следует, что в каждой точке пространства вихрь сохраняет неизменное значение. Полное же уравнение (37.9) выражает, как мы знаем, процесс диффузии вихрей. Но равенства (37.3) показывают нам, что неизменной точке пространства соответствует в системе осей x, y, z точка, перемещающаяся в отрицательном направлении оси Ox с постоянной скоростью U. Следовательно, смысл уравнения (37.8) состоит в следующем: вихри перемещаются в отрицательном направлении оси Ox с постоянной скоростью U, при этом несколько рассеиваясь. В пределе, при $\mu \to 0$, процесс диффузии вихрей исчезнет и, следовательно, вихри будут, сохраняя постоянное значение по величине и направлению, перемещаться вдоль отрицательной оси Ox с постоянной скоростью U. В частности, мы будем иметь равенство

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0. \tag{37.10}$$

Но так как мы имеем дело не с безграничной жидкостью, а с жидкостью, в которой движется твёрдое тело, то нужно учесть ещё то вихреобразование, которое происходит на поверхности этого тела, и о котором уже была речь выше при изложении теории пограничного слоя.

Во всяком случае, из этих общих рассуждений совершенно ясно, какую картину распределения вихрей мы должны ожидать для того движения, которое получается в результате предельного перехода $\mu \to 0$ из движения, удовлетворяющего уравнениям (37.6).

Остановимся для определённости на случае плоского движения. По предположению, контур C, двигающийся параллельно оси Ox, есть выпуклый контур (рис. 186). Проведём крайние прямые K_1L_1 и K_2L_2, параллельные оси Ox и имеющие с контуром C всего по одной общей точке, соответственно K_1 и K_2. Эти точки разобьют контур C на две части: переднюю C_1 и заднюю C_2. Тогда, как показано на рисунке, полупрямые K_1L_1 и K_2L_2 ограничат область D_2; всю же остальную область течения обозначим через D_1.

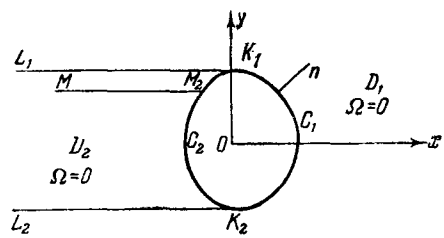

Рис. 186.

Мы утверждаем теперь, что во всей области D_1 вихрь $\boldsymbol{\Omega}$ для предельного течения обратится в нуль. В самом деле, из предыдущего рассуждения совершенно ясно, что те вихри, которые сходят с поверхности тела, могут попасть только в область D_2. Поэтому, если принять ещё, что на бесконечно далёких расстояниях перед телом жидкость покоится, то вихри во всей области D_1 будут отсутствовать, в области же D_2 эти вихри должны удовлетворять условию (37.10).

Совершенно аналогично в случае пространственного течения мы должны около поверхности тела S описать цилиндр, образующие которого параллельны оси Ox; пусть этот цилиндр касается поверхности S по линии L; последняя разобьёт поверхность S на две части: переднюю S_1 и заднюю S_2. Часть S_2 поверхности S вместе с той частью поверхности цилиндра, которая тянется в направлении отрицательной оси Ox, являются границами для вихревой области D_2 предельного течения, во всей же остальной области течения, которую мы обозначим через D_1, вихри будут уже отсутствовать.

Возвратимся теперь к плоскому течению. Вихрь $\boldsymbol{\Omega}$ имеет в этом случае всего одну составляющую по оси z, которую мы обозначим через ζ

$$\zeta = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

По условию (37.10) ζ не зависит от x и является функцией только от y, притом отличной от нуля только в области D_2.

Как мы видели, равенство (37.8) переходит в пределе при $\mu \to 0$ в равенство (37.10), имеющее место как внутри области D_1, так и

внутри области D_2. Точно так же первое из равенств (37.6) обратится в пределе при $\mu \to 0$ в равенство

$$\rho U \frac{\partial v}{\partial x} - \operatorname{grad} q = 0,$$

которое даст нам соотношения

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \rho U \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\rho U \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \rho U \frac{\partial v_y}{\partial x}. \tag{37.11}$$

Мы видим, что $\frac{q}{\rho U}$ и $-v_y$ суть гармонические сопряжённые функции, так что

$$\frac{q}{\rho U} - i v_y = f(z),$$

где $z = x + iy$. Вводя обозначение

$$w(z) = \int f(z)\, dz = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

будем, очевидно, иметь

$$f(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

т. е. во всей области течения имеем формулы:

$$q = \rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{37.12}$$

причём функция $\varphi(x, y)$ есть решение уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Что касается составляющей v_x, то в части D_1 области течения, в которой вихри отсутствуют, мы можем, очевидно, принять, что

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{37.13}$$

в области же D_2 мы имеем из первого уравнения (37.11):

$$v_x = \frac{q}{\rho U} + \alpha(y), \text{ т. е. } v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha(y).$$

Рассмотрим теперь, какому граничному условию должна удовлетворять функция φ на передней части контура C_1. Для вывода этого условия удобнее рассматривать относительное движение жидкости относительно тела, которое получается, если на абсолютное движение наложить прямолинейное равномерное движение вдоль отрицательной оси Ox со скоростью U, т. е. движение с составляющими скорости $-U$, 0; в результате проекции относительной скорости

получатся равными $v_x - U$, v_y. Заметим теперь, что при малых значениях μ, т. е. при больших числах Рейнольдса, вдоль C_1 образуется пограничный слой, толщина которого при $R \to \infty$ стремится к нулю. Внутри этого пограничного слоя будет происходить постепенный переход касательной к контуру составляющей относительной скорости от нуля до тех значений, которые эта составляющая имеет в потенциальном потоке; что же касается нормальной составляющей относительной скорости, то она при $R \to \infty$ стремится к нулю. Можно поэтому ожидать, что при $\mu \to 0$ мы будем иметь на части контура C_1 следующее граничное условие:

$$v_{n0} = 0 \text{ на } C_1,$$

где v_{n0} есть нормальная составляющая скорости относительного движения, т. е.

$$v_{n0} = (v_x - U)\cos(n, x) + v_y \cos(n, y).$$

Пользуясь формулами (37.12) и (37.13), найдём:

$$v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(n, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

и, следовательно, граничное условие на C_1 мы можем написать следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = U \cos(n, x) \text{ на } C_1.$$

В дальнейшем мы будем под n понимать направление внешней нормали к контуру C. Таким образом для части контура C_1 получилось то же самое граничное условие, которое имеет место для идеальной жидкости.

На первый взгляд может показаться непонятным, что, исходя из условия прилипания

$$v_x = U, \quad v_y = 0 \text{ на } C_1, \tag{37.14}$$

мы, после предельного перехода $\mu \to 0$, получили лишь одно граничное условие

$$v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y) = U \cos(n, x) \text{ на } C_1, \tag{37.15}$$

Здесь всё дело заключается в том, что интегралы системы уравнений (37.6) при $\mu \to 0$ стремятся к своим пределам неравномерно. Но, как известно, при неравномерной сходимости пределом последовательности непрерывных функций может оказаться разрывная функция. Приведём этому простой пример. Пусть имеем функцию

$$f(\mu, x) = \frac{x^2}{\mu + x^2},$$

зависящую от параметра μ. При всяком положительном μ эта функция есть непрерывная функция от x, причём при $x=0$ мы имеем равенство

$$f(\mu, 0)=0. \tag{37.16}$$

Устремим теперь μ к нулю. Если $x\neq 0$, то ясно, что при $\mu\to 0$ мы будем иметь предельное равенство

$$\lim_{\mu\to 0} f(\mu, x)=1, \quad x\neq 0.$$

С другой стороны, из (37.16) ясно, что

$$\lim_{\mu\to 0} f(\mu, 0)=0.$$

Поэтому, вводя обозначение

$$\lim_{\mu\to 0} f(\mu, x)=F(x),$$

мы будем иметь

$$F(0)=0, \quad F(x)=1 \quad \text{при} \quad x\neq 0.$$

Таким образом предельная функция $F(x)$ имеет при $x=0$ разрыв.

Совершенно такие же обстоятельства имеют место и в рассматриваемом нами случае. Интегралы системы уравнений (37.6) удовлетворяют на контуре C_1 условиям (37.14). Но когда мы совершим предельный переход $\mu\to 0$, то в пределе получатся такие функции, которые будут в точках контура C_1 терпеть разрыв. Для этих предельных функций в точках самого контура C_1 будут выполняться граничные условия (37.14), но в бесконечно близких к контуру C_1 точках области D_1 будет уже выполняться граничное условие (37.15), подобно тому как для функции $F(x)$ при положительном, но сколь угодно малом x мы получаем значение 1, а не 0.

Рассмотрим теперь граничные условия на задней части контура C_2

$$v_x=U, \quad v_y=0 \quad \text{на } C_2. \tag{37.17}$$

Так как в D_2 мы имеем формулы:

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\alpha(y), \quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

то условия (37.17) приводятся, во-первых, к условию для определения φ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \text{ на } C_2,$$

а, во-вторых, к условию для определения $\alpha(y)$:

$$\alpha(y)=U-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{M_2},$$

где $(\partial\varphi/\partial x)_{M_2}$ означает значение функции $\partial\varphi/\partial x$ в точке M_2 контура C_2 имеющей заданную ординату y (рис. 186).

Собирая все полученные результаты, мы приходим к следующим формулам, определяющим течение рассматриваемого нами типа:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & v_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} \text{ в } D_1, \\ v_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{M_2} + U, & v_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} \text{ в } D_2. \end{aligned}\right\} \tag{37.18}$$

Здесь M_2 есть та точка контура C_2, которая имеет ту же ординату y, что и точка M области D_2, в которой определяется v_x (рис. 186). Функция $\varphi(x, y)$ есть решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{37.19}$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = U\cos(n, x) \quad \text{на} \quad C_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{на} \quad C_2. \tag{37.20}$$

Кроме того, должно выполняться ещё очевидное условие на бесконечности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \to 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} \to 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2} \to \infty. \tag{37.21}$$

Функция q определяется формулой:

$$q = \rho U \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

и следовательно, давление p определяется формулами

$$\left.\begin{aligned} p &= \rho U \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] \text{ в } D_1, \\ p &= \rho U \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\rho}{2}\left\{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{M_2} + U\right]^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\} \text{ в } D_2. \end{aligned}\right\} \tag{37.22}$$

На линиях K_1L_1 и K_2L_2, отделяющих область D_1 от области D_2, составляющая скорости v_x и давление p терпят разрыв. Это обстоятельство сильно уменьшает значение полученного решения. Нужно обратить внимание также на то, что в основу вывода было положено допущение о пренебрежимости вихрями, в то время как в полученном решении вся область D_2 оказалась заполненной вихрями.

Переходя к пространственным течениям, мы рассмотрим только частный случай осесимметричного течения, причём будем пользоваться цилиндрическими координатами x, r, θ. Система уравнений (37.6) переходит в пределе при $\mu \to 0$ в систему

$$\rho U \frac{\partial v}{\partial x} - \operatorname{grad} q = 0; \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Так как мы считаем движение осесимметричным, то $v_\theta = 0$, а v_x, v_r и q могут зависеть только от x и r, поэтому предыдущие уравнения принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \rho U \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \\ \rho U \frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{37.23}$$

Кроме того, мы должны записать ещё условие отсутствия вихрей в области D_1:

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial x} = 0.$$

Поэтому среднее из уравнений (37.23) даёт нам, что

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \rho U \frac{\partial v_x}{\partial r} \text{ в } D_1.$$

Соединяя это равенство с первым из равенств (37.23) и замечая, что q определяется только с точностью до постоянной, легко выведем, что

$$q = \rho U v_x \text{ в } D_1. \tag{37.24}$$

Но второе из уравнений системы (37.23) показывает, что во всей области течения существует функция $\varphi(x, r)$, такая, что

$$q = \rho U \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \tag{37.25}$$

На основании первого из уравнений системы (37.23) во всей области течения

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tag{37.26}$$

а тогда последнее из уравнений системы (37.23) даёт нам, что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 0,$$

т. е. что φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0.$$

В области D_1, вследствие равенств (37.24) и (37.25), мы имеем:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ в } D_1.$$

В области же D_2 на основании равенства (37.24) получим:

$$v_x(x, r) = \frac{\partial \varphi(x, r)}{\partial x} + \alpha(r) \text{ в } D_2.$$

Установим теперь граничные условия. На передней части тела S_1 мы, аналогично условию (37.20) плоской задачи, получим условие:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = U\cos(n, x) \text{ на } S_1.$$

На задней же части S_2 поверхности тела мы потребуем выполнения условий прилипания; в результате получим, во-первых, условие для определения функции φ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \text{ на } S_2,$$

и, во-вторых, формулу для определения функции $\alpha(r)$:

$$\alpha(r) = U - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{M_2},$$

где M_2 есть точка поверхности S_2, имеющая заданную координату r.

В окончательном итоге для случая осесимметричного течения мы приходим к следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} &v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, && v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \text{ в } D_1,\\ &v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{M_2} + U, && v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \text{ в } D_2,\ q = \rho U\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ &p = \rho U\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2\right] \text{ в } D_1,\\ &p = \rho U\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\rho}{2}\left[\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{M_2} + U\right\}^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2\right] \text{ в } D_2. \end{aligned}\right\} \quad (37.27)$$

Здесь $\varphi(x, r)$ есть решение уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0, \quad (37.28)$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial n} = U\cos(n, x) \text{ на } S_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \text{ на } S_2,\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial x} \to 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} \to 0 \text{ при } \sqrt{x^2 + r^2} \to \infty. \end{aligned}\right\} \quad (37.29)$$

Осеен получил в результате предельного перехода $\mu \to 0$ уравнения для более общего случая, чем тот, который рассмотрен нами. Для частного случая прямолинейного равномерного движения тела его уравнения совпадают с полученными только что нашим нестрогим методом уравнениями.

§ 38. Реакция потока на тело. Вычислим теперь силы воздействия потока на тело для рассматриваемых течений, причём ограничимся только случаем плоской задачи. Если X и Y суть

проекции на оси координат силы воздействия потока на контур C, то очевидно:

$$X = -\int_C p\cos(n, x)\,ds, \quad Y = -\int_C p\cos(n, y)\,ds.$$

На основании формул

$$dx = -ds\cos(n, y), \quad dy = ds\cos(n, x),$$

можем написать

$$X = -\int_C p\,dy, \quad Y = \int_C p\,dx, \quad X - iY = -i\int_C p\,d\bar{z}. \tag{38.1}$$

Применяя к точкам контура C формулы (37.22) и замечая, что на C_2 имеем $\partial\varphi/\partial y = 0$, получим:

$$\left.\begin{aligned} p &= \rho U\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] \quad \text{на} \quad C_1, \\ p &= \rho U\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\rho}{2}U^2 \quad \text{на} \quad C_2. \end{aligned}\right\} \tag{38.2}$$

Введя в рассмотрение функцию

$$p_1 = \rho U\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right],$$

будем иметь:

$$p = p_1 \quad \text{на} \quad C_1, \quad p = p_1 - \frac{\rho}{2}\left[U^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right] \quad \text{на} \quad C_2,$$

и следовательно:

$$X - iY = -i\int_C \rho U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,d\bar{z} + \frac{i\rho}{2}\int_C\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 d\bar{z} + \right.$$
$$\left. + \frac{i\rho}{2}\int_{C_2}\left[U^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]d\bar{z}. \right. \tag{38.3}$$

Положим теперь

$$\left.\begin{aligned} A &= \int_C\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]d\bar{z} = \\ &= \int_C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)(dx - i\,dy), \\ B &= 2\int_C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx\right); \end{aligned}\right\} \tag{38.4}$$

тогда

$$A+iB=\int_C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)(dx+i\,dy)=\int_C\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz,$$

где $w=\varphi+i\psi$, а ψ есть функция, гармонически сопряжённая с φ.

Но dw/dz есть однозначная аналитическая функция от z вне контура C, обращающаяся в нуль на бесконечности; следовательно, вблизи бесконечно далёкой точки мы имеем разложение

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots \tag{38.5}$$

Поэтому

$$\int_C\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz=0,$$

так как вместо C за контур интегрирования можно взять окружность сколь угодно большого радиуса, на которой подынтегральная функция имеет порядок $1/|z|^2$.

Итак,

$$A+iB=0,\quad A=-iB. \tag{38.6}$$

Далее

$$B=2\int_C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(n,\,x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(n,\,y)\right]ds=$$

$$=2\int_C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds,$$

что вследствие граничных условий даёт:

$$B=2\int_{C_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)U\cos(n,\,x)\,ds+2\int_{C_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(n,\,x)\,ds=$$

$$=2\int_{C_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)U\,dy+2\int_{C_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2dy.$$

Но формулы (38.3), (38.4) и (38.6) показывают, что

$$X-iY=-i\int_C\rho U\frac{\partial\varphi}{\partial x}(dx-i\,dy)+\frac{\rho}{2}B+\frac{i\rho}{2}\int_{C_2}\left[U^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right](dx-i\,dy).$$

Подставляя сюда значение B и отделяя вещественную и мнимую части, легко найдём после простых вычислений:

$$X = \frac{\rho}{2}\int_{C_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - U\right)^2 dy, \tag{38.7}$$

$$Y = \rho U\int_C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy\right) - \frac{\rho}{2}\int_{C_2}\left[U^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]dx =$$

$$= \rho U\Gamma - \frac{\rho}{2}\int_{C_2}\left[U^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]dx,$$

где $\Gamma = -2\pi\,\mathrm{Im}\,a_1$ есть циркуляция для течения с потенциалом $w = \varphi + i\psi$. Заметим, что значение X всегда получится отрицательным, так как при положительном обходе контура C значения dy на C_2 отрицательны.

§ 39. Обтекание цилиндра. Как первый пример применения предыдущих уравнений разберём задачу об обтекании цилиндра радиуса a. Нам нужно прежде всего определить гармоническую функцию φ по условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = U\cos(n, x) \quad \text{на} \quad C_1, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{на} \quad C_2,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \to 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} \to 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2} \to \infty.$$

Функция $\varphi = Ux$ удовлетворяет первым двум условиям, но не удовлетворяет условиям на бесконечности. Положим

$$\varphi = Ux + \varphi_1; \tag{39.1}$$

обозначим через ψ_1 функцию, гармонически сопряжённую с φ_1, и введём ещё комплексную функцию

$$w_1 = \varphi_1 + i\psi_1,$$

заметим, что w_1 очень удобно рассматривать как комплексный потенциал некоторого вспомогательного течения.

Для функции φ_1 мы будем иметь такие граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad C_1, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0 \quad \text{на} \quad C_2,\\ &\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \to -U, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \to 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2} \to \infty. \end{aligned}\right\} \tag{39.2}$$

Положим, наконец,

$$\frac{dw_1}{dz} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - i\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = e^{-i\omega(z)}.$$

Ясно, что $\omega(z)$ есть аналитическая функция от z; легко выяснить механическое значение вещественной и мнимой частей этой функции. А именно, обозначим через V абсолютную величину скорости вспомо-

гательного течения, а через ϑ — угол, составляемый этой скоростью с осью Ox. Тогда мы будем иметь:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = V\cos\vartheta, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = V\sin\vartheta, \tag{39.3}$$

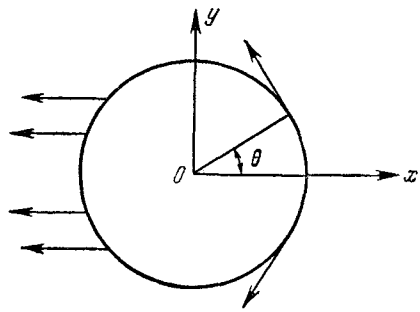

Рис. 187.

и, следовательно,

$$\frac{dw_1}{dz} = V(\cos\vartheta - i\sin\vartheta) = Ve^{-i\vartheta} = e^{\ln V - i\vartheta},$$

откуда видно, что

$$\omega = \vartheta + \ln V. \tag{39.4}$$

Но вследствие граничных условий (39.2) векторы скорости во вспомогательном течении имеют направления, указанные на рис. 187. Таким образом мы имеем следующие граничные условия для функции ϑ:

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_1 = \pi && \text{для} && -\pi \leqslant \theta \leqslant -\frac{\pi}{2},\\ &\vartheta_1 = \frac{3\pi}{2} + \theta && \text{для} && -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta < 0,\\ &\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} + \theta && \text{для} && 0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\\ &\vartheta_1 = \pi && \text{для} && \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{aligned}\right\} \tag{39.5}$$

При $\theta = 0$ функция ϑ_1 терпит конечный разрыв.

Применим теперь формулу Шварца, определяющую аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, которая регулярна вне единичного круга и вещественная часть которой принимает на контуре окружности радиуса a заданные непрерывные значения $u_1(\theta)$:

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1(\theta)\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}\,d\theta + i\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1(\theta)\,d\theta - \frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u_1(\theta)\,e^{i\theta}\,d\theta}{ae^{i\theta}-z} + i\alpha; \tag{39.6}$$

в этой формуле α есть произвольная вещественная постоянная.

Формула Шварца годится и для интересующего нас случая, когда функция $u_1(\theta)$ в нескольких точках терпит конечный разрыв: а именно в этом случае граничное значение вещественной части функции $f(z)$ будет равно $u_1(\theta)$ во всякой точке контура единичного круга, в которой $u_1(\theta)$ непрерывна.

Итак,

$$\omega = \vartheta + i \ln V = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta_1(\theta) \frac{ae^{i\vartheta} + z}{ae^{i\vartheta} - z} d\theta + i\alpha. \qquad (39.7)$$

Подставляя в эту формулу $z = \infty$, найдем:

$$\omega(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta_1(\theta)\, d\theta + i\alpha.$$

Но по формулам (39.5):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta_1(\theta)\, d\theta = \pi.$$

Следовательно,

$$\omega(\infty) = \pi + i\alpha, \qquad \left(\frac{dw_1}{dz}\right)_{z=\infty} = e^{-i\omega(\infty)} = -e^{\alpha}.$$

С другой стороны, вследствие граничного условия на бесконечности (39.2) должно быть

$$\left(\frac{dw_1}{dz}\right)_{z=\infty} = -U;$$

значит мы должны принять

$$\alpha = \ln U.$$

Теперь формулы (39.7) и (39.5) позволяют написать:

$$\omega = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi \frac{ae^{i\theta} + z}{ae^{i\theta} - z} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \frac{ae^{i\theta} + z}{ae^{i\theta} - z} d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \frac{ae^{i\theta} + z}{ae^{i\theta} - z} d\theta + i \ln U,$$

но

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{ae^{i\theta} + z}{ae^{i\theta} - z} d\theta = -2\pi, \quad \text{если} \quad |z| > a,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{ae^{i\theta} + z}{ae^{i\theta} - z} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left[-1 + \frac{2ae^{i\theta}}{ae^{i\theta} - z}\right] d\theta =$$

$$= \left[-\theta + \frac{2}{i} \ln(ae^{i\theta} - z)\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{i} \ln \frac{z - a}{z + ai}, \qquad (39.8)$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ae^{i\theta} + z}{ae^{i\theta} - z} d\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{i} \ln \frac{z - ai}{z - a};$$

поэтому получаем следующее окончательное выражение для функции $\omega(z)$:

$$\omega(z) = \vartheta + i \ln V =$$

$$= \pi + i \ln V + \frac{1}{2i} \ln \frac{z^2 + a^2}{(z-a)^2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vartheta \frac{ae^{i\vartheta} + z}{ae^{i\vartheta} - z} d\vartheta, \quad (39.9)$$

причём берётся то значение логарифма, которое при $z = \infty$ обращается в 0.

Исследуем прежде всего характер течения на бесконечности. Мы имеем при $|z| > 1$ разложение:

$$\frac{ae^{i\vartheta} + z}{ae^{i\vartheta} - z} = -1 + \frac{2ae^{i\vartheta}}{-z\left(1 - \frac{a}{z} e^{i\vartheta}\right)} = -1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} e^{in\vartheta};$$

но

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vartheta e^{in\vartheta} d\vartheta = 2i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta \sin n\vartheta \, d\vartheta = 2i \left[-\frac{\vartheta \cos n\vartheta}{n} + \frac{\sin n\vartheta}{n^2} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2i \frac{\sin \frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2}}{n^2};$$

поэтому

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vartheta \frac{ae^{i\vartheta} + z}{ae^{i\vartheta} - z} d\vartheta = -4i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2}}{n^2} \frac{a^n}{z^n},$$

далее

$$\ln \frac{z^2 + a^2}{(z-a)^2} = \ln\left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right) - 2 \ln\left(1 - \frac{a}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) \frac{a^n}{z^n};$$

значит при $|z| > 1$

$$\omega(z) = \pi + i \ln U - i \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \frac{a^n}{z^n} =$$

$$= \pi + i \ln U - i\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{a}{z} - \frac{ia^2}{2z^2} - \ldots \quad (39.10)$$

Отсюда

$$\frac{dw_1}{dz} = e^{-i\omega(z)} = -U \left\{ 1 - \frac{\pi - 2}{\pi} \frac{a}{z} - \ldots \right\}$$

и окончательно, обозначая через $w = \varphi + i\psi$ комплексный потенциал абсолютного движения в области D_1, будем иметь:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw_1}{dz} + U = U\frac{\pi - 2}{\pi}\frac{a}{z} + \dots \qquad (39.11)$$

Эта формула показывает, что далеко перед телом течение имеет такой же характер, как если бы оно происходило от источника, находящегося в начале координат и имеющего мощность

$$Q = 2aU(\pi - 2) = 2{,}283aU. \qquad (39.12)$$

Теперь найдём распределение скорости вдоль цилиндра. Для этого нам нужно найти мнимую часть функции $\omega(z)$ при $z = ae^{i\theta_0}$. Мы имеем:

$$\frac{ae^{i\theta} + ae^{i\theta_0}}{ae^{i\theta} - ae^{i\theta_0}} = \frac{e^{i\frac{\theta-\theta_0}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta_0}{2}}}{e^{i\frac{\theta-\theta_0}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\theta_0}{2}}} = -i\operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_0}{2}.$$

Чтобы иметь дело только со сходящимися интегралами, сделаем следующее преобразование:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \theta\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}d\theta = \theta_0\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\theta-\theta_0)\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}d\theta =$$

$$= \left(-\pi + \frac{2}{i}\ln\frac{z-ai}{z+ai}\right)\theta_0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\theta-\theta_0)\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}d\theta,$$

причём мы воспользовались двумя последними формулами (39.8). Положим теперь в формуле (39.9) $z = ae^{i\theta_0}$ и отделим мнимые части, замечая, что при $z = ae^{i\theta_0}$ мы имеем

$$|z - ae^{i\alpha}| = 2a\left|\sin\frac{\theta_0-\alpha}{2}\right|$$

и что, следовательно,

$$\operatorname{Re}\ln\frac{z^2+a^2}{(z-a)^2} = \operatorname{Re}\ln\frac{(z-ai)(z+ai)}{(z-a)^2} = \ln\left|\frac{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\theta_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\frac{\theta_0}{2}}\right|$$

$$\operatorname{Re}\ln\frac{z-ai}{z+ai} = \ln\left|\frac{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right|,$$

мы легко получим следующее выражение логарифма абсолютной величины скорости вспомогательного течения при $z = ae^{i\theta_0}$:

$$\ln V_1 = \ln U + \ln\left|\sin\frac{\theta_0}{2}\right| + \frac{1}{\pi}\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right)\ln\left|\sin\left(\frac{\theta_0}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| - \\ - \frac{1}{\pi}\left(\theta_0 + \frac{\pi}{2}\right)\ln\left|\sin\left(\frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\theta - \theta_0)\operatorname{ctg}\frac{\theta - \theta_0}{2}\,d\theta. \quad (39.13)$$

Если ввести нечётную функцию

$$f(\theta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\theta} \alpha \operatorname{ctg}\alpha\, d\alpha, \quad (39.14)$$

то будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\theta - \theta_0)\operatorname{ctg}\frac{\theta - \theta_0}{2}\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_0}{2}} \alpha \operatorname{ctg}\alpha\, d\alpha = \\ = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_0}{2}} \alpha \operatorname{ctg}\alpha\, d\alpha + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_0}{2}} \alpha \operatorname{ctg}\alpha\, d\alpha = f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right).$$

Поэтому получаем следующую формулу:

$$V_1 = U e^{f\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_0}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_0}{2}\right)} \times \\ \times \left|\sin\frac{\theta_0}{2}\right| \left|\sin\left(\frac{\theta_0}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right|^{\frac{\theta_0}{\pi}-\frac{1}{2}} \left|\sin\left(\frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|^{-\frac{\theta_0}{\pi}-\frac{1}{2}}. \quad (39.15)$$

Нас интересуют значения θ_0 в промежутке $(-\pi, \pi)$; из предыдущей формулы следует, что для вычисления V_1 необходимо знать значения функции $f(\theta)$ в интервале $(0, 3\pi/4)$; эти значения даны в таблице IX (см. стр. 607). Отметим попутно, что $f(\pi/2) = \ln 2$.

После этого мы можем вычислить значения V_1; в частности, при $\theta_0 = \pi/2$ мы имеем $V_1 = U\sqrt{2}$.

Принимая, далее, в расчёт формулы (39.1), (39.3) и (39,5), мы найдём следующие выражения для значений $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$ на

контуре цилиндра:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-V_1+U, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \quad \text{для} \quad -\pi\leqslant\theta\leqslant-\frac{\pi}{2},\\
&\qquad\qquad \text{и} \quad \frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}=V_1\sin\theta+U, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-V_1\cos\theta \quad \text{для} \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant 0,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-V_1\sin\theta+U, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=V_1\cos\theta \quad \text{для} \quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{39.16}$$

По формулам (37.22) мы можем затем определить распределение давления на контуре C:

$$\left.\begin{aligned}
&p=\frac{\rho}{2}(U^2-V_1^2) \quad \text{для} \quad 0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2},\\
&p=\frac{\rho}{2}(U^2-2UV_1) \quad \text{для} \quad \frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi.
\end{aligned}\right\} \tag{39.17}$$

Что касается распределения скоростей внутри области течения, то, определив по формуле (39.9) ϑ и V, мы будем, на основании (39.1), (39.3) и (37.18), иметь следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}
&v_x=V\cos\vartheta+U,\\
&v_y=V\sin\vartheta \text{ в } D_2,\\
&v_x=V\cos\vartheta+U+V_1,\\
&v_y=V\sin\vartheta \text{ в } D_2,
\end{aligned}\right\} \tag{39.18}$$

причём берётся значение V_1 в той точке контура C_2, которая имеет ту же ординату y, что и точка M области D_2 в которой определяется v_x.

Таблица X

$\theta°$	$f(\theta)$	$\theta°$	$f(\theta)$
0	0,000	72	0,650
9	0,100	81	0,682
18	0,198	90	0,693
27	0,293	99	0,680
36	0,382	108	0,636
45	0,465	117	0,554
54	0,539	126	0,424
63	0,601	135	0,228

При переходе из области D_1 в область D_2 составляющая скорости v_x терпит разрыв, величина которого равна

$$(V_1)_{\theta=\frac{\pi}{2}}=U\sqrt{2}.$$

Это значит, что вдоль прямых линий, отделяющих область D_1 от области D_2, имеются вихревые слои.

Точно также из формул (39.17) ясно видно, что на тех же линиях и давление терпит разрыв, величина которого в точках K_1 и K_2

отделяющих C_1 от C_2, равна:

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}\left(V_1^2 - 2UV_1\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\rho U^2\left(\sqrt{2}-1\right) = -0{,}414\rho U^2. \qquad (39.19)$$

Если бы мы определили давление в задней части течения D_2 формулой

$$\tilde{p} = \rho U\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\rho}{2}\left\{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{M_2} + U\right]^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\} +$$

$$+\left(\sqrt{2}-1\right)\rho U^2, \qquad (39.20)$$

отличающейся от формулы (39.17) только постоянным слагаемым, то давление на всём контуре C менялось бы непрерывно, но всё-таки на линиях K_1L_1 и K_2L_2 (рис. 186) давление продолжало бы терпеть разрыв.

Приведём теперь таблицу XI, дающую значения V_1/U и $\frac{p}{\frac{1}{2}\rho U^2}$ в точках контура C:

Таблица XI

θ°	$\frac{V_1}{U}$	$\frac{p}{\frac{1}{2}\rho U^2}$	θ°	$\frac{V_1}{U}$	$\frac{p}{\frac{1}{2}\rho U^2}$
0	0,000	1,000	90	1,414	—1,828
9	0,280	0,922	99	1,274	—1,548
18	0,552	0,696	108	1,217	—1,434
27	0,807	0,349	117	1,183	—1,366
36	1,038	0,076	126	1,160	—1,320
45	1,236	—0,528	135	1,144	—1,288
54	1,395	—0,946	144	1,133	—1,266
63	1,507	—1,270	153	1,125	—1,251
72	1,563	—1,443	162	1,120	—1,240
81	1,551	—1,405	171	1,117	—1,235
90	1,414	—1,000	180	1,116	—1,233

Наконец, применяя формулу (38.7), мы можем вычислить сопротивление, испытываемое цилиндром при его движении, в виде

$$X = \rho a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} V_1^2\cos\theta\, d\theta, \qquad (39.21)$$

что после численного интегрирования даёт нам сопротивление

$$W = 1{,}31\rho U^2 a. \qquad (39.22)$$

Это значение слишком велико по сравнению с экспериментальными данными и объясняется тем, что в то время, как распределение давления на передней части цилиндра довольно хорошо соответствует опытным данным, давление на задней части цилиндра, вычисленное по формуле (39.17), оказывается чересчур низким. Производя вычисление давления по исправленной формуле (39.20), мы должны во всех точках задней части цилиндра увеличить давление на $0{,}414\rho U^2$. В результате получается уменьшение сопротивления на $0{,}414\rho U^2 \cdot 2a = 0{,}83\rho U^2 a$ и, следовательно, в этом случае мы будем иметь

$$W = 0{,}48\rho U^2 a, \tag{39.23}$$

что гораздо лучше соответствует опытным данным.

§ 40. Обтекание плоской пластинки. В качестве второго примера применения уравнений теории исчезающей вязкости рассмотрим обтекание прямолинейной пластинки. Пусть пластинка K_1K_2 длины $2l$,

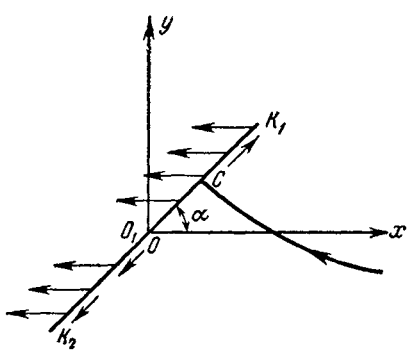

Рис. 188.

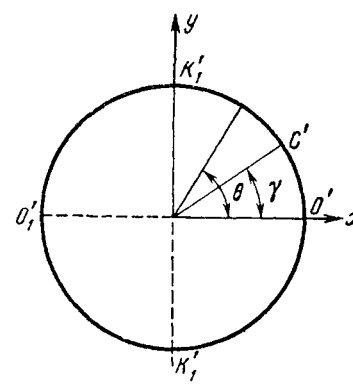

Рис. 189.

наклонённая к оси Ox под углом α, движется параллельно оси Ox со скоростью U (рис. 188).

Отобразим внешность контура K_1K_2 на внешность единичного круга в плоскости Z так, чтобы точка K_1 перешла в точку l, а точка $z = \infty$ перешла в точку $Z = \infty$. Для этого надо взять

$$Z = \frac{le^{i\alpha}}{2l}\left(Z - \frac{1}{Z}\right), \tag{40.1}$$

при этом точка K_2 переходит в точку $Z = -i$ (рис. 189). Построим теперь вспомогательное течение $w_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ по условиям (39.2). Полагая по-прежнему

$$\frac{dw_1}{dz} = e^{-i\omega(z)}, \qquad \omega(z) = \vartheta + i \ln V \tag{40.2}$$

и рассматривая ω как функцию от Z, легко найдём значения ϑ в точках окружности единичного радиуса. В самом деле, векторы скорости вспомогательного течения имеют, очевидно, направления, указанные на рис. 188. При этом точка разветвления потока C нам пока неизвестна.

Итак, граничные условия для функции ϑ таковы:

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_1 = \pi \quad \text{для} \quad -\pi \leqslant \theta < -\frac{\pi}{2} \ \text{и} \ \frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi, \\ &\vartheta_1 = \alpha \quad \text{для} \quad \gamma < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ &\vartheta_1 = \pi + \alpha \quad \text{для} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{40.3}$$

где γ — аргумент точки C', соответствующей в плоскости Z точке C.

Применение формулы (39.7) сразу определяет нам функцию ω:

$$\omega(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\gamma} \pi \frac{e^{i\theta}+Z}{e^{i\theta}-Z}\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \pi \frac{e^{i\theta}+Z}{e^{i\theta}-Z}\,d\theta - \\ - \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha \frac{e^{i\theta}+Z}{e^{i\theta}-Z}\,d\theta + i\beta,$$

где β — вещественная произвольная постоянная. Но

$$\int_{\delta}^{\gamma} \frac{e^{i\theta}+Z}{e^{i\theta}-Z}\,d\theta = \int_{\delta}^{\gamma}\left(-1 + \frac{2e^{i\theta}}{e^{i\theta}-Z}\right)d\theta = \\ = \left[-\theta + \frac{2}{i}\ln(e^{i\theta}-Z)\right]_{\theta=\delta}^{\theta=\gamma} = \delta - \gamma + \frac{2}{i}\ln\frac{Z-e^{i\gamma}}{Z-e^{i\delta}},$$

причём берётся то значение логарифма, которое при $Z=\infty$ приводится к нулю. Поэтому после простых вычислений получим:

$$\omega(z) = \frac{3\pi+2\alpha+2\gamma}{4} + i\ln\frac{Z-e^{i\gamma}}{Z-i} + \frac{i\alpha}{\pi}\ln\frac{Z-i}{Z+i} + i\beta.$$

Подставляя сюда $z=\infty$, $Z=\infty$, получим

$$\omega(\infty) = \frac{3\pi+2\alpha+2\gamma}{4} + i\beta, \quad \left(\frac{dw_1}{dz}\right)_{z=\infty} = e^{-i\omega(\infty)} = e^{-i\frac{3\pi+2\alpha+2\gamma}{4}+\beta},$$

и так как вследствие граничного условия на бесконечности (39.2) должно быть

$$\left(\frac{dw_1}{dz}\right)_{z=\infty} = -U = e^{-i\pi+\ln U},$$

а с другой стороны γ должна лежать в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, то необходимо взять

$$\beta = \ln U, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Итак, мы получаем следующее окончательное выражение для функции $\omega(z)$:

$$\omega(z) = \pi + i \ln U + i \ln \frac{Z - ie^{-i\alpha}}{Z - i} + \frac{i\alpha}{\pi} \ln \frac{Z - i}{Z + i}. \tag{40.4}$$

Для комплексной скорости вспомогательного течения мы находим:

$$\frac{dw_1}{dz} = e^{-i\omega(z)} = -U \frac{Z - ie^{-i\alpha}}{Z - i} \left(\frac{Z - i}{Z + i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}. \tag{40.5}$$

Введём ещё одну переменную ζ, положив

$$\zeta = i \frac{Z - i}{Z + i};$$

при этом внешность единичного круга в плоскости Z переходит в верхнюю полуплоскость ζ, точка O' в 1, точка K_1' — в O, точка O' в -1. Между z и ζ существуют простые соотношения

$$z = le^{i\alpha} \frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{le^{i\alpha} - z}{le^{i\alpha} + z}}. \tag{40.6}$$

Окончательно для комплексной скорости абсолютного движения в области D_1 мы найдём после простых вычислений следующее выражение:

$$\frac{d\omega}{dz} = U + \frac{dw_1}{dz} = U\left[1 - e^{-i\alpha}\left(\zeta^{\frac{\alpha}{\pi}} \cos\frac{\alpha}{2} - \zeta^{\frac{\alpha}{\pi}-1} \sin\frac{\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= U\left\{1 - e^{-i\alpha}\left[\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{le^{i\alpha} - z}{le^{i\alpha} + z}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} - \sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{le^{i\alpha} - z}{le^{i\alpha} + z}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2}}\right]\right\}. \tag{40.7}$$

Чтобы выяснить характер течения на бесконечности, лучше исходить из формулы (40.5); замечая, что

$$\left(\frac{Z - i}{Z + i}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} = \left(1 - \frac{2i}{Z} - \frac{2}{Z^2} + \ldots\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} = 1 - \frac{2i\alpha}{\pi Z} + \ldots,$$

легко найдём, что

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{Ui}{Z}\left(1 - e^{-i\alpha} - \frac{2\alpha}{\pi}\right) + \ldots$$

и вследствие формулы преобразования (40.1)

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{lU}{2z}\left(e^{i\alpha} - 1 - \frac{2\alpha e^{i\alpha}}{\pi}\right) + \ldots = \frac{A - iB}{z} + \ldots, \tag{40.8}$$

где

$$A = \frac{lU}{2}\left(1 - \cos\alpha + \frac{2\alpha}{\pi}\cos\alpha\right), \qquad B = \frac{lU}{2}\left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right)\sin\alpha. \quad (40.9)$$

Полученная формула показывает, что далеко перед телом течение имеет такой характер, как если бы оно происходило от совокупности источника и вихря, находящихся в начале координат, причём мощность источника равна

$$Q = 2\pi A = lU\,[\pi - \pi\cos\alpha + 2\alpha\cos\alpha], \quad (40.10)$$

а интенсивность вихря равна

$$\Gamma = 2\pi B = lU\,(\pi - 2\alpha)\sin\alpha. \quad (40.11)$$

При малых значениях α циркуляция получается равной $\pi lU\alpha$, в то время как по теории Жуковского циркуляция должна равняться $2\pi lU\alpha$. Значение циркуляции, имеющее место в действительности, лежит между этими двумя значениями.

Течение в области D_1 определяется формулой (40.7). Чтобы определить течение области D_2, необходимо вычислить значения функции (40.7) в точках задней стороны пластинки. Для этих точек ζ лежит в промежутке $(-\infty, 0)$, а z имеет значение $x + yi = y\operatorname{ctg}\alpha + iy = \frac{y}{\sin\alpha}e^{i\alpha}$; поэтому из формулы (40.6) следует, что

$$\zeta = -\sqrt{\frac{l\sin\alpha - y}{l\sin\alpha + y}}.$$

Мы имеем далее:

$$\zeta^{\frac{\alpha}{\pi}} = e^{li\alpha}\left(\frac{l\sin\alpha - y}{l\sin\alpha + y}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}}, \qquad \zeta^{\frac{\alpha}{\pi}-1} = -e^{li\alpha}\left(\frac{l\sin\alpha - y}{l\sin\alpha + y}\right)^{\frac{\alpha-\pi}{2\pi}},$$

и поэтому по формуле (40.7) находим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = U\left[1 - \cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{l\sin\alpha - y}{l\sin\alpha + y}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} - \sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{l\sin\alpha - y}{l\sin\alpha + y}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}-\frac{1}{2}}\right],$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{на} \quad C_2; \quad (40.12)$$

применяя после этого формулы (37.18), найдём течение в области D_2.

Вычислим, наконец, сопротивление, испытываемое пластинкой, для чего применим формулу:

$$X = \frac{\rho}{2}\int_{C_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - U\right)^2 dy = \frac{\rho}{2}\int_{l\sin\alpha}^{-l\sin\alpha}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - U\right)^2 dy.$$

Подставим сюда предыдущее выражение для $\partial\varphi/\partial x$ и воспользуемся подстановкой

$$y = l\eta\sin\alpha;$$

тогда получим

$$X = -\frac{\rho U^2 l \sin\alpha}{2}\int_{-1}^{1}\left[\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} + \sin\alpha\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}-\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \sin^2\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}\right] d\eta.$$

Но если положить

$$\frac{1-\eta}{1+\eta} = t,$$

то будем иметь

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{\beta} d\eta = 2\int_{0}^{\infty}\frac{t^{\beta}\,dt}{(1+t)^2} = \frac{2\pi\beta}{\sin\pi\beta}\quad(-1<\beta<1).$$

Теперь без труда после ряда тригонометрических преобразований получим:

$$X = -\frac{\rho U^2 l}{2}\left[\pi - (\pi-2\alpha)\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\right]. \tag{40.13}$$

Аналогичным образом, пользуясь второй из формул (38.7) и значением Γ из формулы (40.11), мы могли бы вычислить Y. Но в данном случае достаточно заметить, что все элементарные силы давления направлены по нормали к пластинке. Поэтому результирующая сила должна быть перпендикулярна к пластинке. А отсюда сразу следует, что

$$Y = -X\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\rho U l^2}{2}\left[\pi\operatorname{ctg}\alpha - (\pi-2\alpha)\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}\right]. \tag{40.14}$$

При угле $\alpha = \pi/2$ составляющая Y обращается в нуль, как и должно быть, для X же получается выражение

$$X_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\rho U^2 l\,(\pi+2)}{2} = -2{,}57\rho U^2 l, \tag{40.15}$$

в то время как опыты дают коэффициент 1,56. Как видим, сопротивление получается чрезмерно большим. Причиной этого является то же обстоятельство, которое имело место и в случае обтекания цилиндра: в то время как распределение давления на передней стороне пластинки хорошо соответствует действительному, на задней стороне пластинки получаются чересчур низкие давления.

Можно получить лучшие результаты, видоизменяя несколько основные предпосылки теории, как это сделал в ряде работ Цейлон (Zeilon)[1]).

[1]) См., например, Oseen C. W., Hydrodynamik, приложение, содержащее две работы Цейлона.

Рассмотрим, например, стационарное плоское движение и допустим, что вектор полной скорости $\boldsymbol{v}$ может быть разложен на две части

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}', \tag{40.16}$$

где $\boldsymbol{v}_0$ есть вектор скорости основного движения, а $\boldsymbol{v}'$ — вектор дополнительной скорости. Для определённости примем, что $\boldsymbol{v}_0$ есть безвихревой потенциальный вектор

$$v_{ox} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_{oy} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Примем теперь, что в выражении $\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$, входящем в основные уравнения (37.1), мы можем пренебречь квадратичным членом $\boldsymbol{v}' \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}'$, так что эти уравнения можно записать так:

$$-\rho v_{oy} \Omega = -\frac{\partial q}{\partial x} + \nu \Delta v_x; \quad \rho v_{ox} \Omega = -\frac{\partial q}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \tag{40.17}$$

где

$$\Omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Из предыдущих уравнений после перекрёстного дифференцирования легко найдём, что

$$\rho v_{ox} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \rho v_{oy} \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \nu \Delta \Omega;$$

в пределе при $\mu \to 0$ получаем уравнение

$$v_{ox} \frac{\partial \Omega}{\partial y} + v_{oy} \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0. \tag{40.18}$$

Это последнее уравнение показывает, что $\Omega = f(\psi)$, т. е. что вихрь имеет постоянное значение на линиях тока основного движения.

Принимая $\psi = -Uy$, мы получаем прежний результат, что за телом вихри перемещаются по прямым, параллельным оси Ox. Выбирая иную функцию ψ, мы получаем другие траектории для вихрей и, следовательно, другое решение задачи.

Ещё одно видоизменение теории касается граничных условий. В основной теории исчезающей вязкости мы имеем резкое разграничение передней стороны, на которой происходит обтекание потоком тела, от задней, на которой происходит прилипание жидкости к телу. Можно ввести некоторые переходные участки, на которых один режим обтекания будет сменяться другим. Ясно, что путём надлежащего подбора этих участков можно значительно улучшить совпадение получающихся теоретических результатов с экспериментальными данными, особенно, если использовать также и произвол в выборе функции тока основного течения ψ.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

§ 1. Введение. По-видимому, Гаген (Hagen) первый, производя опыты с водой, движущейся в цилиндрических трубках, заметил, что характер движения внезапно меняется, если, увеличивая постепенно скорость течения, мы перейдём через некоторый предел. Именно, при движениях со скоростями, меньшими, чем этот предел, струи имеют вид твёрдых стержней, но, как только этот предел перейдён, движение сразу становится неравномерным, и струи начинают разбиваться и пульсировать. Гаген обратил внимание также и на то, что переход потока из одного типа в другой может быть ещё получен путём изменения коэффициента вязкости (температуры) или радиуса трубки. Однако, Гагену не удалось подметить здесь общего принципа. Это сделал Осборн Рейнольдс, показав, что переход одного типа движения в другой совершается, когда безразмерная величина Ur/ν (U — средняя скорость, r — радиус трубки, ν — кинематический коэффициент вязкости) переходит через некоторую границу. Новый, беспорядочный тип движения, который при этом возникает, получил название турбулентного[1]), число Ur/ν было названо впоследствии числом Рейнольдса (см. гл. II) и стало обозначаться буквой R, а то значение R, начиная с которого возникает турбулентное движение, — критическим значением R_k. При этом плавное движение с $R < R_k$ получило название ламинарного.

Многочисленными экспериментами было установлено, что R_k меняется в зависимости от того, как эксперимент обставлен. Именно, если в начальном потоке было очень мало возмущений, то, увеличивая постепенно число Рейнольдса, мы придём к турбулентному движению нескоро, так что R_k будет велико, напротив, если основной поток сильно возмущён, R_k имеет малое значение. Заметим ещё, что в то время, как, по-видимому, нет оснований считать, что существует верхняя граница для R_k (используя всё более и более спокой-

[1]) Термин «турбулентность» был предложен Кельвином.

ный начальный поток, будем отодвигать R_k всё далее и далее), можно утверждать, что есть граница нижняя. Это значит, что каково бы ни было начальное возмущение, оно потухнет, не переходя в турбулентное движение, если R меньше некоторого числа.

Мы говорили о турбулентном движении в трубах (так называемая внутренняя задача); не меньший интерес представляет изучение турбулентности при обтекании (внешняя задача); наконец, в отличие от турбулентности механического происхождения, можно говорить о турбулентности происхождения термического (например, о турбулентности, возникающей в воздухе близ поверхности земли при отсутствии ветра, но при неравномерном нагревании почвы), или о турбулентности смешанного, термическо-механического происхождения (теплотехнические задачи, общая атмосферная турбулентность).

С точки зрения теоретической гидромеханики (так же как и с точки зрения эксперимента) проблема турбулентности распадается на две части: 1) изучить, при каких условиях и как возникает турбулентность (например, при каких условиях ламинарное движение в трубе переходит в турбулентное или как образуются турбулентные струйки в неравномерно нагреваемом воздухе), 2) изучить уже развитый турбулентный поток.

Первый из этих вопросов совершенно естественно связать с проблемой устойчивости, отождествляя возникновение турбулентности с потерей устойчивости.

Мы рассмотрим в следующих параграфах некоторые относящиеся сюда работы.

§ 2. Устойчивость движения между двумя коаксиальными цилиндрами. Чтобы установить устойчивость или неустойчивость движения, прибегнем к методу малых колебаний, накладывая на движение («основной поток») бесконечно малые нестационарные возмущения; если эти возмущения будут иметь характер малых периодических колебаний (или затухающих со временем), будем считать основной поток устойчивым; напротив, если возмущения будут расти со временем — можем считать основной поток неустойчивым.

Тейлор первый дал пример такого ламинарного течения, которое может при известных условиях стать неустойчивым [1]). Он рассматривал колебания, обладающие осевой симметрией и наложенные на движение, происходящее между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами.

В качестве основного потока возьмём движение со скоростями

$$v_r = v_z = 0; \qquad v_\varphi = Ar + \frac{B}{r}$$

[1]) Taylor G., Stability of a Viscous Liquid contained between two rotating Cyliders, Proc. Roy. Soc. (A), **223** (1923), стр 289, далее, Proc. Int. Cong. Appl. Mech. Delft (1924) и Z. A. M. M., **5** (1925), стр. 250.

(z — ось цилиндров, r — расстояние от оси, v_φ — скорость, касательная к окружности радиуса r с центром на оси), причём подберём A и B так, чтобы описать движение между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов r_1 и r_2, вращающимися с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 соответственно. Тогда должно быть (см. главу II, § 15):

$$r_1\omega_1 = Ar_1 + \frac{B}{r_1}; \qquad r_2\omega_2 = Ar_2 + \frac{B}{r_2},$$

откуда

$$A = \frac{r_1^2\omega_1 - r_2^2\omega_2}{r_1^2 - r_2^2}; \qquad B = \frac{r_1^2\omega_1\left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}.$$

Рассмотрим теперь движение со скоростями

$$v_r = v_r'; \qquad v_\varphi = v_{\varphi_0} + v_\varphi'; \qquad v_z = v_z',$$

где v_r', v_z', v_φ' — бесконечно малые величины, квадратами которых можно пренебречь. Напишем уравнения Навье — Стокса в цилиндрических координатах и вставим введённые значения скоростей, отбрасывая малые второго порядка. Получим уравнения движения:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial r} + 2\left(A + \frac{B}{r^2}\right)v_\varphi' + \nu\left[\frac{\partial^2 v_r'}{\partial z^2} + \Delta_1 v_r' - \frac{v_r'}{r^2}\right] = \frac{\partial v_r'}{\partial t},$$

$$-2Av_r' + \nu\left[\frac{\partial^2 v_\varphi'}{\partial z^2} + \Delta_1 v_\varphi' - \frac{v_\varphi'}{r^2}\right] = \frac{\partial v_\varphi'}{\partial t},$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z} + \nu\left[\frac{\partial^2 v_z'}{\partial z^2} + \Delta_1 v_z'\right] = \frac{\partial v_z'}{\partial t}$$

$\left(\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right.$, $\left.p'$ — возмущение давления$\right)$, и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial r v_r'}{\partial r} + \frac{\partial r v_z'}{\partial z} = 0.$$

При этом граничные условия будут иметь вид:

$$v_r' = v_\varphi' = v_z' = 0 \quad \text{при} \quad r = r_1 \quad \text{и при} \quad r = r_2.$$

Примем:

$$v_r' = u_1 \cos \lambda z e^{\beta t}; \qquad v_\varphi' = u_2 \cos \lambda z e^{\beta t}; \qquad v_z' = u_3 \sin \lambda z e^{\beta t},$$

где u_1, u_2, u_3 — функции одного только r, и исключим p' из наших уравнений. Получим:

$$\begin{aligned}
&\nu\left(\Delta_1 - \frac{1}{r^2} - \lambda'^2\right) u_2 = 2Au_1,\\
&\frac{\nu}{\lambda}\frac{d}{dr}\left(\Delta_1 - \lambda'^2\right) u_3 = -2\left(A + \frac{B}{r^2}\right) u_2 - \nu\left(\Delta_1 - \frac{1}{r^2} - \lambda'^2\right) u_1, \qquad (2.1)\\
&\frac{du_1}{dr} + \frac{u_1}{r} + \lambda u_3 = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\lambda'^2 = \lambda^2 + \frac{\beta}{\nu}.$$

Эту систему уравнений надо проинтегрировать, принимая во внимание краевые условия:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0 \quad \text{при} \quad r = r_1 \quad \text{и при} \quad r = r_2.$$

Будем искать решения для $u_1(r)$ в виде ряда Фурье-Бесселя, расположенного по бесселевым функциям $Z_1(k_m r) = c_1 J_1(k_m r) + c_2 N_1(k_m r)$, где c_1 и c_2 подобраны так, чтобы $Z_1(k_m r_1) = Z_1(k_m r_2) = 0$; последнее, очевидно, означает, что $k_1, k_2, \ldots, k_m, \ldots$ суть корни уравнения

$$\begin{vmatrix} J_1(k_m r_1) & N_1(k_m r_1) \\ J_1(k_m r_2) & N_1(k_m r_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда

$$u_1(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m Z_1(k_m r), \qquad (2.2)$$

причём коэффициенты a_m неизвестны и подлежат определению; они должны иметь вид:

$$a_m = \frac{1}{H_m}\int_{r_1}^{r_2} r u_1(r)\, Z_1(k_m r)\, dr; \qquad H_m = \int_{r_1}^{r_2} r Z_1^2(k_m r)\, dr.$$

Теперь для u_2 мы получим уравнение:

$$\nu\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \lambda'^2\right) u_2 = 2A\sum_{m=1}^{\infty} a_m Z_1(k_m r)$$

и, так как

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \lambda'^2\right) Z_1(i\lambda' r) = 0,$$

решение его можно получить как сумму общего решения однородного уравнения

$$c_3 J_1(i\lambda' r) + c_4 N_1(i\lambda' r)$$

(c_3 и c_4 — произвольные постоянные) и ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m Z_1(k_m r),$$

где

$$b_m = -\frac{2Aa_m}{\nu\left(k_m^2 + \lambda'^2\right)}. \tag{2.3}$$

Условия $u_2(r_1) = u_2(r_2) = 0$ дадут затем

$$c_3 = c_4 = 0.$$

Чтобы определить u_3, обратимся ко второму из уравнений (2.1) и рассмотрим сперва решение однородного уравнения. Так как по известному свойству функций Бесселя

$$\frac{1}{k}\frac{d}{dr} Z_0(kr) = -Z_1(kr),$$

мы, очевидно, удовлетворим уравнению

$$\frac{d}{dr}(\Delta_1 - \lambda'^2) u_3 = 0,$$

положив

$$u_3 = Z_0(i\lambda' r) + \text{const}.$$

Таким образом нам, очевидно, надо искать выражение для $u_3(r)$ в виде:

$$u_3(r) = c_5 + c_6 J_0(i\lambda' r) + c_7 N_0(i\lambda' r) + \sum_{m=1}^{\infty} d_m Z_0(k_m r), \tag{2.4}$$

где c_5, c_6, c_7 — произвольные постоянные, а для определения d_m получим уравнение:

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_m \left(\frac{\nu k_m}{\lambda}\right)\left(\lambda'^2 + k_m^2\right) Z_1(k_m r) = \sum_{m=1}^{\infty} \nu\left(\lambda'^2 + k_m^2\right) a_m Z_1(k_m r) +$$

$$+ 2\left(A + \frac{B}{r^2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2Aa_m}{\nu\left(k_m^2 + \lambda'^2\right)} Z_1(k_m r). \tag{2.5}$$

Таким образом в качестве неизвестных коэффициентов у нас фигурируют пока c_5, c_6, c_7, a_1, a_2, ..., a_m, ..., d_1, d_2, ..., d_m, ... Вместо того чтобы определять d_1, d_2, ... из уравнения (2.5) через a_1, a_2, ..., удовлетворим сперва последнему из оставшихся уравнений — уравнению неразрывности [третьему из уравнений (2.1)]. Член $\frac{u_1}{r} + \frac{du_1}{dr}$ дает, очевидно, $\sum_{m=1}^{\infty} k_m a_m Z_0(k_m r)$ *), и уравнение нераз-

*) Вследствие известного соотношения, $Z_1'(x) = Z_0(x) - \frac{Z_1(x)}{x}$.

рывности можно будет заменить на основании (2.4) следующим соотношением:

$$\sum_{m=1}^{\infty}(k_m a_m+\lambda d_m)\,Z_0(k_m r)+\lambda\,[c_5+c_6 J_0(i\lambda' r)+c_7 N_0(i\lambda' r)]=0, \quad (2.6)$$

Этим уравнением мы и воспользуемся для определения d_m через посредство a_1, a_2, ... и через c_5, c_6, c_7. Чтобы возможно было это сделать, надо, однако, предварительно переразложить $J_0(i\lambda' r)$ и $N_0(i\lambda' r)$ в ряды Фурье-Бесселя, но уже не по $Z_1(k_m r)$, а по функциям $Z_0(k_m r)$ $(i\lambda \neq k_m)$. Мы можем написать

$$c_5+c_6 J_0(i\lambda' r)+c_7 N_0(i\lambda' r)=c_5'+\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m Z_0(k_m r),$$

где

$$\alpha_m=\frac{1}{H_m}\int_{r_1}^{r_2} r Z_0(k_m r)\,[c_6 J_0(i\lambda' r)+c_7 N_0(i\lambda' r)]\,dr;$$

$$H_m=\int_{r_1}^{r_2} Z_0^2(k_m r)\,r\,dr,$$

c_5' — постоянная, содержащая в качестве слагаемого c_5. Для определения α_m замечаем, что интегралы типа $\int_{r_1}^{r_2} r J_0(k_m r)\,J_0(i\lambda' r)\,dr$ легко вычисляются. Действительно, по общей формуле:

$$\int_{r_1}^{r_2} r J_n(k_s r)\,J_n(k_t r)\,dr=$$

$$=\left\{\frac{r}{k_s^2-k_t^2}\left[k_t J_n(k_s r)\,J_n'(k_t r)-k_s J_n(k_t r)\,J_n'(k_s r)\right]\right\}_{r_1}^{r_2};$$

следовательно:

$$\alpha_m=\frac{1}{H_m}c_6\left\{\frac{r}{k_m^2+\lambda'^2}\left[i\lambda' Z_0(k_m r)\,J_0'(i\lambda' r)-k_m J_0(i\lambda' r)\,Z_0'(k_m r)\right]\right\}_{r_1}^{r_2}+$$

$$+\frac{1}{H_m}c_7\left\{\frac{r}{k_m^2+\lambda'^2}\left[i\lambda' Z_0(k_m r)\,N_0'(i\lambda' r)-k_m Z_0'(k_m r)\,N_0(i\lambda' r)\right]\right\}_{r_1}^{r_2}.$$

Но $Z_0'(k_m r)=-Z_1(k_m r)$ и потому $Z_0'(k_m r_1)=Z_0'(k_m r_2)=0$. Вводя ещё вместо произвольных постоянных c_6 и c_7 произвольные постоянные c_6' и c_7':

$$c_6'=i\lambda' r_2\,[c_6 J_0'(i\lambda' r_2)+c_7 N_0'(i\lambda' r_2)],$$
$$c_7'=-i\lambda' r_1\,[c_6 J_0'(i\lambda' r_1)+c_7 N_0'(i\lambda' r_1)],$$

получим:

$$a_m = \frac{1}{H_m\left(k_m^2 + \lambda'^2\right)}\left[c_6' Z_0(k_m r_2) + c_7' Z_0(k_m r_1)\right].$$

Уравнение (2.6) позволяет теперь заключить, что

$$c_5' = 0$$

и позволяет найти все d_m через посредство c_6, c_7 и a_m при помощи соотношений

$$d_m = -\frac{Z_0(k_m r_2)}{H_m\left(k_m^2 + \lambda'^2\right)} c_6' - \frac{Z_0(k_m r_1)}{H_m\left(k_m^2 + \lambda'^2\right)} c_7' - \frac{k_m}{\lambda} a_m. \qquad (2.7)$$

Нам остаётся теперь воспользоваться (2.5) и вставить туда эти d_m. В (2.5), однако, имеются члены вида const. $\frac{1}{r^2} Z_1(k_m r)$. Эти члены нам надлежит сперва разложить в ряды по функциям $Z_1(k_m r)$. Только когда это будет сделано, возможно будет, вставив d_m в (2.5), произвести сравнение коэффициентов при $Z_1(k_m r)$ с одинаковым m. Имеем:

$$\left(A + \frac{B}{r_2}\right) Z_1(k_m r) = \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s^m Z_1(k_s r), \qquad (2.8)$$

где коэффициенты

$$\gamma_s^m = \frac{1}{H_s} \int_{r_1}^{r_2} r\left(A + \frac{B}{r^2}\right) Z_1(k_m r)\, Z_1(k_s r)\, dr; \qquad H_s = \int_{r_1}^{r_2} r Z_0^2(k_s r)\, dr$$

могут быть вычислены, если известны k_s. Мы можем теперь вставить (2.7) и (2.8) в (2.5) и приравнять коэффициенты при одинаковых $Z_1(k_m r)$. Получим после простых преобразований:

$$\frac{\nu k_m}{\lambda H_m}\left[Z_0(k_m r_2)\, c_6' + Z_0(k_m r_1)\, c_7'\right] + \frac{\nu}{\lambda^2}\left(k_m^2 + \lambda'^2\right)\left(k_m^2 + \lambda^2\right) a_m + \\ + \frac{4A}{\nu}\left\{\frac{\gamma_1^m}{k_1^2 + \lambda'^2} a_1 + \frac{\gamma_2^m}{k_2^2 + \lambda'^2} a_2 + \ldots\right\} = 0. \qquad (2.9)$$

Придавая m разные значения, получим систему бесконечно большого числа однородных линейных алгебраических уравнений для определения c_6', c_7', a_1, a_2, ... Прибавим еще сюда неиспользованные условия обращения u_3 при $r = r_1$ и $r = r_2$ в нуль. Для этого заметим, что по уравнению неразрывности, обращение u_3 в нуль эквивалентно равенству: $\frac{u_1}{r} + \frac{du_1}{dr} = 0$, т. е. (см. выше)

$$\sum_{m=1}^{\infty} k_m a_m Z_0(k_m r) = 0.$$

Итак, имеем ещё два условия:

$$\left.\begin{aligned} k_1 Z_0(k_1 r_1)\, a_1 + k_2 Z_0(k_2 r_1)\, a_2 + \ldots &= 0, \\ k_1 Z_0(k_1 r_2)\, a_1 + k_2 Z_0(k_2 r_2)\, a_2 + \ldots &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

Бесконечная система (2.9) и (2.10) и должна служить для определения c_6', c_7', a_1, a_2, ... Приравнивая её определитель нулю, мы получим то, что мы ставили себе целью получить — вековое уравнение, связывающее при данных ω_1, ω_2, r_1 и r_2 величины β и λ (вернее λ и $\lambda' = \sqrt{\lambda^2 + \beta/\nu}$).

Тейлор дал детальный анализ этого векового уравнения, причём, ввиду чрезвычайных вычислительных трудностей, ограничился случаем, когда $r_2 - r_1$ мало по сравнению с $\frac{r_1 + r_2}{2}$. Отсылая за деталями к цитированным выше работам Тейлора, в которых имеются также и результаты экспериментальной проверки, укажем на главнейшие выводы. Анализ показывает, что если цилиндры вращаются в одну и ту же сторону, то при $\omega_1 r_1^2 < \omega_2 r_2^2$ всегда будет иметься устойчивость. Элементарный критерий этот неприменим, если вращение происходит в противоположных направлениях. На рис. 190

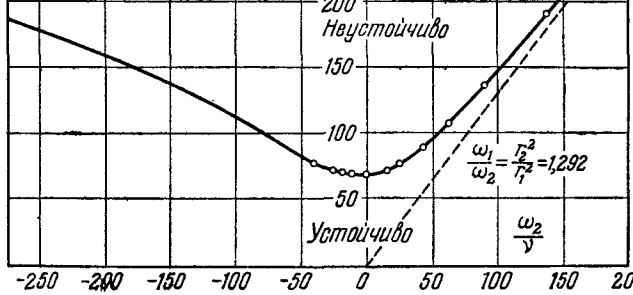

Рис. 190.

дана кривая, представляющая по Тейлору границу устойчивости. По горизонтальной оси отложены здесь значения ω_2/ν, по вертикальной ω_1/ν, причём взято $r_1 = 3{,}55$ *см*, $r_2 = 4{,}035$ *см*, так что $(r_2/r_1)^2 = 1{,}292$ (ниже прямой $\omega_1/\omega_2 = 1{,}292$ — всегда имеет место устойчивость). Интересно отметить, что в случае, когда вращение происходит в разных направлениях ($\omega_2 < 0$), значение ω_1, начиная от которого будет иметь место неустойчивость, должно быть больше, чем то, после которого будет неустойчивость при $\omega_2 = 0$.

На рис. 191 приведено сравнение данных теории и эксперимента

Если оба цилиндра вращаются одинаковым образом, потеря устойчивости проявится в возникновении рядов вихрей в плоскости меридиана, имеющих чередующиеся противоположные вращения и занимающих всё пространство между цилиндрами (рис. 191). Экспериментально можно обнаружить возникновение этих вихрей, помещая вдоль внутреннего цилиндра тонкий слой окрашенной жидкости; краска эта, когда возникают вихри, располагается по кольцам, окружающим вихревые области (рис. 191).

Если цилиндры вращаются в противоположные стороны, образуются два ряда вихрей; из них один соприкасается с внешним,

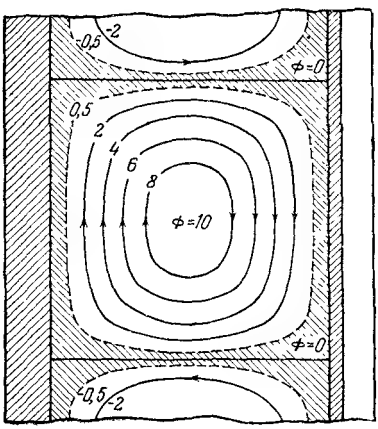

Рис. 191.

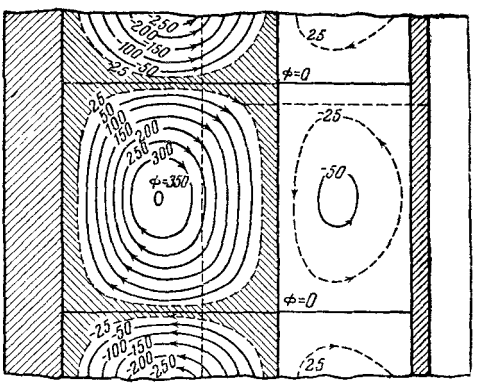

Рис. 192.

а другой с внутренним цилиндром (рис. 192). При этом краска распределяется как показано на рисунке.

Как качественно, так и количественно теория Тейлора даёт поразительное совпадение с опытом.

Сайндж (Synge)[1]) в 1938 г. привёл задачу Тейлора к уравнениям значительно более простого вида и показал, что критерий устойчивости $\omega_1 r_1^2 < \omega_2 r_2^2$ (при ω_1 и ω_2 одинакового знака) будет справедлив не только, когда $r_2 - r_1$ мало по сравнению с $\frac{r_1 + r_2}{2}$, но и в общем случае.

§ 3. Устойчивость течения между пластинками и устойчивость в пограничном слое. Перейдём теперь к исследованию устойчивости других движений. Мы остановимся на движениях

[1]) Synge J., On the Stability of a Viscous Liquid between rotating coaxial Cylinders, Proc. Roy. Soc. (A), London, 167 (1938), № 929, стр 250—256.

между двумя неподвижными параллельными стенками [1]) и на движениях в пограничном слое. Будем рассматривать эти задачи параллельно; первую из этих задач будем называть сокращённо случай I, вторую — случай II. Во всех случаях мы будем считать как движение, так и возмущение плоскими [2]).

Функция тока ψ плоского движения вязкой несжимаемой жидкости удовлетворяет, как мы знаем, уравнению (см. гл. II, § 8);

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \nu\Delta\Delta\psi = 0, \tag{3.1}$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости. Наше движение мы, как и в случае, рассмотренном Тейлором, считаем разбитым на два: основное, стационарное с функцией тока Ψ и бесконечное малое возмущение с функцией тока ψ'

$$\psi(x, y, t) = \Psi(x, y) + \psi'(x, y, t). \tag{3.2}$$

Таким образом скорости v_x и v_y представятся в виде:

$$v_x = \frac{\partial\Psi}{\partial y} + v'_x, \quad v_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} + v'_y,$$

где

$$v'_x = \frac{\partial\psi'}{\partial y}, \qquad v'_y = -\frac{\partial\psi'}{\partial x}.$$

Функция Ψ должна сама удовлетворять уравнению

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial x} - \nu\Delta\Delta\Psi = 0.$$

Заметив это, мы получим, подставляя (3.2) в (3.1), сохраняя линейные члены и отбрасывая члены второго порядка малости:

$$\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial t} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial y} - \frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial x} + \frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial x} - \nu\Delta\Delta\psi' = 0.$$

В случае движения между двумя параллельными стенками Ψ не зависит от x (ось x направлена параллельно стенкам), а в случае пограничного слоя можно считать, как всегда, что производные от Ψ по x малы в сравнении с производными по y (ось x направлена вдоль границы). Напротив, производные от возмущений ψ' по x и y, конечно, будут иметь одинаковый порядок малости. Таким образом мы можем написать вместо предыдущего уравнения:

$$\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial t} + U(y)\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial x} - U''(y)\frac{\partial\psi'}{\partial x} - \nu\Delta\Delta\psi' = 0, \tag{3.3}$$

---

[1]) Движения между параллельными стенками, из которых одна неподвижна, а другая движется, исследуются аналогичным образом.

[2]) Squire J. L. (Proc. Roy. Soc., London A, 142 (1933)), показал, что трёхмерные возмущения того типа, который мы будем рассматривать, более устойчивы чем двухмерные, поэтому наиболее важные черты в проблеме потери устойчивости можно уловить, изучая двухмерную задачу.

где $U(y)$ — скорость основного потока, отвечающая тому значению x (пусть это будет $x = x_0$), в области которого мы изучаем устойчивость потока:

$$U(y) = \frac{\partial \Psi(x_0, y)}{\partial y},$$

а $U''(y)$ — вторая производная от U по y.

Решение уравнения (3.3) будем искать в виде:

$$\psi' = f(y)\, e^{i(ax - bt)}.$$

Для f получим, очевидно:

$$\left(U - \frac{b}{a}\right)(f'' - a^2 f) - U'' f = -\frac{i\nu}{a}(f^{IV} - 2a^2 f'' + a^4 f). \quad (3.4)$$

Величину a всегда будем считать действительной (рассматриваем волны длины $2\pi/a$ вдоль оси x); величина b может быть комплексной:

$$b = b_r + ib_i.$$

Если будет $b_i < 0$, ψ' будет затухать во времени, и движение будет устойчиво; при $b_i > 0$ движение неустойчиво; $b_i = 0$ даёт нейтральный случай. Наше уравнение (3.4) — четвёртого порядка и мы должны решать его при четырёх краевых условиях. В случае I, когда движение происходит между плоскостями $y = 0$, $y = 2h$, нам надо поставить условия прилипания к стенкам, т. е. $(v'_x = v'_y = 0)$;

$$f(0) = f'(0) = f(2h) = f'(2h) = 0. \quad (3.5)$$

В случае II, когда изучается устойчивость пограничного слоя, будем брать кроме условия прилипания к стенке

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad (3.6)$$

ещё условие обращения решения вне пограничного слоя в решение для идеальной жидкости. В идеальной жидкости $\nu = 0$ и $U'' = 0$ и (3.4) переходит в уравнение

$$f'' - a^2 f = 0,$$

имеющее решением $f = \text{const.}\ e^{\pm ay}$. Решение типа const. e^{ay} мы должны отбросить как неограниченное на бесконечности: значит, должно быть $f = \text{const.}\ e^{-ay}$. Итак, если границей пограничного слоя будет $y = h$, мы должны потребовать выполнения условия

$$f'(h) + af(h) = 0. \quad (3.7)$$

Кроме того, мы должны потребовать ограниченности f на бесконечности.

Для удобства решения задачи введём безразмерные величины $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{t}$, $\bar{U}$ при помощи равенств

$$x = h\bar{x}, \quad y = h\bar{y}, \quad t = \frac{h}{U_m}\bar{t}, \quad U = U_m \bar{U}. \quad (3.8)$$

Здесь h — характерная длина — половина расстояния между пластинками в случае I и толщина пограничного слоя в случае II; U_m — характерная скорость основного движения, за которую мы примем максимальную скорость в случае I и скорость на границе пограничного слоя в случае II.

Обозначим

$$ah = \alpha; \quad \frac{b}{aU_m} = c, \quad \frac{U_m h}{\nu} = \mathsf{R}. \tag{3.9}$$

Тогда ψ' мы можем взять в виде

$$\psi' = f(\bar{y})\, e^{i\alpha(\bar{x} - c\bar{t})}, \tag{3.10}$$

и уравнение (3.4) примет вид:

$$(\bar{U} - c)\left(\frac{d^2 f}{d\bar{y}^2} - \alpha^2 f\right) - \frac{d^2\bar{U}}{d\bar{y}^2} f = -\frac{i}{\alpha \mathsf{R}}\left(\frac{d^4 f}{d\bar{y}^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 f}{d\bar{y}^2} + \alpha^4 f\right). \tag{3.11}$$

Краевыми условиями задачи будут:

в случае I

$$f(0) = f'(0) = f(2) = f'(2) = 0, \tag{3.12}$$

в случае II

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(1) + \alpha f(1) = 0, \quad f(\infty) < \infty. \tag{3.13}$$

Ход решения нашей задачи об устойчивости можно представить далее следующим образом.

Уравнение (3.11) содержит кроме заданной функции $U(\bar{y})$ ещё три параметра c, α, R; два из них: α и R характеризуют длину волны возмущения и число Рейнольдса основного потока соответственно и суть величины действительные; третий — c — может быть, вообще говоря, комплексной величиной. Четыре линейно независимые решения уравнения (3.11) в случае I должны быть связаны однородными соотношениями (3.12); три конечных на бесконечности линейно независимых решения того же уравнения в случае II связаны тремя однородными условиями (3.13). Вековое уравнение, получающееся в том и другом случае, будет связывать три параметра α, R и c соотношением вида

$$F(c, \alpha, \mathsf{R}) = 0.$$

Решая это уравнение относительно c, мы получим [1])

$$c = c(\alpha, \mathsf{R}).$$

---

[1]) Возможность решения относительно c векового уравнения получается как следствие того факта, что функция F будет целой функцией от своих трёх переменных. В самом деле, будем в уравнении (3.11) считать $\bar{y}$ комплексной величиной, так же как и все три параметра α, R, c. Примем для $\bar{U}(\bar{y})$, которая определена лишь для действительных значений $\bar{y}$, для других значений — аналитическое продолжение. Тогда уравнение (3.11), для

Отделив действительную и мнимую часть $c(=c_r+ic_i)$, получим далее $c_r=c_r(\alpha, R)$ и $c_i=c_i(\alpha, R)$. Кривая

$$c_i(\alpha, R)=0 \tag{3.14}$$

будет отделять область устойчивости от области неустойчивости.

Задача определения характеристических чисел, связанная с решением уравнения (3.11), была предметом исследования ряда авторов. Одними из первых были Орр [1]) и Зоммерфельд [2]), которые исследовали устойчивость движения между двумя пластинками и не нашли потери устойчивости. К тому же выводу приходили и такие авторы как: Мизес, Хопф (Hopf), Гольдштейн (Goldstein), Пекерис (Pekeris) и многие другие. Если не считать теории Гейзенберга [3]), которая считалась неполной и неточной и не была поэтому общепризнана, все теоретические работы до сравнительно недавнего времени давали отсутствие возможности потери устойчивости движения между двумя пластинками. Первое строгое доказательство того, что движение между параллельными пластинками может оказаться неустойчивым при некоторых значениях R, было дано в работе Линя [4]). В этой же работе даётся попутно анализ ошибок, или неточностей, из-за которых ни один из предыдущих авторов не мог добиться верного результата.

Прандтль [5]) в 1921 г. и Титьенс [6]) в 1925 г. впервые рассмотрели вопрос об устойчивости пограничного слоя; при этом они предположили, что профиль скорости основного потока может быть составлен из нескольких, различным образом наклонённых прямолинейных кусков [7]). Авторы эти пришли к парадоксальному выводу: пограничный слой везде неустойчив. Позднее Толлмиен [8]) показал, что вывод получился благодаря предположению, что кривизна профиля скоростей основного потока всюду равна нулю. Принимая, что кривизна профиля скоростей хотя бы в отдельных частях этого профиля отлична от нуля,

---

которого все точки в любой конечной области регулярны и коэффициенты которого суть целые функции от параметров α, c и αR, будет, по известной теореме теории дифференциальных уравнений, иметь систему четырёх независимых решений, являющихся аналитическими функциями y и параметров c, α, αR и целыми функциями этих параметров.

[1]) Orr, Proc. Roy. Irish Acad., 27, 1906, 1907.

[2]) Sommerfeld, Proc. 4th. Int. Congress Math., Rome, 1908.

[3]) Heisenberg, Ann. d. Physik. 74 (1924).

[4]) Lin C., On the Stability of Two — Dimensional Parallel Flows. Quarterly Appl. Mathematics, т. III, № 2, № 3, № 4, 1945, 1946.

[5]) Prandtl L., Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz, ZaMM, 1921.

[6]) Tietjens O., Beitrag zur Entstehung der Turbulenz, ZaMM, 1925.

[7]) Предположение это было связано с желанием описать тот факт, что в местах, находящихся около «точки отрыва» ламинарного слоя, профиль скоростей имеет на некотором расстоянии от стенки точку перегиба.

[8]) Tollmien, Ueber die Entstehung der Turbulenz, Göttingen Nachrichten, 1929, стр. 24.

Толлмиен получил, что коль скоро числа Рейнольдса не превосходят некоторой величины, изучаемое движение устойчиво.

Толлмиен рассмотрел конкретно лишь профиля U, состоящие из кусков прямых и парабол. В более поздней работе [1]) Толлмиен вернулся к случаю произвольного профиля в пограничном слое.

Розенброк [2]) применил метод Толлмиена к исследованию движения в диффузоре, аппроксимируя профиль скоростей в виде полинома шестой степени.

В упомянутой работе Линя даётся также и решение задач об устойчивости в пограничном слое для произвольного распределения скоростей U. Мы расскажем в общих чертах о работе Линя, отправляясь от изложенной выше постановки задачи, параллельно проводя рассуждения для случая I и случая II.

Путь построения решения, принятого Линем, заключается в следующем. Уравнение (3.11) содержит три параметра: α, c, $1/\alpha\mathsf{R}$. Параметр $1/\alpha\mathsf{R}$ можно считать малым, ибо устойчивость теряется при больших числах Рейнольдса. Поэтому для целей подсчётов удобно искать четыре независимых решения нашего уравнения четвёртого порядка в виде рядов по малому параметру $1/\alpha\mathsf{R}$. Однако при построении этих рядов встретится принципиальное затруднение. Дело в том, что параметр $1/\alpha\mathsf{R}$ входит в наше уравнение при старшей производной. Если просто отбросить член с $1/\alpha\mathsf{R}$ в (3.11), то мы придём к уравнению второго порядка, имеющему особенность в той точке, где

$$\bar{U} = c. \tag{3.15}$$

Пусть это будет точка

$$\bar{y} = y_c.$$

Для точного уравнения четвёртого порядка $\bar{y} = y_c$ не будет особой точкой. При построении наших асимптотических рядов надо тщательно проследить за проявлением этой особенности, вводимой лишь математическим методом интегрирования. Это можно будет сделать, если мы получим возможность сравнения наших асимптотических разложений по $1/\alpha\mathsf{R}$, удобных для практических расчётов, с точными решениями уравнения чётвертого порядка (3.11).

Начнём с построения решения (3.11) в виде:

$$f(\bar{y}) = f^{(0)}(\bar{y}) + f^{(1)}(\bar{y})\frac{1}{\alpha\mathsf{R}} + f^{(2)}(\bar{y})\left(\frac{1}{\alpha\mathsf{R}}\right)^2 + \ldots \tag{3.16}$$

Подставляя это в (3.11) и сравнивая члены при одинаковых степенях $1/\alpha\mathsf{R}$, получим следующую систему дифференциальных

[1]) Tollmien W., Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen Göttingen Nachrichten, 1935.

[2]) Rosenbrook, Instabilität der Grenzschicht im schwach divergenten Kanal, ZS ang. Math. u. Mech., 17 (1937), вып. 1, стр. 8—24.

уравнений:

$$(\overline{U}-c)(f^{(0)''}-\alpha^2 f^{(0)})-\overline{U}''f^{(0)}=0, \tag{3.17}$$

$$(\overline{U}-c)(f^{(k)''}-\alpha^2 f^{(k)})-\overline{U}''f^{(k)}= \\ =-i\left[f^{(k-1)IV}-2\alpha^2 f^{(k-1)''}+\alpha^4 f^{(k-1)}\right]. \tag{3.18}$$

Уравнение (3.17) это просто уравнение, отвечающее колебаниям в идеальной жидкости. Его можно решить при помощи рядов по степеням α^2. При этом мы получим два независимых решения:

$$\left.\begin{aligned} f_1^{(0)}(\bar{y})&=(\overline{U}-c)[h_0(\bar{y})+\alpha^2 h_2(\bar{y})+\alpha^4 h_4(\bar{y})+\ldots],\\ f_2^{(0)}(\bar{y})&=(\overline{U}-c)[k_1(\bar{y})+\alpha^2 k_3(\bar{y})+a^4 k_5(\bar{y})+\ldots], \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

где

$$\left.\begin{aligned} h_0(\bar{y})&=1,\\ k_{2n+2}(\bar{y})&=\int_0^{\bar{y}}(\overline{U}-c)^2\left[\int_0^{\bar{y}}(\overline{U}-c)^2 h_{2n}(\bar{y})\,d\bar{y}\right]d\bar{y},\\ k_1(\bar{y})&=\int_0^{\bar{y}}\frac{d\bar{y}}{(\overline{U}-c)^2},\\ h_{2n+3}(\bar{y})&=\int_0^{\bar{y}}\frac{1}{(\overline{U}-c)^2}\left[\int_0^{\bar{y}}(\overline{U}-c^2)\,h_{2n+1}(\bar{y})\,d\bar{y}\right]d\bar{y}. \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

Определив два независимых решения для $f^{(0)}$, получим дальше любое $f^{(k)}$ при помощи квадратур.

При конкретных расчётах достаточно бывает ограничиться функциями $f^{(0)}$.

Уравнение (3.11) можно рассматривать в комплексной плоскости $\bar{y}$ (см. сноску на стр. 669) и считать, что $\alpha\mathsf{R}$, α — комплексные числа, а $\overline{U}(\bar{y})$ — аналитическое продолжение функции $\overline{U}$, определённой лишь для действительных $\bar{y}$. Тогда f будет целой функцией от $\alpha\mathsf{R}$ и $\alpha\mathsf{R}=\infty$ будет особой точкой (если f зависит от $\alpha\mathsf{R}$). Поэтому ряды (3.16) суть асимптотические ряды (или полиномы) по $1/\alpha\mathsf{R}$. Далее, решения (3.17) будут целыми функциями от α^2 и ряды (3.19) равномерно сходятся для любой конечной области комплексной плоскости α^2, для закреплённого $\bar{y}$, за исключением того случая, когда $\bar{y}=y_c$. В точке $\bar{y}=y_c$ уравнение (3.17) имеет логарифмическую особенность, и это затрудняет выбор пути интегрирования от 0 до $\bar{y}$ в (3.20) (при интегрировании приходится переходить через точку, где $\overline{U}=c$). Выбор этот

получается путём сравнения, с асимптотическими представлениями для больших $\alpha\mathsf{R}$ точных решений полного уравнения (3.11). К этому мы вернёмся ниже, а сейчас построим другую пару решений уравнения четвёртого порядка (3.11) непосредственно для больших $1/\alpha\mathsf{R}$.

На этот раз будем искать f в виде

$$f = e^{\int g\, d\bar{y}}. \tag{3.21}$$

Тогда для g мы получим следующее нелинейное уравнение:

$$(\bar{U} - c)(g^2 + g' - \alpha^2) - \bar{U}'' =$$

$$= -\frac{1}{\alpha\mathsf{R}}\left\{g^4 + 6g^2g' + 3g'^2 + 4gg'' + g''' - 2\alpha^2(g^2 + g') + \alpha^4\right\}. \tag{3.22}$$

Представим g в виде следующего ряда:

$$g(\bar{y}) = \sqrt{\alpha\mathsf{R}}\, g_0(\bar{y}) + g_1(\bar{y}) + \frac{1}{\sqrt{\alpha\mathsf{R}}} g_2(\bar{y}) + \frac{1}{\alpha\mathsf{R}} g_3(\bar{y}) + \ldots \tag{3.23}$$

Мы получим тогда уравнения:

$$\left.\begin{aligned} (\bar{U} - c)\, g_0^2 &= -ig_0^4; \\ (\bar{U} - c)(g_0' + 2g_0g_1) &= -i(4g_0^3g_1 + 6g_0^2g_0'); \\ (\bar{U} - c)(g_1' + g_1^2 + 2g_0g_2 - \alpha^2) - \bar{U}'' &= \\ = -i(4g_0^3g_2 + 6g_0^2g_1^2 + 6g_0^2g_1' + 12g_0g_1g_0' + 3g_0'^2 + 4g_0g_0'' - 2\alpha^2g_0^2). & \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Последовательно, без интеграций, мы можем определить отсюда все наши функции. Выпишем первые две:

$$g_0 = \pm\sqrt{i(\bar{U} - c)}, \quad g_1 = -\frac{5}{2}\frac{g_0'}{g_0}, \ldots \tag{3.25}$$

Два разных знака перед корнем отвечают двум независимым решениям. Для (3.17) точка $\bar{y} = y_c$ была логарифмической; теперь это — алгебраическая точка ветвления. Мы можем положить для конкретности $\arg i = \frac{\pi}{2}$ и считать для $\bar{U} > c$ $\arg(\bar{U} - c) > c$; будет ли затем $\arg(\bar{U} - c) = +\pi$ или $\arg(\bar{U} - c) = -\pi$ для отрицательных $\bar{U} - c$, мы сможем сказать лишь после рассмотрения полного решения (3.11), о котором мы уже упоминали выше.

Используя функции g, мы можем, таким образом, написать и вторую пару независимых решений уравнения (3.11); назовём эти решения f_3 и f_4. Если ограничиться лишь первыми двумя членами в разложе-

нии (3.23), можно написать:

$$\left.\begin{aligned} f_3 &= (\bar{U}-c)^{-\frac{5}{4}} e^{-\int_{y_c}^{\bar{y}} \sqrt{i\alpha R(\bar{U}-c)}\,d\bar{y}}, \\ f_4 &= (\bar{U}-c)^{-\frac{5}{4}} e^{+\int_{y_c}^{\bar{y}} \sqrt{i\alpha R(\bar{U}-c)}\,d\bar{y}} \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Как же построить теперь то полное решение (3.11), о котором мы уже несколько раз упоминали и которое мы должны знать, чтобы найти поведение функций f около точки $\bar{y}=y_c$ и решить вопрос о путях интегрирования в (3.20) и (3.26)?

Чтобы установить поведение (3.11) около точки $\bar{y}=y_c$, введём сперва новое независимое переменное η из соотношения

$$\bar{y}-y_c=\varepsilon\eta, \quad \text{где} \quad \varepsilon=(\alpha R)^{-\frac{1}{3}}. \tag{3.27}$$

Если обозначить

$$f(\bar{y})=\chi(\eta),$$

то уравнение (3.11) перейдёт в следующее:

$$(\bar{U}-c)(\chi''-\alpha^2\varepsilon^2\chi)-\varepsilon^2\bar{U}''\chi=-\frac{i}{\alpha R\varepsilon^2}(\chi^{IV}-2\alpha^2\varepsilon^2\chi''+\alpha^4\varepsilon^4\chi), \tag{3.28}$$

причём функции $\bar{U}-c$ и $\bar{U}''$, участвующие в качестве коэффициентов, будут представляться рядами:

$$\bar{U}-c=\bar{U}_c'\varepsilon\eta+\bar{U}_c''\frac{(\varepsilon\eta)^2}{2}+\ldots, \tag{3.29}$$

$$\bar{U}''=\bar{U}_c''+\bar{U}_c''\varepsilon\eta+\bar{U}_c^{IV}\frac{(\varepsilon\eta)^2}{2}+\ldots, \tag{3.30}$$

где $\bar{U}_c'=\left(\frac{d\bar{U}}{d\bar{y}}\right)_{\bar{y}=y_c}$ и т. п.

Теперь можно искать решение в виде ряда, расположенного по степеням ε:

$$f(\bar{y})=\chi(\eta)=\chi^{(0)}(\eta)+\varepsilon\chi^{(1)}(\eta)+\varepsilon^2\chi^{(2)}(\eta)+\ldots \tag{3.31}$$

Уравнения для $\chi^{(0)}$, $\chi^{(1)}$, ... будут:

$$i\chi^{(0)IV}+\bar{U}_c'\eta\chi^{(0)''}=0, \tag{3.32}$$

$$i\chi^{(n)IV}+\bar{U}_c'\eta\chi^{(n)''}=L_{n-1}(\eta), \quad n\geqslant 1, \tag{3.33}$$

где $L_{n-1}(\chi)$ — линейная комбинация из $\chi^{(0)}, \ldots, \chi^{(n-1)}$, $\bar{U}$ и их производных; в частности,

$$L_0 = \bar{U}_c''\left(\chi^{(0)} - \frac{1}{2}\eta^2\chi^{(0)\prime\prime}\right).$$

Уравнение (3.32) имеет следующие четыре независимых решения:

$$\chi_1^{(0)} = \eta, \quad \chi_2^{(0)} = 1, \tag{3.34}$$

$$\left.\begin{aligned}\chi_3^{(0)} &= \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} \sqrt{\eta}\, H^{(1)}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}(i\alpha_0\eta)^{\frac{3}{2}}\right) d\eta;\\ \chi_4^{(0)} &= \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} \sqrt{\eta}\, H^{(2)}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}(i\alpha_0\eta)^{\frac{3}{2}}\right) d\eta,\end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

где

$$\alpha_0 = \sqrt[3]{\bar{U}_c'} \tag{3.36}$$

а $H^{(1)}_{\frac{1}{3}}$ и $H^{(2)}_{\frac{1}{3}}$ — функции Бесселя порядка $1/3$.

Следующее приближение мы получим в виде

$$\chi_i^{(n)} = \frac{\pi}{6}\int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta \left\{\chi_4^{(0)\prime\prime}\int \chi_3^{(0)\prime\prime} L_{n-1}(\eta)\, d\eta - \chi_3^{(0)\prime\prime}\int \chi_4^{(0)\prime\prime} L_{n-1}(\eta)\, d\eta\right\}.$$

Сходимость рядов (3.31) будет обеспечена коль скоро будут сходиться ряды (3.29), (3.30). Заметим теперь, что аргумент функций Бесселя может быть записан, если вернуться к старому независимому переменному, по (3.27) и (3.36), в виде

$$\frac{2}{3}(i\alpha_0\eta)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(i)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\alpha R \bar{U}_c'(\bar{y} - y_c)^3},$$

так что при больших значениях αR аргумент этот будет по модулю велик. Поэтому, желая обследовать поведение функции χ при больших αR, мы можем использовать асимптотические разложения функций Бесселя.

Производя несложные выкладки, Линь показывает, что первые члены этих разложений для χ_1, χ_2, χ_3, χ_4 как раз совпадают с теми функциями f_1, f_2, f_3, f_4 соответственно, которые даны были в равенствах (3.19), (3.26), и попутно получает возможность уточнить путь интегрирования в квадратурах, участвующих в этих формулах. Отсылая за подробностями к цитированной статье Линя, укажем лишь, что путь интегрирования должен, по Линю, удовлетворять условию:

$$-\frac{7\pi}{6} < \arg(\alpha_0\eta) < \frac{7\pi}{6}. \tag{3.37}$$

Обратимся теперь к собственно краевой задаче. Случай I движения между двумя параллельными пластинками удобно подразделить на два подслучая. Дело в том, что возмущение всегда можно разбить, вследствие линейности, на две независимые части — симметричную по отношению к линии $\bar{y}=1$ (середина расстояния между пластинками) и антисимметричную.

В случае I удобнее записать краевые условия не для $\bar{y}=0$ и $\bar{y}=2$, а для $\bar{y}=0$ и $\bar{y}=1$. При этом в случае, назовём его I′, когда $f(\bar{y})$ симметрично, мы должны написать:

$$f(0)=f'(0)\equiv f'(1)=f'''(1)=0.$$

В случае I″, когда f антисимметрично, — мы должны записать:

$$f(0)=f'(0)=f(1)=f''(1)=0.$$

Наконец, для случая II движения в пограничном слое мы, как и выше, напишем:

$$f(0)=f'(0)=0, \qquad f'(\bar{y})+\alpha f(\bar{y})=0 \quad \text{для} \quad \bar{y}\geqslant 1; \quad f(\infty)<\infty.$$

В качестве четырёх линейно независимых решений мы примем наши функции f_1, f_2, f_3, f_4 определённые выше.

Тогда вековое уравнение для случая I′ будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) & f_4(0) \\ f_1'(0) & f_2'(0) & f_3'(0) & f_4'(0) \\ f_1'(1) & f_2'(1) & f_3'(1) & f_4'(1) \\ f_1'''(1) & f_2'''(1) & f_3'''(1) & f_4'''(1) \end{vmatrix}=0. \tag{3.38}$$

Для случая I″ мы должны будем написать:

$$\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) & f_4(0) \\ f_1'(0) & f_2'(0) & f_3'(0) & f_4'(0) \\ f_1(1) & f_2(1) & f_3(1) & f_4(1) \\ f_1''(1) & f_2''(1) & f_3''(1) & f_4''(1) \end{vmatrix}=0. \tag{3.39}$$

Наконец, в случае II мы должны отбросить f_4 как решение, не ограниченное на бесконечности и написать:

$$\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) \\ f_1'(0) & f_2'(0) & f_3'(0) \\ f_1'(1)+\alpha f_1(1) & f_2'(1)+\alpha f_2(1) & 0 \end{vmatrix}=0. \tag{3.40}$$

Соотношения (3.38), (3.39), (3.40) значительно упрощаются для больших значений $\alpha\mathsf{R}$. Используя выражения (3.26) для f_3 и f_4, мы можем записать: $f_3 = A(y)e^{-V}$ и $f_4 = B(y)e^{V}$, где A и B — величины порядка единицы, а

$$V = \int_0^y \sqrt{i\alpha\mathsf{R}(\bar{U}-c)}\,d\bar{y}.$$

В определителе (3.38) удобно поделить все члены третьего столбца на $f_3(0)$, а все члены четвёртого столбца на $f_4(0)$. Мы можем записать затем:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{f_3'(0)}{f_3(0)} = -\sqrt{-i\alpha\mathsf{R}c} + \frac{A'(0)}{A(0)};\\
&\frac{f_3'(1)}{f_3(0)} = \left[\frac{A'(1)}{A(0)} - \sqrt{i\alpha\mathsf{R}(1-c)}\,\frac{A(1)}{A(0)}\right]e^{-P},\\
&\frac{f_3'''(1)}{f_3(0)} = \left\{[i\alpha\mathsf{R}(1-c)]^{\frac{3}{2}}\,\frac{A(1)}{A(0)} + 0(\alpha\mathsf{R})\right\}e^{-P},\\
&\frac{f_4'(0)}{f_4(0)} = \sqrt{-i\alpha\mathsf{R}c} + \frac{B'(0)}{B(0)};\\
&\frac{f_4'(1)}{f_4(0)} = \left\{\sqrt{i\alpha\mathsf{R}(1-c)}\,\frac{B(1)}{B(0)} + \frac{B'(1)}{B(0)}\right\}e^{P},\\
&\frac{f_4'''(1)}{f_4(0)} = \left\{[i\alpha\mathsf{R}(1-c)]^{\frac{3}{2}}\,\frac{B(1)}{B(0)} + 0(\alpha\mathsf{R})\right\}e^{P},
\end{aligned}\right\} \qquad (3.41)$$

где

$$P = \int_c^1 \sqrt{i\alpha\mathsf{R}(\bar{U}-c)}\,d\bar{y}.$$

Пренебрегая теперь в определителе (3.38) членами порядка e^{-P} или $1/\alpha\mathsf{R}$ по сравнению с единицей, приведём уравнение (3.38) к виду:

$$\frac{F_2(\alpha, c)}{F_4(\alpha, c)} = \frac{f_3(0)}{f_3'(0)}, \qquad (3.42)$$

где

$$F_2(\alpha, c) = \begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) \\ f_1'(1) & f_2'(1) \end{vmatrix}; \qquad F_4(\alpha, c) = \begin{vmatrix} f_1'(0) & f_2'(0) \\ f_1'(1) & f_2'(1) \end{vmatrix}, \qquad (3.43)$$

причём F_2 и F_4 не зависят от R, ибо мы принимаем за f_1 и f_2 их представления с помощью (3.19), (3.20) ($f_1^{(0)}$ и $f_2^{(0)}$).

Аналогичным образом, преобразуя определитель (3.39) (для чего надо будет сперва записать ещё $\frac{f_3(1)}{f_3(0)}$, $\frac{f_4(1)}{f_4(0)}$, $\frac{f_3''(1)}{f_3(0)}$, $\frac{f_4''(1)}{f_4(0)}$), мы придём к равенству:

$$\frac{F_1(\alpha, c)}{F_4(\alpha, c)} = \frac{f_3(0)}{f_3'(0)}, \tag{3.44}$$

где

$$F_1(\alpha, c) = \begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) \\ f_1(1) & f_2(1) \end{vmatrix}, \tag{3.45}$$

а F_4 имеет прежнее значение.

Наконец, обращаясь к случаю II, мы должны преобразовать (3.40). Мы получим после простых выкладок:

$$\frac{F_2 + \alpha F_1}{F_4 + \alpha F_3} = \frac{f_3(0)}{f_3'(0)}, \tag{3.46}$$

где F_1, F_2, F_4 имеют значения, приведённые выше, а

$$F_3(\alpha, c) = \begin{vmatrix} f_1'(0) & f_2'(0) \\ f_1(1) & f_2(1) \end{vmatrix}. \tag{3.47}$$

Правые части равенств (3.42), (3.44), (3.46) одинаковы и зависят от α, R и c. Левые части — все различны, но зависят лишь от α и c, но не от R (по самому смыслу построения функций f_1, f_2, участвующих в F_1, F_2, F_3, F_4).

Преобразуем сперва левые части наших равенств. Вследствие (3.19), (3.20):

$$\left.\begin{aligned} f_1(0) &= -c, \quad f_2(0) = 0, \\ f_1'(0) &= \bar{U}_0', \quad f_2'(0) = -\frac{1}{c}, \end{aligned}\right\} \tag{3.48}$$

где $\bar{U}_0' = \left(\frac{d\bar{U}}{d\bar{y}}\right)_{\bar{y}=0}$. Поэтому мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} F_1(\alpha, c) &= -cf_2(1); \\ F_2(\alpha, c) &= -cf_2'(1). \\ F_3(\alpha, c) &= \bar{U}_0' f_2(1) + \frac{1}{c} f_1(1); \\ F_4(\alpha, c) &= \bar{U}_0 f_2(1) + \frac{f_1'(1)}{c}. \end{aligned}\right\} \tag{3.49}$$

Величины $f_1(1)$, $f_2(1)$, $f_1'(1)$, $f_2'(1)$ должны быть вычислены с помощью интегралов (3.20). Именно:

$$f_1(1)=(1-c)\{1+\alpha^2 h_2(1)+\alpha^4 h_4(1)+\ldots\},$$
$$f_2(1)=(1-c)\{k_1(1)+\alpha^2 k_3(1)+\ldots\},$$
$$f_1'(1)=\frac{1}{1-c}\left\{\alpha^2\int_0^1(\bar U-c)^2\,d\bar y+\alpha^4\int_0^1(\bar U-c)^2 h_2(\bar y)\,d\bar y+\ldots\right\}+$$
$$+\frac{\bar U'(1)}{1-c}f_1(1),$$
$$f_2'(1)=\frac{1}{1-c}\left\{1+\left[\alpha^2\int_0^1(\bar U-c)k_1(\bar y)\,d\bar y+\ldots\right]\right\}+\frac{\bar U'(1)}{1-c}f_2(1).$$

Дальнейшие преобразования удобно делать для тех или иных конкретных видов $\bar U(y)$, а не в общем виде. Правая часть может быть преобразована к удобной форме для всех случаев сразу. Мы могли бы грубо представить, по (3.41), выражение $f_3(0)/f_3'(0)$ для больших αR в виде

$$\frac{f_3(0)}{f_3'(0)}\approx-\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\alpha R c}}.$$

Однако величина c оказывается иногда малой, и тогда даже при больших αR, пользоваться этой формулой нельзя. Следует обратиться непосредственно к точным решениям (3.35). Мы получим теперь:

$$\frac{f_3(0)}{f_3'(0)}=\frac{\int_\infty^{-\frac{y_c}{\varepsilon}}d\eta\int_\infty^{\eta}\sqrt{\eta}H^{(1)}_{\frac13}\left(\frac23(i\alpha_0\eta)^{\frac32}\right)d\eta}{\int_\infty^{-\frac{y_c}{\varepsilon}}\sqrt{\eta}H^{(1)}_{\frac13}\left(\frac23(i\alpha_0\eta)^{\frac32}\right)d\eta}\cdot\varepsilon$$

или, если ввести вместо η аргумент ζ по формуле

$$\zeta=\alpha_0\eta,$$

будем иметь:

$$-\frac{1}{y_c}\frac{f_3(0)}{f_3'(0)}=\frac{\int_{+\infty}^{-z}d\zeta\int_{+\infty}^{\zeta}\zeta^{\frac12}H^{(1)}_{\frac13}\left(\frac23(i\zeta)^{\frac32}\right)d\zeta}{-z\int_{+\infty}^{-z}\zeta^{\frac12}H^{(1)}_{\frac13}\left(\frac23(i\zeta)^{\frac32}\right)d\zeta}=$$
$$=F(z)=F_r(z)+iF_i(z),\qquad(3.50)$$

где

$$z = y_c \frac{a_0}{\varepsilon} = y_c \sqrt[3]{\overline{U}'_c \alpha \mathrm{R}}. \tag{3.51}$$

В приводимой здесь таблице XII даны значения F_r и F_i в функциях от z по Линю.

Таблица XII

z	F_r	F_i	z	F_r	F_i
1,0	0,89161	—0,35025	3,0	0,46456	0,17391
1,2	0,78969	—0,27310	3,2	0,41947	0,22520
1,4	0,71970	—0,21213	3,4	0,36110	0,27193
1,6	0,66931	—0,16009	3,6	0,28802	0,30705
1,8	0,63143	—0,11274	3,8	0,20352	0,32130
2,0	0,60144	—0,06741	4,0	0,11800	0,30721
2,2	0,57599	—0,02226	4,2	0,04698	0,26559
2,4	0,55230	—0,02395	4,4	0,00240	0,20811
2,6	0,52773	—0,07203	4,6	0,02160	0,14475
2,8	0,49952	0,12220	4,8	0,01477	0,09875

Итак, мы приходим к решению уравнений типа

$$E(c, \alpha) = F_r + iF_i, \tag{3.52}$$

причём для случая I′:

$$E(c, \alpha) = \frac{c}{y_c} \frac{f'_2(1)}{\overline{U}'_0 f'_2(1) + \frac{1}{c} f'_1(1)}, \tag{3.53}$$

для случая I″:

$$E(c, \alpha) = \frac{c}{y_c} \frac{f_2(1)}{\overline{U}'_0 f'_2(1) + \frac{1}{c} f'_1(1)}, \tag{3.54}$$

для случая II:

$$E(c, \alpha) = \frac{c}{y_c} \frac{f'_2(1) + \alpha f_2(1)}{\overline{U}'_0 \left[f'_2(1) + \alpha f_2(1)\right] + \frac{1}{c}\left[f'_1(1) + \alpha f_1(1)\right]}. \tag{3.55}$$

Уравнение типа (3.55) было получено ещё Толлмиеном в упомянутой выше работе об устойчивости пограничного слоя. Если представить левую часть этого уравнения в виде [1]):

$$E(c, \alpha) = E_r(c, \alpha) + iE_i(c, \alpha)$$

(при этом мы берём $c_i = 0$, т. е. занимаемся лишь нейтральной линией), то задача определения нейтральной линии сводится к исклю-

[1]) Левая часть будет комплексной благодаря интегрированиям, имеющимся в формулах (3.20).

чению c из двух уравнений

$$E_r(c,\ \alpha) = F_r(z), \qquad E_i(c,\ \alpha) = F_i(z).$$

В плоскости (α, R) мы получим тогда линию, отделяющую область устойчивости от области неустойчивости. Чтобы исключить c, Толлмиен изображает в некоторой плоскости кривую, абсциссы и ординаты которой суть $F_r(z)$ и $F_i(z)$ соответственно (z рассматривается при этом, как действительный параметр); затем в той же плоскости изображается семейство кривых, получающихся при разных c, если $E_r(c, \alpha)$ и $E_i(c, \alpha)$ изображать как абсциссы и ординаты (переменный параметр на каждой кривой α). Точки пересечения этих кривых дадут «совместные» значения z и α, а так как c при этом известно, то по (3.51) может быть найдено R.

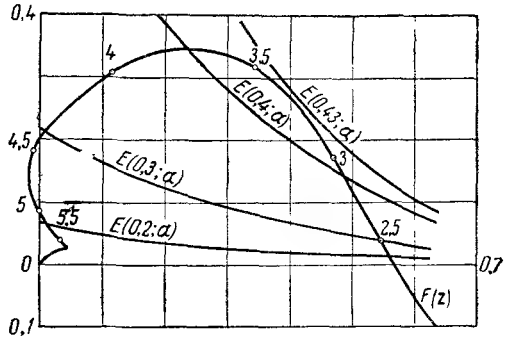

Рис. 193.

Толлмиен рассматривает профиль $U(y)$, состоящий из [1])

прямой	$U = 1{,}68\eta$	от $\eta = 0$	до $\eta = 0{,}175$,
параболы	$U = 1 - (1{,}015 - \eta)^2$	от $\eta = 0{,}175$	до $\eta = 1{,}015$,
прямой	$U = 1$	при $\eta > 1{,}015$	$\eta = y/\delta$.

На рис. 193 изображены кривые $E(c, \alpha)$ для этого случая. Там же дана кривая $F(z)$ [2]) (по Толлмиену).

На рис. 194 изображена линия, отделяющая область неустойчивости (внутри) от области устойчивости; здесь по оси абсцисс отложены $U_m\delta^*/\nu$, а по оси ординат $a\delta^*$, причём $\delta^* = 0{,}341\delta$, где δ — толщина пограничного слоя, введённого

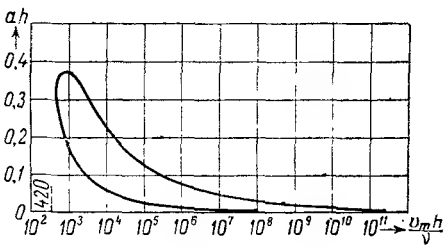

Рис. 194.

[1]) Этот профиль подправляется около стенки, а также при рассмотрении критического места $\eta = \eta_k$, при этом принимаются в расчёт формулы Блазиуса.

[2]) Данные рисунка и таблицы для F несколько расходятся. Таблицы — точнее.

выше. Кривая зависимости между α и R показывает, что при $R < 420$ возмущение будет затухать.

Линь вместо громоздкого графического способа решения развивает метод, годящийся для любого профиля скоростей и основанный на представлении левых частей (3.52) при помощи рядов (3.19), (3.20). Попутно Линю удаётся дать ряд общих теорем, касающихся поведения нейтральной кривой при очень больших значениях R. Так, например, Линь показывает, что нейтральная кривая $c_i(\alpha, R) = 0$ имеет две асимптоты при $R \to \infty$, причём эти две асимптоты сливаются в одну ($\alpha = 0$), когда основной профиль скоростей не имеет точки перегиба, но эти две асимптоты различны (одна из них отвечает $\alpha = 0$, другая — $\alpha = \alpha_s \neq 0$), когда профиль основного потока имеет точку перегиба.

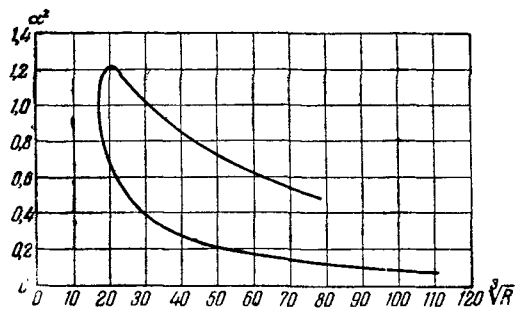

Рис. 195.

Линь даёт также приближённые правила подсчёта минимальных значений критического числа R. Отсылая за подробностями к статье Линя, дадим без вывода эти последние правила.

Прежде всего надо найти значение y_c из уравнения

$$-\pi\overline{U}'(0)\left\{3 - 2\frac{\overline{U}'(0)\,y_c}{\overline{U}(y_c)}\right\}\frac{\overline{U}(y_c)\,\overline{U}''(y_c)}{\overline{U}'(y_3)^3} = 0{,}58$$

(оно решается графически). Надо затем вспомнить, что по определению y_c и c:

$$c = \overline{U}(y_c)$$

и найти по y_c соответствующие значения c. Минимальное критическое число R_{min} найдётся по Линю в виде:

для случая I

$$R_{min} \approx \frac{30\overline{U}'(0)}{c^3}\sqrt{\frac{\overline{U}'(0)\int_0^1 \overline{U}^2(\overline{y})\,d\overline{y}}{c}};$$

для случая II

$$R_{min} \approx \frac{25\overline{U}'(0)}{c^4}.$$

На рис. 195, заимствованном из статьи Линя, дана кривая нейтральной устойчивости для случая движения между двумя неподвиж-

ными плоскостями. Здесь

$$\overline{U} = 2\overline{y} - \overline{y}^2, \quad R_{min} \approx 5314.$$

Две ветви этой кривой при больших R даются уравнениями

$$R^{\frac{1}{3}} = 8{,}44\,(\alpha^2)^{-\frac{11}{6}} \quad \text{и} \quad R^{\frac{1}{3}} = 5{,}96\,(\alpha^2)^{-\frac{7}{6}}.$$

На рис. 196, также взятом у Линя, мы даём кривую нейтральной устойчивости для случая Блазиуса (обтекание пластинки). Линь выбирает профиль $\overline{U}$ в виде:

$$\overline{U} = 2\overline{y} - 3\overline{y}^4,$$

а толщину пограничного слоя определяет по формуле [1])

$$\delta = 6\sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

Здесь Линь получает $R_{min} = 420$ и асимптотические ветви кривой в виде:

$$R = 2{,}2 \cdot 10^{-5}\alpha^{-10}, \quad R = 0{,}0622\alpha^{-4}.$$

Путём очень тонких измерений удалось получить количественное сравнение теории с экспериментом. При помощи специальных

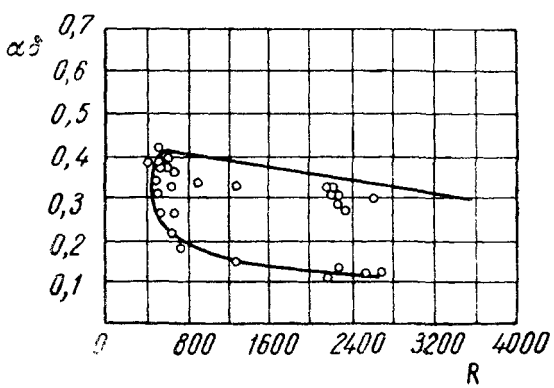

Рис. 196.

термопар Шубауэр и Скрэмстэд [2]) измерили пульсации скоростей в самом пограничном слое. На рис. 196 наряду с теоретической кривой

[1]) Ср. стр. 574, где принято $\delta = 5{,}2\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$.

[2]) Schubauer and Skramstad, Laminar Boundary Layer Ostillations and Stability of Laminar Flow, J. Aeronautical Sc., 14, 1947, № 2.

Линия нанесены (точками) некоторые значения R и α для «нейтральных» точек, полученные экспериментально. Совпадение следует признать хорошим.

Потерю устойчивости пограничного слоя в неоднородной (хотя несжимаемой) жидкости исследовал Шлихтинг.

Написав уравнение движения в виде

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta v + \rho F,$$

уравнение неразрывности и условие несжимаемости в виде

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho = 0.$$

Шлихтинг обращается к плоской задаче и предполагает что на основное движение

$$v_x = U_0(y), \quad v_y = 0, \quad p = p_0(y), \quad \rho = \rho_0(y).$$
$$(F_x = 0, \quad F_y = -g)$$

накладываются малые колебания типа $v_{x_1}(y)\, e^{i(ax-bt)}$, $v_{y_1}(y)\, e^{i(ax-bt)}, \ldots$ $\rho_1(y)\, e^{i(ax-bt)}$. В качестве $\rho_0(y)$ Шлихтинг берёт затем функцию $\rho_0(y) = \rho_{01} e^{-\gamma y}$, где $0 < \gamma = \text{const}$, и принимает $\nu = \frac{\mu}{\rho_0} = \text{const}$.

Если ввести затем, как это мы уже сделали при рассмотрении пограничного слоя в несжимаемой жидкости, безразмерные величины

$$U = \frac{U_0}{U_m}, \quad \alpha = a\delta, \quad \beta = b\frac{\delta}{U}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}, \quad c = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \mathsf{R} = \frac{U_m \delta}{\nu},$$

а также

$$K = \frac{\delta^2 \gamma g}{U_m^2}; \quad L = \delta\gamma,$$

то для определения функции f (множитель при $e^{i(ax-bt)}$ в уравнении функции тока $\psi' = f e^{i(ax-bt)}$ накладываемых колебаний) получится следующее уравнение, являющееся непосредственным обобщением уравнения (3.11):

$$(U-c)^2(f''-\alpha^2 f) - (U-c)U''f + Kf - L(U-c)[(U-c)f' - U'f] =$$
$$= -\frac{i(U-c)}{\alpha \mathsf{R}}[f^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2 f'' + \alpha^4 f - L(f''' - \alpha^2 f')].$$

Шлихтинг даёт приближённый анализ этого уравнения, отыскивая решение его в виде

$$f = f_0 + Kf^{(K)} + Lf^{(L)} + \ldots$$

и ограничиваясь первыми степенями K и L (K и L значительно меньше единицы); здесь f_0 представляет решение Толлмиена. Анализ устойчивости проводится совершенно аналогично тому, как это делается

в случае несжимаемой жидкости (отыскание решения при $\eta \ll 1$, исследование особенности $U = c$ и т. д.); однако теперь надо отыскать целых два семейства кривых, отделяющих области устойчивости и неустойчивости (дающих связь между α и R) в зависимости от значений, которые мы дадим двум параметрам K и L. Заметим, что в то время как кривые, изображённые на рис. 196, уходят на бесконечность, здесь могут оказаться случаи, когда область неустойчивости будет ограничена замкнутой, находящейся на конечном расстоянии кривой. За подробностями отсылаем к цитированной работе Шлихтинга.

В качестве примера на определение неустойчивости сжимаемой жидкости покажем как получается потеря устойчивости в находящейся в равновесии атмосфере. Пусть воздух, рассматриваемый как идеальная жидкость, находится в равновесии под действием силы тяжести и при наличии линейного падения температуры с высотой

$$T = T_0 - \gamma z \qquad (T_0 = \text{const.}, \quad 0 < \gamma = \text{const.})$$

(начало координат — на поверхности земли, ось z смотрит вертикально вверх). Пусть в этой среде поднимается частичка воздуха (адиабатически) и притом так, что давление её ($\bar{p}$) в каждый момент поднятия равно давлению p окружающей среды. Последнее зависит от закона падения температуры с высотой, ибо, вследствие равновесия, мы имеем

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho = -\frac{gp}{R\bar{T}},$$

так что

$$p = A\frac{(T_0 - \gamma z)^{\frac{g}{R\gamma}}}{T_0},$$

где $A = \text{const}$.

Обозначим температуру нашей частицы через $\bar{T}$. Тогда, на основании адиабатичности её движения,

$$\bar{T} = \bar{T}_0\left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}},$$

где $\bar{T}_0$ и $\bar{p}_0$ — исходные температура и давление частицы; таким образом, как только частица достигнет высоты z, она получит температуру

$$\bar{T} = \bar{T}_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Изменение температуры при подъёме будет поэтому таково, что

$$d\ln\bar{T} = \frac{\varkappa-1}{\varkappa}d\ln p = -\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{g}{R}\frac{dz}{\bar{T}} = -\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{g}{R\gamma}\frac{d\bar{T}}{\bar{T}}.$$

Величина $\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{g}{R}$ называется в метеорологии адиабатическим градиентом и обозначается буквой γ_a:

$$\gamma_a = \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{g}{R}.$$

Таким образом мы получим:

$$\frac{\bar{T}}{T_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma_a}{\gamma}}.$$

Установив это, предположим теперь, что частица имела в исходном положении ту же температуру $\bar{T}_0 = T_0$, что и соседние, но получила вертикальный сдвиг. Частица начнёт двигаться, причём её уравнения движения будут иметь вид (лагранжевы координаты):

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{p}}{dz}.$$

Но, по предположению, $\frac{d\bar{p}}{dz} = \frac{dp}{dz} = -g\rho$; поэтому

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + \frac{\rho}{\bar{\rho}}g = g\frac{\rho-\bar{\rho}}{\bar{\rho}} = g\frac{T-\bar{T}}{T},$$

или, вследствие установленного для $\bar{T}$ выражения ($T_0 = T_0$):

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g\left\{\left[\frac{T(z)}{T_0}\right]^{\frac{\gamma_a}{\gamma}-1} - 1\right\}.$$

Предположим сперва, что $\gamma < \gamma_a$. Пусть тогда масса получает сдвиг вверх; при этом она попадает в область таких значений z, для которых $T(z) < T_0$, и так как будет $\gamma_a/\gamma - 1 > 0$, то $d^2z/dt^2 < 0$, и масса будет стремиться опуститься. Если же масса получит сдвиг вниз ($T > T_0$), то $d^2z/dt^2 > 0$, и масса будет стремиться подняться. Воздух будет находиться в устойчивом равновесии. Напротив, если будет $\gamma > \gamma_a$ («сверхадиабатический градиент»), то при подъёме ($T < T_0$) будет $d^2z/dt^2 > 0$, при опускании ($T > T_0$) $d^2z/dt^2 < 0$, т. е. частица будет продолжать двигаться вверх или вниз. Равновесие неустойчиво и может начать развиваться турбулентность [1]).

Б. РАЗВИТАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

§ 4. Сглаживание. Три основных признака характеризуют так называемое турбулентное движение: во-первых, большая пестрота и быстрая изменяемость поля скоростей, во-вторых, неупорядоченность

[1]) Более точные исследования можно найти в книге: Кочин Н. Е. и Извеков Б. И., Динамическая метеорология, ч. 1, 1935.

в смене скоростей и, в-третьих, сопровождающее эту смену перемешивание жидких частичек.

Структура развитого турбулентного потока весьма сложна, и траектории его жидких частичек чрезвычайно запутаны; если движение частиц турбулентного потока и удовлетворяет уравнению Навье — Стокса или Эйлера, то для описания этих движений потребовались бы, очевидно, интегралы уравнений, настолько сложные, что отыскание их было бы по безнадёжности равносильно отысканию траекторий каждой отдельной молекулы, движущейся среди других молекул [1]).

Сказанное здесь заставляет, на первых порах, отказаться от возможности получить точную математическую картину того, что происходит в каждый момент времени и в каждой точке пространства в турбулентном движении. Вместо этого приходится обратиться к суммарно статистическому описанию явления. Нужно построить сглаженную картину того, что происходит в турбулентном процессе, — построить уравнения для сглаженного, осреднённого поля скоростей, для средних давлений, для средних траекторий.

Чтобы «сгладить» какую-либо функцию $f(x)$ одного аргумента [2]), выбирают обычно сглаживающую функцию $\omega(\xi)$, которая удовлетворяла бы условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\xi)\, d\xi = 1.$$

Сглаженная функция $\bar{f}(x)$ получается затем по формуле

$$\bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \omega(x - \xi)\, d\xi,$$

---

[1]) Здесь может возникнуть сомнение: можно ли вообще представлять скорость в турбулентном движении как некоторую непрерывную функцию координат и времени?

«Обладает ли ветер скоростью?» задаёт вопрос один из создателей теории турбулентности Ричардсон (Richardson). Можно ли представлять скорость частицы турбулентного движения как предел отношения элемента Δx траектории частицы к элементу времени Δt? Может быть, стилизовать траекторию в турбулентном движении мы должны будем, беря в качестве закона движения непрерывную функцию, ни в одной точке не имеющую производной по времени, вроде известной функции Вейерштрасса:

$$x = kt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(5^n \pi t).$$

[2]) Не представляет никакого труда обобщить операцию сглаживания на случай функций любого числа аргументов.

или, что то же,

$$\overline{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)\,\omega(\xi)\,d\xi. \tag{4.1}$$

Обычно в качестве $\omega(\xi)$ берут чётную, неотрицательную функцию, не возрастающую с ростом модуля аргумента. Заметим, что операция сглаживания линейна по отношению к сглаживаемым функциям, так что результат сглаживания суммы двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равен сумме результатов сглаживания этих функций:

$$\overline{f_1(x)+f_2(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x-\xi)+f_2(x-\xi)]\,\omega(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-\xi)\,\omega(\xi)\,d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-\xi)\,\omega(\xi)\,d\xi = \overline{f}_1(x)+\overline{f}_2(x).$$

При повторном сглаживании некоторой функции f при помощи какой-либо другой сглаживающей функции $\omega_1(\xi)$ получим, очевидно.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u-\xi)\,\omega(\xi)\,d\xi\right]\omega_1(u)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\eta)\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(\eta-\xi)\,\omega_1(\xi)\,d\xi\,d\eta,$$

что равносильно одному сглаживанию со сглаживающей функцией $\omega_2(\eta)$:

$$\omega_2(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\omega(\eta-\xi)\,\omega_1(\xi)\,d\xi. \tag{4.2}$$

При этом

$$\omega_2(\eta) \neq \omega(\eta) \quad \text{и} \quad \neq \omega_1(\eta).$$

Одним из наиболее распространённых видов сглаживания является «осреднение» в некотором интервале l. Здесь в качестве $\omega(\xi)$ принимается:

$$\left.\begin{aligned} \omega(\xi) &= \frac{1}{l} \quad \text{при} \quad -\frac{l}{2} < \xi < \frac{l}{2}, \\ \omega(\xi) &= 0 \quad \text{»} \quad\quad\quad |\xi| \geqslant \frac{l}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

При этом

$$\bar{f}(x)=\frac{1}{l}\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} f(x-\xi)\,d\xi=\frac{1}{l}\int\limits_{x-\frac{l}{2}}^{x+\frac{l}{2}} f(\xi)\,d\xi \tag{4.4}$$

(среднее значение функции f в интервале l)[1]).

Прежде чем обратиться к уравнениям гидромеханики, обозначим разность $f-\bar{f}$ (f—какой-либо гидродинамический элемент) через f', так что

$$f=\bar{f}+f',$$

и предположим, что сглаживаемые функции и сглаживание таковы, что выполняются равенства:

1) $\overline{\frac{\partial f}{\partial t}}=\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}$, $\overline{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$, $\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}$, $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$,

2) $\overline{f_1+f_2}=\bar{f}_1+\bar{f}_2$,

3) $\bar{\bar{f}}_1=\bar{f}_1$, $\overline{f_1 f_2'}=0$, $\overline{f_1\bar{f}_2}=\bar{f}_1\bar{f}_2$.

Условия 1 и 2 можно считать выполняющимися вполне точно. Условия 3 будут, вообще говоря, иметь место лишь приближённо. Чтобы установить характер этих последних условий, заметим, что по самому смыслу описания турбулентных процессов функция f должна быть представлена в виде

$$f(x)=F(x)+\varphi(x),$$

---

[1]) Повторное «осреднение» приводит по (4.2), как нетрудно убедиться, к сглаживанию с функцией ω_2:

$$\omega_2(\xi)=\frac{1}{l^2}(l-|\xi|),\quad \text{когда}\quad |\xi|<l,\quad \omega_2(\xi)=0,\quad \text{когда}\quad |\xi|\geqslant l.$$

Как правило, повторное осреднение не будет простым осреднением. Нетрудно убедиться, что, повторяя простое осреднение, в интервале l n раз, получим составную операцию сглаживания, функция $\omega_n(\xi)$ которой будет асимптотически подходить к закону

$$\omega(\xi)\sim\frac{1}{l}\sqrt{\frac{6}{\pi n}}\,e^{-\frac{6\xi^2}{nl^2}}.$$

Тип сглаживающей функции

$$\omega(\xi)=\frac{1}{k\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\xi^2}{2k^2}} \tag{a}$$

встретится нам в теории перемешивания. Сглаживание с этой функцией называют иногда сглаживанием по Гауссу [$\omega(\xi)$ имеет вид гауссовой кривой «ошибок»].

где $F(x)$ — слабо меняющаяся функция своего аргумента, а $\varphi(x)$, напротив, — функция, представляющая очень быструю изменяемость и неупорядоченность гидродинамического элемента f в турбулентном процессе; иначе говоря, φ изображает пульсацию нашего элемента около его значения F и очень часто переходит через нуль. Тогда

$$\bar{f} = \bar{F} + \bar{\varphi}.$$

Пусть для конкретности мы имеем дело с простым осредненнем; так как $F(x)$ слабо меняется, то, беря интервал осреднения l не слишком большим, можем приближённо написать:

$$\bar{F} = \frac{1}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} F(x-\xi)\,d\xi \approx \frac{1}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} F(x)\,d\xi = F(x); \tag{4.5}$$

если всё же l будет настолько велико, что внутри интервала l функция φ много раз будет обращаться в нуль, то приближённо будет:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{l}\int_{x-\frac{l}{2}}^{x+\frac{l}{2}} \varphi(\xi)\,d\xi \approx 0.$$

Таким образом приближённо получим

$$\bar{f} \approx F; \tag{4.6}$$

но тогда, осредняя ещё раз, получим:

$$\bar{\bar{f}} \approx \bar{F},$$

или, на основании (4.5)

$$\bar{\bar{f}} \approx F,$$

т. е. по (4.6)

$$\bar{\bar{f}} \approx \bar{f},$$

и мы получим первое из условий 3. Из этого условия, в частности, следует, что

$$\bar{f'} \approx 0,$$

ибо

$$f' = f - \bar{f} \quad \text{и} \quad \bar{f'} = \overline{f - \bar{f}} = \bar{f} - \bar{\bar{f}} \approx 0.$$

Также можно разъяснить требование $\overline{f_1 f_2'} = 0$. В самом деле, $f_2' = f_2 - \bar{f}_2$, т. е. f_2' имеет характер φ, а $\bar{f}_1$ имеет характер F, но

функция вида $F.\ \varphi$ будет в интервале очень часто переходить через нуль и $\overline{F\varphi} \approx 0$. Аналогичным образом установим, что $\overline{\bar{f}_1 \bar{f}_2} \approx \bar{f}_1 \bar{f}_2$ [1]).

В заключение этого раздела заметим, что если под f разумеется случайная функция в том смысле, как это понимается в теории вероятностей, и если под знаком $\bar{f}$ разумеется математическое ожидание, то наши «постулаты» выполнятся совершенно строго сами собой.

§ 5. Основные уравнения Рейнольдса. Обращаясь к уравнениям гидродинамики, рассмотрим сперва случай несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const.}$). Напишем уравнение неразрывности и уравнения Навье — Стокса и произведём сглаживание над правыми и левыми частями этих уравнений, пользуясь всегда одной и той же сглаживающей функцией (например, произведём осреднение в одном и том же интервале) [2]), удовлетворяющее перечисленным выше условиям.

Уравнение неразрывности даст вследствие условий 2 и 1:

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0.$$

---

[1]) Вместо трёх постулатов 3 мы можем формально принять один постулат:

$$\overline{\bar{f}_1 f_2} = \bar{f}_1 \bar{f}_2,$$

понимая здесь под f_1 и f_2 любые величины, например, постоянные. Действительно, при $f_2 = 1$ получим, вследствие этого равенства, $\bar{f}_1 = \bar{\bar{f}}_1$; далее, $\overline{\bar{f}_1 \bar{f}_2} = \overline{\bar{\bar{f}}_1 \bar{f}_2} = \bar{\bar{f}}_1 \bar{f}_2 = \bar{f}_1 \bar{f}_2$. Наконец, условие $\overline{\bar{f}_1 f_2'} = 0$ следует из того, что $\overline{\bar{f}_1 f_2'} = \overline{\bar{f}_1 (f_2 - \bar{f}_2)} = \overline{\bar{f}_1 f_2 - \bar{f}_1 \bar{f}_2} = \overline{f_1 f_2} - \overline{\bar{f}_1 \bar{f}_2}$, так что, по нашему постулату и по условию $\overline{\bar{f}_1 \bar{f}_2} = \bar{f}_1 \bar{f}_2$, будет $\overline{\bar{f}_1 f_2'} = 0$. Вопрос о возможности точного, а не приближённого выполнения условий 3 при разных формах сглаживания, так же как и вопрос о независимости наших постулатов, разобран в статье Изаксона А. «К определению турбулентности» Ж. Р. Ф. — Х. О., 61 (1929), 3.

[2]) Мы говорили о сглаживании функции $f(x)$ одного аргумента. Если есть функция $f(x, y, z, t)$, можно определить соответствующую сглаживающую функцию $\omega(\xi, \eta, \zeta, \tau)$, так что

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \int f(x - \xi, y - \eta, z - \zeta, t - \tau)\, \omega(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau.$$

Рейнольдс осредняет уравнения гидродинамики по одному лишь аргументу — по времени.

Уравнения Навье — Стокса дадут:

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = \rho F_x - \rho \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial t} - \rho\left(\overline{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}} + \overline{v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}} + \overline{v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}}\right) + \\ + \frac{\partial \overline{\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau_{xy}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau_{xz}}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} = \rho F_y - \rho \frac{\partial \overline{v}_y}{\partial t} - \rho\left(\overline{v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}} + \overline{v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}} + \overline{v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}}\right) + \\ + \frac{\partial \overline{\tau_{yx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau_{yy}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau_{yz}}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} = \rho F_z - \rho \frac{\partial \overline{v}_z}{\partial t} - \rho\left(\overline{v_x \frac{\partial v_z}{\partial x}} + \overline{v_y \frac{\partial v_z}{\partial y}} + \overline{v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}}\right) + \frac{\partial \overline{\tau_{zx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau_{zy}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau_{zz}}}{\partial z}$$

(считаем, что $\overline{F}_x = F_x$ и т. д.). Преобразуем входящие в ускорение нелинейные по отношению к скоростям члены; заметим, что вообще

$$f_1 f_2 = (\overline{f}_1 + f_1')(\overline{f}_2 + f_2') = \overline{f}_1 \overline{f}_2 + \overline{f}_1 f_2' + f_1' \overline{f}_2 + f_1' f_2',$$

а потому $\overline{f_1 f_2}$ может быть записано, на основании свойств 2 и 3 в виде

$$\overline{f_1 f_2} = \overline{f}_1 \overline{f}_2 + \overline{f_1' f_2'}.$$

Таким образом, например:

$$\overline{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}} + \overline{v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}} + \overline{v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}} = \\ = \overline{v}_x \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x} + \overline{v}_y \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y} + \overline{v}_z \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial z} + \overline{v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x}} + \overline{v_y' \frac{\partial v_x'}{\partial y}} + \overline{v_z' \frac{\partial v_x'}{\partial z}};$$

но

$$\overline{v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x}} + \overline{v_y' \frac{\partial v_x'}{\partial y}} + \overline{v_z' \frac{\partial v_x'}{\partial z}} = \\ = \frac{\partial}{\partial x}\overline{v_x'^2} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{v_x' v_y'} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{v_x' v_z'} - \overline{v_x'\left(\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_y'}{\partial y} + \frac{\partial v_z'}{\partial z}\right)} = \\ = \frac{\partial}{\partial x}\overline{v_x'^2} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{v_x' v_y'} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{v_x' v_z'},$$

ибо вследствие линейности уравнения неразрывности будет

$$\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_y'}{\partial y} + \frac{\partial v_z'}{\partial z} = 0.$$

Мы можем, таким образом, переписать уравнения Навье — Стокса в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \rho F_x - \rho\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z}\right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\tau_{xx}} - \rho\overline{v_x'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\tau_{xy}} - \rho\overline{v_x'v_y'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\tau_{xz}} - \rho\overline{v_x'v_z'}\right), \\
\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= \rho F_y - \rho\left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t} + \bar{v}_x\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z}\right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\tau_{yx}} - \rho\overline{v_x'v_y'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\tau_{yy}} - \rho\overline{v_y'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\tau_{yz}} - \rho\overline{v_y'v_z'}\right), \\
\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= \rho F_z - \rho\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_x\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{v}_y\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}\right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\tau_{zx}} - \rho\overline{v_x'v_z'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\tau_{zy}} - \rho\overline{v_y'v_z'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\tau_{zz}} - \rho\overline{v_z'^2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (5.1)$$

Мы видим, что уравнения для средних скоростей и для среднего давления имеют тот же вид, что и уравнения Навье — Стокса, с той лишь разницей, что к компонентам тензора напряжений прибавлены величины $-\rho\overline{v_x'^2}$, $-\rho\overline{v_x'v_y'}$, ... соответственно. Шесть величин

$$\left.\begin{aligned}
P_{xx} &= -\rho\overline{v_x'^2}; & P_{xy} &= -\rho\overline{v_x'v_y'}; & P_{xz} &= -\rho\overline{v_x'v_z'}; \\
P_{yz} &= -\rho\overline{v_y'v_z'}; & P_{yy} &= -\rho\overline{v_y'^2}; & P_{zz} &= -\rho\overline{v_z'^2}
\end{aligned}\right\} \quad (5.2)$$

носят название добавочных напряжений. Так как τ_{xx}, ... суть линейные функции от производных v_x, v_y, v_z по координатам, то $\overline{\tau_{xx}}$, ... так же выразятся через средние скорости, как τ_{xx}, ... выражаются через точные скорости, и мы получаем следующий замечательный результат: если ввести в уравнения гидромеханики вместо истинных скоростей их средние значения, то одновременно с этим надлежит ввести новые поверхностные силы, изображающиеся в виде тензора с компонентами P_{xx}, P_{xy}, ..., P_{zz}. Добавочные напряжения представляют как бы суммарный эффект всех беспорядочных отклонений скоростей от их среднего значения.

Смысл величин P_{xx}, ..., P_{zz} станет особенно выпуклым, если вспомним, как в кинетической теории газов получаются уравнения Навье — Стокса. Мы знаем, что ряд свойств газа, такие, как вязкость, диффузия, теплопроводность, обязан своим происхождением суммарному эффекту молекулярных движений, каковые в деталях мы описать не можем. Более того, в кинетической теории газов показывается что компоненты тензора напряжений в уравнениях Навье — Стокса

получаются из величин $c_x - \bar{c}_x$, $c_y - \bar{c}_y$, $c_z - \bar{c}_z$ (c_x, c_y, c_z — скорости движения молекул, $\bar{c}_x$, $\bar{c}_y$, $\bar{c}_z$ — средние значения скоростей — скорости всего потока) совершенно так же, как наши P_{xx}, P_{xy}, ..., P_{zz} получались из v'_x, v'_y, v'_z. И там и здесь мы суммарно описываем эффект беспорядочных движений.

Отметим, что при формальном введении величин P_{xx}, ... вязкость μ никакой роли не играет: уравнения для средних элементов турбулентного движения идеальной жидкости отличаются от построенных нами уравнений для вязкой жидкости отсутствием членов τ_{xx}, члены же, дающие добавочные напряжения, имеют в обоих случаях одинаковый вид.

Кинетическая энергия турбулентного движения будет для единицы объёма:

$$\frac{\rho}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)=$$

$$=\frac{\rho}{2}(\bar{v}_x^2+\bar{v}_y^2+\bar{v}_z^2)+\rho(\bar{v}_x v'_x+\bar{v}_y v'_y+\bar{v}_z v'_z)+\frac{\rho}{2}(v'^2_x+v'^2_y+v'^2_z).$$

Рассмотрим некоторый конечный объём (τ) нашей жидкости и найдём скорость изменения средней кинетической энергии этого объёма, т. е. величину

$$\frac{d}{dt}\int_{(\tau)}\frac{\rho}{2}\overline{(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\,d\tau.$$

Для простоты рассуждений предположим сперва, что объём наш ограничен твёрдыми стенками и что внешние силы отсутствуют ($F=0$). Умножая уравнения Навье-Стокса на v_x, v_y, v_z соответственно и складывая их, получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\rho\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}=$$

$$=-v_x\frac{\partial p}{\partial x}-v_y\frac{\partial p}{\partial y}-v_z\frac{\partial p}{\partial z}+v_x\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)+$$

$$+v_y\left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)+v_z\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right). \quad (5.3)$$

Беря интеграл от обеих частей по всему нашему закреплённому объёму, внося v_x, ... под знаки производных, применяя формулу Грина и замечая, что на стенках всюду $v=0$, мы получим, после

простых преобразований:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(\tau)}\rho\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}d\tau=$$

$$=-\int\limits_{(\tau)}\left[\tau_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial v_x}{\partial y}+\tau_{xz}\frac{\partial v_x}{\partial z}+\tau_{yx}\frac{\partial v_y}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\tau_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y}+\tau_{yz}\frac{\partial v_y}{\partial z}+\tau_{zx}\frac{\partial v_z}{\partial x}+\tau_{zy}\frac{\partial v_z}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]d\tau.$$

Введём обозначения:

$$\left.\begin{aligned}T&=\int\limits_{(\tau)}\rho\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}d\tau;\\ T_0&=\int\rho\frac{\overline{v}_x^2+\overline{v}_y^2+\overline{v}_z^2}{2}d\tau;\\ T'&=\int\limits_{(\tau)}\rho\frac{v_x'^2+v_y'^2+v_z'^2}{2}d\tau;\end{aligned}\right\}\qquad(5.4)$$

тогда для скорости изменения средней кинетической энергии T нашего объёма получим, очевидно:

$$\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}=\frac{\partial T_0}{\partial t}+\frac{\partial\overline{T}'}{\partial t}=$$

$$=\int\limits_{(\tau)}\left(\overline{\tau}_{xx}\frac{\partial\overline{v}_x}{\partial x}+\ldots\right)d\tau-\int\limits_{(\tau)}\left(\overline{\tau'_{xx}\frac{\partial v'_x}{\partial x}}+\ldots\right)d\tau,\qquad(5.5)$$

где $\tau'_{xx}=\tau_{xx}-\overline{\tau_{xx}}$, ... С другой стороны, нетрудно найти другое выражение для $\partial T_0/\partial t=\partial\overline{T}_0/\partial t$. В самом деле, умножая (5.1) на $\overline{v}_x$, $\overline{v}_y$, $\overline{v}_z$ соответственно, и складывая, получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{v}_x\frac{\partial}{\partial x}+\overline{v}_y\frac{\partial}{\partial y}+\overline{v}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\rho}{2}\left(\overline{v}_x^2+\overline{v}_y^2+\overline{v}_z^2\right)=$$

$$=-\overline{v}_x\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\ldots+\overline{v}_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\tau}_{xx}-\rho\overline{v_x'^2}\right)+\ldots$$

Интегрируя по объёму (τ) обе части этого равенства и применяя формулу Грина, получим, на основании того, что на стенках $\overline{v}_x=\overline{v}_y=\overline{v}_z=0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(\tau)}\frac{\rho}{2}\left(\overline{v}_x^2+\overline{v}_y^2+\overline{v}_z^2\right)d\tau=\frac{\partial T_0}{\partial t}=$$

$$=-\int\limits_{(\tau)}\left[\left(\overline{\tau}_{xx}-\rho\overline{v}_x'^2\right)\frac{\partial\overline{v}_x}{\partial x}+\ldots\right]d\tau.\qquad(5.6)$$

Сравнивая (5.6) с (5.5), получаем для скорости изменения со временем средней кинетической энергии $\overline{T}'$ турбулентных пульсаций выражение

$$\frac{\partial \overline{T}'}{\partial t} = -\int\limits_{(\tau)} \rho \left[\overline{v_x'^2} \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} + \ldots \right] d\tau - \int\limits_{(\tau)} \left[\overline{\tau'_{xx}} \frac{\partial \overline{v'_x}}{\partial x} + \ldots \right] d\tau. \quad (5.7)$$

Наконец, вставим в (5.6) и (5.7) выражения $\tau_{xx}, \ldots$ через производные от скоростей по координатам

$$\overline{\tau_{xx}} = 2\mu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x}; \quad \overline{\tau_{xy}} = \mu \left(\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial x} \right), \ldots$$

$$\tau'_{xx} = 2\mu \frac{\partial v'_x}{\partial x}, \quad \tau'_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v'_x}{\partial y} + \frac{\partial v'_y}{\partial x} \right), \ldots,$$

получим окончательно:

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = -\int\limits_{(\tau)} \Phi_0 \, d\tau + \int\limits_{(\tau)} \Psi \, d\tau, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \overline{T}'}{\partial t} = -\int\limits_{(\tau)} \overline{\Phi}' \, d\tau - \int\limits_{(\tau)} \Psi \, d\tau, \quad (5.9)$$

где

$$\Psi = \rho \left\{ \overline{v_x'^2} \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} + \overline{v_y'^2} \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial y} + \overline{v_z'^2} \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial z} + \overline{v'_y v'_z} \left(\frac{\partial \overline{v_z}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial z} \right) + \right.$$
$$\left. + \overline{v'_x v'_z} \left(\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial y} \right) + \overline{v'_x v'_y} \left(\frac{\partial \overline{v_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} \right) \right\},$$

$$\Phi' = \mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial v'_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v'_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v'_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'_z}{\partial y} + \frac{\partial v'_y}{\partial z} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v'_x}{\partial z} + \frac{\partial v'_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'_y}{\partial x} + \frac{\partial v'_x}{\partial y} \right)^2 \right\},$$

$$\Phi_0 = \mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \overline{v_y}}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \overline{v_z}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{v_z}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_y}}{\partial z} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{v_y}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} \right)^2 \right\}.$$

Знак в правой части выражения (5.9) скорости изменения энергии пульсаций может быть положителен или отрицателен в зависимости от знака члена $\int\limits_{(\tau)} \Psi \, d\tau$, первый член $-\int \overline{\Phi}' \, d\tau$ зависит от коэффициента вязкости μ и всегда отрицателен.

Если надо принять в расчёт внешние силы F_x, F_y, F_z и если объём (τ) не ограничен твёрдыми стенками, так что на границах $v \neq 0$, в уравнении (5.8) придётся добавить члены, представляющие: 1) поток кинетической энергии осреднённого движения через границы, 2) работу внешних сил, 3) работу, совершённую на границе средними напряжениями τ_{xx}, ... и средним давлением, а также добавочными напряжениями.

Напротив, в уравнении (5.9) надо будет добавить лишь члены, зависящие от конвекции энергии турбулентного движения через границы области (τ).

Обращаясь к случаю сжимаемой жидкости, запишем уравнения движения, вводя вектор количества движения (с компонентами $m_x = \rho v_x$, $m_y = \rho v_y$, $m_z = \rho v_z$) и принимая во внимание уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z} = 0,$$

в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho F_x + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx} - v_x m_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy} - v_y m_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{xz} - v_z m_x) - \frac{\partial m_x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho F_y + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{yx} - v_x m_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy} - v_y m_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{yz} - v_z m_y) - \frac{\partial m_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho F_z + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{zx} - v_x m_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{zy} - v_y m_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz} - v_z m_z) - \frac{\partial m_z}{\partial t}.$$

Произведём теперь над правыми и левыми частями всех четырёх уравнений сглаживание с одной и той же сглаживающей функцией (например, осреднение в одном и том же интервале), удовлетворяющее трём перечисленным выше условиям. Уравнение неразрывности даст, на основании условий 1 и 2:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{m_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{m_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{m_z}}{\partial z} = 0.$$

Выпишем первое из уравнений движения:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \bar{\rho} F_x + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\tau}_{xx} - \overline{v_x m_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\tau}_{xy} - \overline{v_y m_x}) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{\tau_{xz}} - \overline{v_z m_x}) - \frac{\partial \overline{m_x}}{\partial t}, \quad (F_x = F_x).$$

Обратим внимание на выражения типа $\overline{v_x m_x}$. Имеем:

$$\overline{v_x m_x} = \overline{(\bar{v}_x + v'_x)(\bar{m}_x + m'_x)} = \overline{\bar{v}_x \bar{m}_x + \bar{v}_x m'_x + v'_x \bar{m}_x + v'_x m'_x}$$

или, вследствие свойств 3:

$$\overline{v_x m_x} = \bar{v}_x \bar{m}_x + \overline{v'_x m'_x}.$$

Если пульсациями плотности можно пренебречь ($\rho' = 0$) $\bar{\rho} = \rho$ (это, по-видимому, имеет место в атмосферных движениях), то для добавочных напряжений мы получим те же выражения, что и в случае несжимаемой жидкости; в самом деле, здесь

$$\bar{m}_x = \overline{\rho v_x} = \bar{\rho}\bar{v}_x = \rho \bar{v}_x = \rho \bar{v}_x$$

и

$$v'_x m'_x = v'_x (m_x - \bar{m}_x) = v'_x \rho (v_x - \bar{v}_x) = \rho v'^2_x.$$

Построив уравнения для средних величин, мы сталкиваемся с дилеммой, либо поставить шесть новых величин — добавочные напряжения — в зависимость от старых величин $\bar{v}_x$, $\bar{v}_y$, $\bar{v}_z$, $\bar{p}$, $\bar{\rho}$, либо, считая эти шесть величин за независимые новые функции (новый симметрический тензор), построить какие-то новые уравнения, ибо теперь осреднённых уравнений движения и неразрывности, очевидно, будет недостаточно.

§ 6. Характеристики турбулентности. Богатейший эмпирический материал последних лет явился основой развития полуэмпирических, полутеоретических методов нахождения добавочных напряжений через средние значения скоростей. С некоторыми изысканиями, сюда относящимися, мы познакомимся в следующем параграфе. Что касается присоединения новых уравнений к системе осреднённых уравнений гидродинамики, то здесь наиболее совершенная постановка вопроса принадлежала Келлеру и Фридману [1]). Идея заключалась в присоединении к величинам $\bar{v}_x$, $\bar{v}_y$, $\bar{v}_z$, $\bar{p}$, $\bar{\rho}$ (для общего случая сжимаемой жидкости) в качестве искомых функций 15 дальнейших «характеристик» турбулентности, вводимых под названием «*моментов связи*» и являющихся обобщением рейнольдсовских добавочных напряжений. Моменты связи строятся после того, как введены «*корреляционные моменты*». Под последними понимают выражения вида $R(f_1, f_2) = \overline{f_1 f_2} - \bar{f}_1 \bar{f}_2$ (поскольку равенство $\overline{f_1 f_2} = \bar{f}_1 \bar{f}_2$ выполняется лишь приближённо, $R(f_1 f_2)$ лишь приближённо будет равно $\overline{f'_1 f'_2}$), где f_1 и f_2 — какие-либо гидродинамические элементы; задав теперь произвольные приращения $\pm\xi$, $\pm\eta$, $\pm\zeta$ координат x, y, z,

[1]) См. работу Келлер Л., Ueber die Aufstellung eines Systems von Charakteristiken der atmosphärischen Turbulenz, Изв. гл. Физ. Обсерватории, 1925.

определим момент связи (f_1, f_2) для двух каких-либо функций f_1 и f_2 в виде

$$(f_1, f_2) = R\,[f_1(x-\xi, y-\eta, z-\zeta; t), \quad f_2(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t)],$$

Таким образом, моменты связи суть функции времени, координат и трёх добавочных переменных [1]). Легко видеть, что придётся рассмотреть пятнадцать моментов связи для случая сжимаемой жидкости, или десять для несжимаемой жидкости.

В работе Кармана, а затем в работе Кармана и Хауэрса [2]) и одновременно в работах Миллионщикова и Лойцянского [3]) решение получаемой таким образом системы уравнений доведено до конца в одном весьма частном случае турбулентного движения — в случае так называемой однородной и изотропной турбулентности. Последнее понятие было расширено Колмогоровым, который ввёл в рассмотрение «локально однородную» и «локально изотропную» турбулентность. Изложение первых результатов, касающихся этих частных видов турбулентности так же, как и соответствующего аппарата исследования турбулентности, можно найти в монографии Обухова А. М. «Приложение методов статистического описания непрерывных процессов и полей к теории атмосферной турбулентности», Диссертация, Москва, 1947 г.

Ричардсон и Тейлор [4]) пришли совсем из других соображений к рассмотрению моментов связи для различных гидродинамических элементов. Мы ещё вернёмся к этим работам, а сейчас остановимся на вопросе о сопровождающем турбулентность перемешивании.

Рейнольдс ввёл в качестве «характеристик» турбулентности шесть компонентов тензора добавочных напряжений; Ричардсон, Шмидт и Тейлор вводят в рассмотрение лагранжевы переменные. Это даёт возможность следить за конечным перемещением индиви-

---

[1]) При построении дополнительных уравнений приходится воспользоваться новой гипотезой, касающейся осреднений, применительно к необходимости осреднять произведения уже не двух, а трёх функций. Эта новая гипотеза сводится к приближённому соотношению $\overline{f_1' f_2' f_3'} = 0$, где, как и прежде, $f_1' = f_1 - \overline{f_1}$ и т. д. После того, как система уравнений построена, надлежит ещё проверить независимость отдельных уравнений системы.

[2]) K á r m á n and H o w a r t h. On the statistical Theory of Isotropic Turbulence Proc. Roy. Soc. **164**, (1938) № 917, стр. 192—215.

[3]) М и л л и о н щ и к о в М. Д., Вырождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости. ДАН СССР, **26** (1939), № 5, стр. 236—240; Л. Г. Л о й ц я н с к и й. Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока, Труды ЦАГИ, № 440, 1939.

См. также С е д о в Л. И., Методы подобия и размерностей в механике, Гостехиздат, 1957.

[4]) R i c h a r d s o n, Atmospheric diffusion on a distance neighbour graph., Proc. Roy. Soc. London (A), **110** (1926), стр. 729—757. T a y l o r G., Diffusion by continuous mouvements, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 20, 1921.

дуальных частичек и, таким образом, позволяет ближе подойти к изображению процесса «перемешивания» (Austausch, Conductivity). Выведем уравнение перемешивания какой-либо субстанции, расположенной в среде, находящейся в турбулентном движении. Вместе с Тейлором и Шмидтом ограничимся рассмотрением перемешивания только в одном направлении (назовём его z). Относительно субстанции, подверженной перемешиванию, предположим, что она: 1) неуничтожима, т. е. сохраняется в некотором элементарном объёме жидкости, пока тот движется, не смешиваясь с другими; 2) сохраняется при смешении двух масс. Обозначим количество субстанции в единице массы жидкости через s. Под самой субстанцией можем разуметь либо какую-нибудь примесь к жидкости (пыль, например), либо какую-нибудь физическую характеристику самой жидкости (например, её количество движения в направлении, перпендикулярном к оси z, запас её тепловой энергии). Предположим ещё, что субстанция распределена приблизительно равномерно в направлении оси, перпендикулярной к оси z (например, x и y), но равномерность эта имеет статистический характер: именно, выбрав достаточно большую площадь, перпендикулярную к оси z, и осреднив s по этой площади, получим уже величину, не зависящую от положения центра выбранной площади (не зависящую от x и y):

$$\overline{s(x, y, z, t)} = \bar{s}(z, t).$$

Введём затем плотность субстанции $\sigma = \rho s$ (ρ — плотность жидкости) — количество субстанции в единице объёма. Естественно теперь принять, что средний поток субстанции через плоскость $z = \text{const}$. будет пропорционален проекции градиента $\bar{\sigma}$ на ось z; пусть это будет

$$-k\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial z},$$

где k — некоторый положительный коэффициент пропорциональности (если бы было $k<0$, то мы имели бы дело не с рассеиванием, а с концентрацией субстанции). Сравнивая поток субстанции на уровнях z и $z+dz$, находим прирост субстанции за единицу времени:

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial z}\right)^{1}. \tag{6.1}$$

Мы видим, таким образом, что плотность субстанции удовлетворяет, независимо от механизма турбулентного перемешивания, диф-

[1]) На основании второго постулата σ не теряется и не появляется в элементе dz само по себе.

ференциальному уравнению (6.1). Трудность заключается в определении коэффициента k [1]).

Желая определить k, заметим прежде всего, что если субстанция переносится жидкостью пассивно и своим присутствием на движение существенно не влияет, то величину k естественно считать не зависящей ни от рода субстанции, ни от её мгновенного распределения; k определяется исключительно состоянием неупорядоченного турбулентного движения жидкости. При данном движении рассеяние любой субстанции описывается одним и тем же уравнением (6.1).

Предположим, что k не меняется ни в пространстве, ни во времени (это статистическая характеристика некоторого состояния движения). Рассмотрим также ещё случай, когда $\rho = \text{const}$. Тогда (6.1) обращается в простое уравнение теплопроводности, и мы можем написать решение его в виде:

$$\bar{\sigma}(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k (t - t_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z - z_0)^2}{4k(t - t_0)}} \bar{\sigma}(z_0, t_0)\, dz_0, \tag{6.2}$$

где $\bar{\sigma}(z, t_0)$ представляет среднее распределение плотности субстанции на уровне z в момент времени $t = t_0$. Мы видим, что турбулентность действует на начальное распределение $\bar{\sigma}(z_0, t_0)$ по высоте z_0 как сглаживание со сглаживающей функцией

$$\omega(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k (t - t_0)}} e^{-\frac{\xi^2}{4k(t - t_0)}}.$$

Мы уже говорили выше о сглаживающей функции такого типа (формула (а), § 4).

Возьмём теперь некоторый уровень z_0 и посмотрим, какая судьба постигнет в момент t частицы жидкости, лежавшие в момент t_0 на уровне z_0. Обозначая через $\zeta(x, y, t)$ значение z для разных точек нашего уровня в момент t, мы, очевидно, должны иметь, на основании самого определения турбулентности,

$$\overline{\zeta(x, y, t) - z_0} = 0.$$

Рассчитаем, однако, величину

$$\overline{(\zeta - z_0)^2} = \frac{1}{f} \int (\zeta - z_0)^2\, df \tag{6.3}$$

[1]) Уравнение (6.1) по своему обоснованию тесно примыкает к аналогичному уравнению, построенному Фикком (F i c k, Ann. Phys. Chem., 1885, т. 49) для молекулярной диффузии; поэтому в английской литературе по турбулентности оно называется уравнением Фикка. Вывод его, так же как способ нахождения (см. ниже), мы заимствуем из главы Келлера по атмосферной турбулентности в книге «Динамическая метеорология» под редакцией Извекова и Кочина, ч. II, 1936.

где интеграл взят по элементу df площади f, достаточно большой и расположенной в плоскости (x, y).

Величину эту можно выразить через k. Чтобы это сделать, заметим сперва, что, рассматривая частицы, лежащие в момент t_0 на уровне z_0 или, точнее, в слое от z_0 до z_0+dz_0, как примесь, и предполагая, что они к моменту времени t разбросаются по различным уровням z от $-\infty$ до ∞, можно применить интеграл (6.2) (вернее один элемент этого интеграла, ибо $\bar{\sigma}(z_0, t_0)$ сосредоточено у нас на элементе dz_0) к определению того количества наших частиц, которое попадает в момент t на уровень z; на единицу площади их будет

$$\nu_z = \frac{1}{2\sqrt{\pi k(t-t_0)}}\, e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4k(t-t_0)}} \rho_0\, dz_0,$$

а на единицу массы $n_z = \frac{\nu_z}{\rho_0}$ (очевидно, следует положить $\bar{\sigma}(z_0, t_0) = \rho_0$). Но теперь, вместо того, чтобы вычислять интеграл (2.18) интегрированием величины $(\zeta - z_0)^2$ по площади, мы можем разбить вычисление (6.3), беря сперва для каждого z $n_z(\zeta - z_0)^2$, умноженное на соответствующую площадь, а затем, интегрируя это по z от $-\infty$ до $+\infty$ (частицы распределятся, по предположению, во всём промежутке от $-\infty$ до $+\infty$). Но тогда получим:

$$\overline{(\zeta - z_0)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi k(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4k(t-t_0)}} (z-z_0)^2\, dz.$$

Интеграл в правой части вычисляется и даёт $2k(t-t_0)$. Отсюда

$$k = \frac{\overline{(\zeta - z_0)^2}}{2(t-t_0)}. \tag{6.4}$$

Таким образом, нами найден гидродинамический смысл величины k. Имея в виду этот смысл, величину k называют *мерой рассеяния*. Одновременно с k часто вводят ещё величину $A = \rho k$, где под ρ разумеется средняя плотность; величина эта носит название *меры обмена*.

Размерность A совпадает с размерностью коэффициента вязкости μ, размерность же k будет L^2/T, что совпадает с размерностью кинематического коэффициента вязкости ν.

Покажем ещё, как можно иначе выразить величину k. Пусть по-прежнему перемешивание происходит лишь в направлении z, сосредоточим внимание на одной какой-либо частице и будем обозначать значения её скорости в моменты времени t через $v_z(t)$. Следуя Тейлору (loc. cit.), привлечём к рассмотрению коэффициент корреляции (или момент связи) между значениями $v_z(t)$ и $v_z(t+\tau)$, где τ рас-

сматривается как произвольный постоянный параметр, и выразим k через этот коэффициент. Строгий вывод был дан Л. Келлером [1]). Мы укажем лишь путь получения строгого вывода, отсылая за подробностями к статье Келлера.

Вместе с Келлером подчиним v_z следующим четырём требованиям. Предположим: 1) что существует предел для среднего значения $v_z(t)$ при увеличении интервала осреднения до бесконечности, и этот предел равен нулю (мы считаем, что у нас нет среднего переноса, а есть лишь турбулентное движение, так что $\overline{v_z} = 0$); 2) что существует предел при увеличении до бесконечности интервала осреднения, для среднего значения $v_z(t)^2$ и, более обще, для среднего значения выражения $v_z(t)\,v_z(t+\tau)$; эти пределы будем обозначать $\overline{v'_z(t)^2}$ и $\overline{v'_z(t)\,v'_z(t+\tau)}$ соответственно (на основании свойства 1 можно положить $v'_z = v_z$); 3) что по мере того, как мы будем увеличивать интервал изменений t до ∞ величина $P[\alpha < v_z(t) < \beta]$, равная вероятности того, что $v_z(t)$ заключается во взятом интервале изменения t между α и β, стремится к какому-то определённому пределу; 4) что если через $R(\tau)$ обозначить коэффициент корреляции между $v_z(t)$ и $v_z(t+\tau)$;

$$R(\tau) = \frac{\overline{v'_z(t)\,v'_z(t+\tau)}}{\overline{v'^2_z(t)}},$$

интеграл $\int_0^\infty R(\tau)\,d\tau$ имеет определённое конечное значение (мы характеризуем турбулентное движение как *неупорядоченное*, а в таком случае естественно потребовать, чтобы корреляция между $v_z(t)$ и $v_z(t+\tau)$ при возрастании τ дальше некоторого предела быстро стремилась к нулю).

Рассмотрим затем некий, конечной длины l, интервал оси t и обозначим среднее значение от $v_z(t)$ в этом интервале через $\overline{v_z(t, l)}$; $\overline{v_z(t, l)} = \frac{1}{l}\int_{t-\frac{l}{2}}^{t+\frac{l}{2}} v_z(\xi)\,d\xi$. Величина $\overline{v_z(t, l)}$ будет, вообще говоря, отлична от нуля. Можно теперь доказать следующую теорему [2]): вероятность $P(\alpha < \overline{v_z(t, l)} < \beta)$ существования неравенства $\alpha < \overline{v_z(t, l)} < \beta$

[1]) Келлер Л., Распространение предельных теорем теории вероятности на интегралы и средние значения функций сплошного аргумента, Труды Главной географической обсерватории, вып. 4, 1935. Далее, статья Келлера по теории турбулентности, из книги «Динамическая метеорология».

[2]) Келлер Л., loc. cit. Теорема эта является обобщением на случай функций сплошного аргумента известной предельной теоремы теории вероятности, применяющейся обычно к дискретной последовательности случайных величин.

при увеличении l к ∞ стремится к выражению:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha\sqrt{l}}{c}}^{\frac{\beta\sqrt{l}}{c}} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} d\eta,$$

где

$$c = \sqrt{2\overline{v_z'^2} \int_0^\infty R(\tau)\, d\tau}.$$

Рассмотрим, в частности, осреднение вида $\frac{1}{l}\int_0^l v_z(t)\,dt$. Имеем:

$$P\left(A < \int_0^l v_z(t)\,dt < B\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{A}{c\sqrt{l}}}^{\frac{B}{c\sqrt{l}}} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} d\eta,$$

а если перейти под знаком интеграла справа от переменного η к переменному $u = \eta c\sqrt{l}$, то получим

$$P\left(A < \int_0^l v_z(\xi)\,d\xi < B\right) \sim \frac{1}{c\sqrt{2\pi l}} \int_A^B e^{-\frac{u^2}{2c^2 l}} du.$$

Примем теперь $l = t - t_0$. Тогда $\int_0^l v_z(\xi)\,d\xi = \zeta - z_0$ представит вертикальное уклонение частицы от её первоначального положения в некоторый момент t, и мы придём к статистическому закону распределения уклонений $\zeta - z_0$:

$$\varphi(\zeta,\ t) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi(t-t_0)}} e^{-\frac{(\zeta - z_0)^2}{2c^2(t-t_0)}}.$$

Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}.$$

Заметим, что величина c будет, вообще говоря, разной для разных частиц. Предполагая турбулентность однородной, можем, однако, считать, что c для всех частиц одинаково. При этом условии осреднение по большому промежутку времени, применённое к смене составляющих скорости одной частицы, может быть заменено осреднением

уже не по времени, а по массе — для всей совокупности частиц, содержащихся в рассматриваемой массе. Можно тогда сравнить наше уравнение для φ с уравнением Фикка (6.2) и написать $k = \frac{c^2}{2}$. Мы придём таким образом к формуле:

$$k = \overline{v_z'^2} \int_0^\infty R(\tau)\, d\tau,$$

а это и есть выражение, предложенное Тейлором для меры рассеяния.

Мы уже говорили, что приведённое здесь рассуждение можно отнести лишь к тому случаю, когда турбулентные процессы происходят достаточно однородно внутри достаточно протяжённой во всех направлениях массы, т. е. когда речь идёт об однородной турбулентности. В том случае, когда имеется турбулентность, так сказать, разных масштабов (как, например, это имеет место в земной атмосфере), процесс турбулентного рассеяния будет существенным образом зависеть от размеров области, занимаемой рассматриваемой примесью. Чтобы пояснить эту мысль, посмотрим, как будет рассеиваться дым в свободной атмосфере. Представим себе две молекулы ацетилена, находящиеся на расстоянии 10^{-5} *см* друг от друга; по истечении одной секунды они, подвергнувшись действию молекулярной диффузии, разойдутся, но всё ещё будут друг от друга на расстоянии порядка 10^1 *см*. Совсем иная судьба постигнет две молекулы ацетилена, находящиеся на расстоянии 10^5 *см* $= 10^3$ *м* друг от друга; здесь появляется диффузия турбулентная (порывистость ветра), наши частицы могут быть подхвачены разными порывами ветра, так что через секунду расстояние между ними может *измениться* на несколько метров, а не на величину порядка 10^1 *см* $- 10^{-5}$ *см* $\approx 10^1$ *см*, как это и было в первом случае. Иначе говоря, такая существенная величина, как скорость расширения «диффундирующего» в турбулентной среде облака, будет меняться по мере того, как облако будет «жить», ибо «живя», облако всё время увеличивается в размерах и, следовательно, попадает в сферу влияния всё новых и новых вихрей.

Ричардсон предложил учитывать этот эффект, полагая k функцией диаметра области, и получил на основании эмпирических данных следующую зависимость:

$$k(d) = cd^{4/3},$$

где d — диаметр области, c — постоянная. Эта зависимость была теоретически обоснована А. М. Обуховым в работе: «О распределении энергии в спектре турбулентного потока» [1]).

---

[1]) Изв. АН СССР, Серия геогр. и геофиз, 1941, 4—5.

Мы рассматривали случай перемешивания, происходящего в одном направлении. В общем случае вместо величины k из (6.4) нам придётся ввести «тензор рассеивания». Именно, вводя «исходные» координаты a, b, c частиц (координаты в момент t_0) и координаты x, y, z этих же частиц в момент t, можем построить шесть величин:

$$k_{xx}=\frac{\overline{(x-a)(x-a)}}{2(t-t_0)},\quad k_{xy}=\frac{\overline{(x-a)(y-b)}}{2(t-t_0)},\ \ldots,$$

$$k_{zz}=\frac{\overline{(z-c)(z-c)}}{2(t-t_0)}$$

(с этой точки зрения наше k равно k_{zz}); аналогично этому можно получить:

$$A_{xx}=\rho\frac{\overline{(x-a)(x-a)}}{2(t-t_0)},\ \ldots,\quad A_{zz}=\rho\frac{\overline{(z-c)^2}}{2(t-t_0)}.$$

Тензор с компонентами $A_{xx},\ \ldots,\ A_{zz}$ представляет обобщение введённого Рейнольдсом тензора добавочных напряжений и впервые введён Келлером [1]).

В. ДОБАВОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

§ 7. Путь перемешивания и метод подобия. В этом разделе мы приведём вывод нескольких наиболее важных формул, связывающих добавочные напряжения со средними значениями гидродинамических элементов, а также дадим некоторые приложения этих формул. Мы начнём при этом с введённого Прандтлем понятия «пути перемешивания».

Представим себе плоское турбулентное движение, которое происходит в среднем в направлении оси x и в котором средняя скорость $\bar{v}_x$ существенным образом зависит лишь от координаты y. Наиболее существенным из добавочных напряжений является здесь $P_{xy}=-\rho\overline{v'_xv'_y}$. Чтобы представить его выражение иначе, Прандтль вводит некую характерную длину — «путь перемешивания», играющую ту же роль, что и путь пробега молекулы в кинетической теории газов. Если обозначить через l' различные пути перемешивания, т. е. различные расстояния от той точки M, где мы вычисляем величины $\overline{v'_xv'_y}$, до тех точек, из которых приходят в точку M различные частицы жидкости (например, если говорить об осреднении по времени), то частицы, приходящие со скоростями v'_y, будут иметь ско-

[1]) См. об этом Келлер Л., loc. cit.

рости v_x, равные $\bar{v}_x + l' \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}$. Но тогда

$$v'_x = l' \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y},$$

и добавочное напряжение $P_{xy} = -\rho \overline{v'_x v'_y}$ будет

$$P_{xy} = -\rho \overline{v'_y l'} \frac{d\bar{v}_x}{dy} \text{ [1]}. \tag{7.1}$$

Введём затем среднее значение абсолютных величин $|l'|$ и назовём его l.

Предположим вместе с Карманом, что внутренний механизм турбулентности во всех местах жидкости имеет один и тот же характер и может отличаться только масштабами длины и времени. Иначе говоря, мы предположим, и это — основная гипотеза Кармана, что турбулентные движения в различных частях жидкости между собой подобны. Если нам было бы известно, от каких гидродинамических элементов зависит величина l, мы могли бы теперь, пользуясь соображениями, изложенными в главе второй, пытаться найти вид зависимости l от этих элементов. Предположим же, и в этом заключается вторая гипотеза Кармана, что в выражение для l не входят третьи производные от $\bar{v}_x$ по y, так что l может зависеть от ρ, $d\bar{v}_x/dy$, $d^2\bar{v}_x/dy^2$ (мы исключаем возможность зависимости от $\bar{v}_x$, ибо, прибавляя к v_x всюду постоянное число, мы, очевидно, не изменим картины явления). Итак, пусть

$$l = Z(\rho, \dot{\bar{v}}_x, \ddot{\bar{v}}_x),$$

где

$$\dot{\bar{v}}_x = \frac{d\bar{v}_x}{dy}, \quad \ddot{\bar{v}}_x = \frac{d^2\bar{v}_x}{dy^2}.$$

Введём новые единицы длины, времени и массы соответственно в L, T, M раз бо́льшие старых единиц. Тогда, обозначая численные значения всех рассматриваемых величин в новой системе единиц через l_1, ρ_1, $\dot{\bar{v}}_{x1}$, ... соответственно, будем иметь:

$$l = Ll_1, \quad \rho = \frac{M}{L^3}\rho_1, \quad \frac{d\bar{v}_x}{dy} = \frac{1}{T}\frac{d\bar{v}_{x1}}{dy_1}, \quad \frac{d^2\bar{v}_x}{dy^2} = -\frac{1}{TL}\frac{d^2\bar{v}_{x1}}{dy_1^2}.$$

Поэтому наша предполагаемая зависимость примет вид:

$$Ll_1 = Z\left(\frac{M}{L^3}\rho_1, \frac{1}{T}\frac{d\bar{v}_{x1}}{dy_1}, \frac{1}{TL}\frac{d^2\bar{v}_{x1}}{dy_1^2}\right).$$

---

[1]) Выражение $-\rho \overline{v'l'}$ имеет размерность μ и аналогично этому коэффициенту. Ср. также с мерой обмена, введённой в предыдущем параграфе.

С другой стороны, должно быть в новой системе единиц:

$$l_1 = Z\left(\rho_1,\ \frac{d\bar{v}_{x1}}{dy_1},\ \frac{d^2\bar{v}_{x1}}{dy_1^2}\right),$$

так что (мы отбросим значок «1»)

$$Z\left(\frac{M}{L^3}\rho,\ \frac{1}{T}\dot{\bar{v}}_x,\ \frac{1}{LT}\ddot{\bar{v}}_x\right) = LZ(\rho,\ \dot{\bar{v}}_x,\ \ddot{\bar{v}}_x).$$

В этом тождестве положим $\frac{M}{L^3} = \frac{1}{\rho}$, $T = \frac{d\bar{v}_x}{dy}$, $LT = \ddot{\bar{v}}_x$; тогда получим равенство

$$Z(\rho,\ \dot{\bar{v}}_x,\ \ddot{\bar{v}}_x) = \frac{1}{L}Z(1,\ 1,\ 1) = \frac{d\bar{v}_x}{dy}\Big/\frac{d^2\bar{v}_x}{dy^2}\ \text{const}.$$

Таким образом,

$$l = k\frac{d\bar{v}_x}{dy}\Big/\frac{d^2\bar{v}_x}{dy^2}, \tag{7.2}$$

где k есть постоянная, каковую надлежит определить из эмпирических данных.

Зная выражение для l, без всякого труда найдём выражение для P_{xy}. Считаем, что последнее может быть функцией от l, ρ, $\dot{\bar{v}}_x$, $\ddot{\bar{v}}_x$:

$$P_{xy} = F(\rho,\ l,\ \dot{\bar{v}}_x,\ \ddot{\bar{v}}_x).$$

Тогда введём

$$(P_{xy})_1 = \frac{LT^2}{M}P_{xy},\quad l_1 = \frac{1}{L}l,\quad \rho_1 = \frac{L^3}{M}\rho,\quad \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right)_1 = T\left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^2v_x}{dy^2}\right)_1 = TL\frac{d^2\bar{v}_x}{dy^2},$$

так что

$$\frac{M}{LT^2}(P_{xy})_1 = F\left(\frac{M}{L^3}\rho_1,\ Ll_1,\ \frac{1}{T}\dot{\bar{v}}_{x1},\ \frac{1}{LT}\ddot{\bar{v}}_{x1}\right).$$

С другой стороны,

$$(P_{xy})_1 = F(\rho_1,\ l_1,\ \dot{\bar{v}}_{x1},\ \ddot{\bar{v}}_{x1})$$

и, следовательно (отбрасываем значки):

$$F\left(\frac{M}{L^3}\rho,\ Ll,\ \frac{1}{T}\dot{\bar{v}}_x,\ \frac{1}{LT}\ddot{\bar{v}}_x\right) = \frac{M}{LT^2}F(\rho,\ l,\ \dot{\bar{v}}_x,\ \ddot{\bar{v}}_x).$$

Наконец, полагая

$$\frac{M}{L^3} = \frac{1}{\rho},\quad L = \frac{1}{l},\quad T = \dot{\bar{v}}_x,$$

мы придём к соотношению

$$F(\rho,\ l,\ \dot{\bar{v}}_x,\ \ddot{\bar{v}}_x) = \rho l^2\dot{\bar{v}}_x^2 F\left(1,\ 1,\ 1,\ l\frac{\ddot{\bar{v}}_x}{\dot{\bar{v}}_x}\right).$$

Но вследствие (7.2)

$$l\frac{\dot{\bar{v}}_x}{\bar{v}_x} = \text{const.},$$

и мы приходим к важной формуле

$$P_{xy} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right)^2 \text{[1]}. \tag{7.3}$$

Формула (7.3) была установлена впервые Прандтлем, который, исходя из выражения (3.1), нашёл

$$|\overline{v'l'}| = l^2 \left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right|.$$

Пользуясь (7.2), можем переписать (7.3) в виде:

$$P_{xy} = k^2\rho \frac{\dot{\bar{v}}_x^4}{\ddot{\bar{v}}_x^2}. \tag{7.4}$$

§ 8. Примеры. Формулу (7.4) применим к изучению турбулентного движения между двумя гладкими параллельными стенками ($y = 0$, $y = 2d$). Напишем теперь уравнения (5.1) для осредненного движения, считая, что средние напряжения, так же как и $\bar{v}_x$, зависят лишь от y и что сила отсутствует, а $\bar{v}_y = 0$. Получим, очевидно:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial P_{xy}}{\partial y},$$

откуда заключаем, что в нашем движении P_{xy} есть линейная функция от y. Вместе с Карманом положим, что при $0 \leqslant y \leqslant d$

$$P_{xy} = \tau_0\left(1 - \frac{y}{d}\right),$$

считая, что P_{xy} обращается в нуль на середине расстояния $2d$ между стенками, а при $d \leqslant y \leqslant 2d$

$$P_{xy} = -\tau_0\left(1 - \frac{y}{d}\right),$$

где τ_0 — добавочное напряжение около самой стенки (точнее на границе ламинарного пограничного слоя, имеющегося внутри нашего турбулентного слоя). Но тогда (7.4) даст нам дифференциальное уравнение второго порядка, из коего можно найти $\bar{v}_x(y)$:

$$\rho k^2 \left(\frac{\dot{\bar{v}}_x^2}{\ddot{\bar{v}}_x}\right)^2 = \tau_0\left(1 - \frac{y}{d}\right)$$

---

[1]) Мы положили $F(1, 1, 1, k) = 1$; это можно сделать, выбирая l должным образом.

или

$$\frac{\ddot{v}_x^2}{\dot{v}_x^2} = \mp \sqrt{\frac{\rho}{\tau_0}}\,\frac{k}{\sqrt{1-\frac{y}{d}}},$$

откуда

$$\frac{1}{\dot{v}_x} = \pm \sqrt{\frac{\rho}{\tau_0}}\,2dk\sqrt{1-\frac{y}{d}} + \text{const}.$$

Полагая $\text{const} = 2kd\sqrt{\frac{\rho}{\tau_0}}$ (при $y=0$, $\dot{v}_x = \infty$), получим:

$$\dot{v}_x = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\,\frac{1}{2dk}\,\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{y}{d}}}$$

(выбираем знак минус, чтобы $\dot{v}_x$ убывало с возрастанием y), интегрируя ещё раз, придём, в предположении, что $v_x(d) = v_{x\max}$, к формуле Кармана:

$$\frac{v_{x\max} - v_x}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} = \frac{1}{k}\left[\ln\left(\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{y}{d}}}\right) - \sqrt{1-\frac{y}{d}}\right]. \tag{8.1}$$

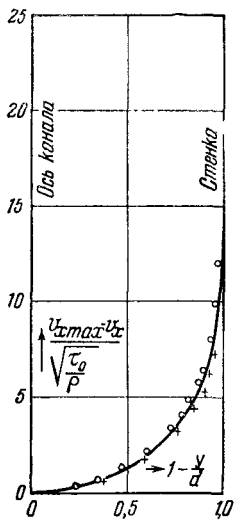

Рис. 197.

Формула (8.1) Кармана даёт, как мы уже отмечали, хорошее совпадение с данными эксперимента. На рис. 197 изображена кривая (8.1).

Граница между областью, где эта формула применима, и пограничной областью, где даёт себя знать вязкость («ламинарный подслой»), определяется значением $y = y_1$, при котором $v_x = v_{x1} = \frac{\tau_0}{\mu} y_1$ (внутри ламинарного слоя скорость считаем меняющейся по линейному закону, причём там $\tau_0 = \mu\,\partial v_x/\partial y$). Если бы мы знали величину τ_0, то, вставляя значение $v_x = v_{x1}$ в левую часть (8.1) и значение $y = y_1$ в правую часть, мы нашли бы, при данном $v_{x\max}$, y_1, т. е. толщину ламинарного пограничного слоя, погружённого в наш турбулентный слой, при этом (8.1), поскольку речь идёт о точках, лежащих очень близко от стенки ($y \approx 0$), можно заменить приближённым равенством

$$\frac{v_{x\max} - v_{x1}}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} \approx \frac{1}{k}\left(\ln\frac{2d}{y_1} - 1\right). \tag{8.2}$$

Наша формула связывает три величины $v_{x\max}$, τ_0 и y_1. Прандтль [1]) предлагает далее принять, что так как слои жидкости, в которых проявляется трение, должны быть одинаковы, то v_x, должно быть кратным $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$, т. е.

$$v_{x1} = \beta \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \tag{8.2'}$$

где β есть уже некоторая постоянная, каковую надо найти раз навсегда из эксперимента. Но тогда (3.6) даст:

$$v_{x\max} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left\{ \beta + \frac{1}{k} \left(\ln \frac{2d}{y_1} - 1 \right) \right\}, \tag{8.3}$$

причём здесь $y_1 = \frac{\rho\nu}{\tau_0} v_{x1} = \sqrt{\frac{\rho}{\tau_0}}\, \beta\nu$.

Введём теперь вместо $v_{x\max}$ и τ_0 «коэффициент сопротивления» λ_m, отнесённый к максимальной скорости $v_{x\max}$,

$$\lambda_m = \frac{4\tau_0}{\rho v_{x\max}^2},$$

и число Рейнольдса R_m, отвечающее $v_{x\max}$:

$$\mathsf{R}_m = \frac{v_{x\max} d}{\nu}.$$

Мы получим тогда, вместо (8.2), после простых преобразований:

$$\lambda_m = \frac{4k^2}{(\ln \mathsf{R}_m \sqrt{\lambda_m} + c)^2},$$

где

$$C = k\beta - 1 - \ln \beta.$$

Сравнение этой формулы с опытами Никурадзе, Шиллера и др. дало очень хорошие результаты для значений R_m, доходящих до $1{,}8 \cdot 10^6$. При этом оказалось, что $k = 0{,}44$ (по Карману 0,36), $C = 2{,}83$. На рис. 198 по горизонтальной оси отложены значения $\lg \sqrt{\lambda_m}\mathsf{R}_m$, а по вертикальной оси — значения $1/\sqrt{\lambda_m}$. Точками изображены данные эксперимента.

Желая учесть шероховатость стенки, обратим сперва внимание на величину l из формулы (7.3). Пользуясь формулой (7.3) и выражая $\overline{v}_x$ по закону Кармана, мы получим:

$$l = 2kd \left[\sqrt{1 - \frac{y}{d}} - \left(1 - \frac{y}{d} \right) \right]$$

[1]) См., например, Прандтль и Титьенс, Гидро- и аэродинамика, т. II, 1935, стр. 93.

и, следовательно, при больших d и малых y:

$$l \approx ky.$$

Так будет обстоять дело при отсутствии шероховатости. Шероховатость действует в том смысле, что l оказывается отличным от нуля на поверхности $y = 0$ (так же как и средняя скорость).

Чтобы это описать, поместим начало координат не на поверхности стенки, а под стенкой на уровне $y = -\varepsilon$ (ε — размеры шерохова-

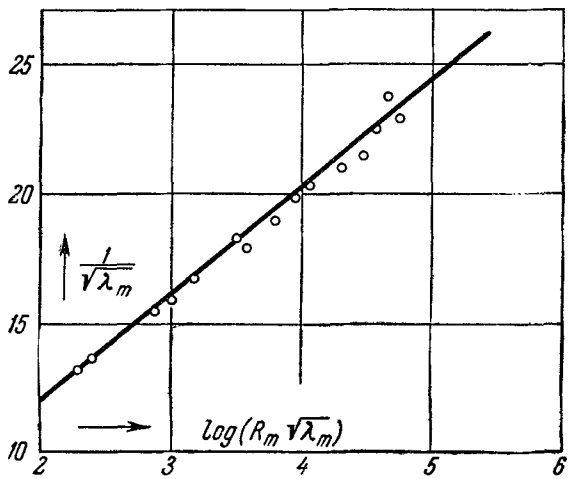

Рис. 198

тости), и для новых вертикальных координат y_1 напишем $l \approx ky_1$ ($y_1 = y + \varepsilon$). Очевидно, будет по-прежнему:

$$\bar{v}_x(y_1) = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{1}{k}\ln y_1 + \text{const.},$$

и мы напишем вместе с Прандтлем

$$\bar{v}_x(y) = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{1}{k}\ln\frac{y}{y_0}; \tag{8.4}$$

здесь y_0, как это установлено из наблюдений над некоторыми шероховатыми поверхностями, будет

$$y_0 = \frac{\varepsilon}{30}.$$

Формулу эту мы применим к построению турбулентного пограничного слоя, получающегося при движении вдоль пластинки (здесь первая пластинка остаётся при $y = 0$, а вторая отодвигается очень далеко). Над пластинкой образуется турбулентный слой неизвестной

нам высоты δ (не смешивать с ламинарным пограничным слоем). Над этим пограничным слоем пусть скорость имеет постоянное значение $V(\delta)$. Тогда по (8.4) можно написать у самой пластинки

$$\bar{v}_x = \frac{V(\delta)}{\ln\frac{\delta}{y_0}} \ln\frac{y}{y_0}, \tag{8.5}$$

причём значение τ_0 добавочного напряжения у самой пластинки будет

$$\tau_0 = \rho k^2 \frac{V^2(\delta)}{\ln^2\frac{\delta}{y_0}}. \tag{8.6}$$

Обратимся к общим уравнениям (5.1) для осреднённого движения и, пренебрегая влиянием вязкости, напишем первое из уравнений для нашего случая плоской задачи со стационарным средним потоком:

$$-\rho\left(\bar{v}_x\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}\,\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P_{xy}}{\partial y}\ ^{1}).$$

Проинтегрируем обе части нашего уравнения по y от y_0 до границы δ турбулентного слоя. Вследствие уравнения неразрывности

$$\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}_y}{\partial y} = 0$$

имеем:

$$\int_{y_0}^{\delta}\bar{v}_y\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial y}\,dy = \bar{v}_y\bar{v}_x\Big|_{y_0}^{\delta} - \int_{y}^{\delta}\bar{v}_x\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial y}\,dy =$$

$$= \bar{v}_x\bar{v}_y\Big|_{y_0}^{\delta} + \int_{y_0}^{\delta}\bar{v}_x\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}\,dy = \bar{v}_x(\delta)\,\bar{v}_y(\delta) + \int_{y_0}^{\delta}\bar{v}_x\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}\,dy,$$

причём

$$\bar{v}_y(\delta) = -\int_{y_0}^{\delta}\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}\,dy. \tag{8.7}$$

Таким образом, получаем ($P_{xy}(\delta) = 0$, так как P_{xy} на границе турбулентного слоя равно нулю):

$$2\int_{y_0}^{\delta}\bar{v}_x\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}\,dy - \bar{v}_x(\delta)\int_{y_0}^{\delta}\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}\,dy = -\frac{1}{\rho}(P_{xy})_{y0} = -\frac{\tau_0}{\rho}. \tag{8.8}$$

Чтобы выполнить интегрирование, заметим, что мы ищем скорости $\bar{v}_x$ в виде (8.5), причём $\bar{v}_x$ может зависеть от x через посредство δ

[1]) Добавочное напряжение P_{xx} включается обычно в давление p; градиент выражения $-p + P_{xx}$ вдоль оси x считается, как всегда в подобных задачах, отсутствующим.

(нарастание пограничного слоя вдоль пластинки). Мы поместим начало координат у самого края пластинки ($\delta = 0$) и ось x направим вдоль пластинки. Как мы сказали уже, вне пограничного слоя всюду существует поток с постоянной скоростью V, параллельной оси x, так что $\bar{v}_x(\delta) = V = \text{const}$. Тогда

$$\bar{v}_x = V \frac{\ln \frac{y}{y_0}}{\ln \frac{\delta(x)}{y_0}}.$$

Уравнение (8.8) даст нам возможность найти $\delta(x)$. Замечая, что

$$2\int_{y_0}^{\delta} \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}\, dy - \bar{v}_x(\delta) \int_{y_0}^{\delta} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}\, dy = -\frac{d}{dx}\int_{y_0}^{\delta} \bar{v}_x [V - \bar{v}_x]\, dy =$$

$$= -\frac{d}{dx}\int_{y_0}^{\delta} V \frac{\ln \frac{y}{y_0}}{\ln \frac{\delta}{y_0}} \left(1 - \frac{\ln \frac{y}{y_0}}{\ln \frac{\delta}{y_0}}\right) dy =$$

$$= -\frac{d}{dx} \frac{y_0 V^2}{\ln \frac{\delta}{y_0}} \left\{ 2\frac{\delta}{y_0} + 1 - \frac{2}{\ln \frac{\delta}{y_0}} \left(\frac{\delta}{y_0} - 1\right) \right\}$$

и заменяя τ_0 по (8.6), получим, производя дифференцирование (k принято равным 0,4):

$$\frac{d\frac{\delta}{y_0}}{d\frac{x}{y_0}} = \frac{0{,}16 \ln \frac{\delta}{y_0}}{\ln \frac{\delta}{y_0}\left(\ln \frac{\delta}{y_0} - \frac{y_0}{\delta}\right) - 3\ln \frac{\delta}{y_0} + 4\left(1 - \frac{y_0}{\delta}\right)}.$$

Чтобы найти $\delta = \delta(x)$, остаётся проинтегрировать это уравнение. Вводя в качестве вспомогательного переменного $\ln \frac{\delta}{y_0}$, получим:

$$\left(\frac{\delta}{y_0} - 1\right)\left(\ln \frac{\delta}{y_0} - 4\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!} \left(\ln \frac{\delta}{y_0}\right)^n = 0{,}16 \frac{x}{y_0}.$$

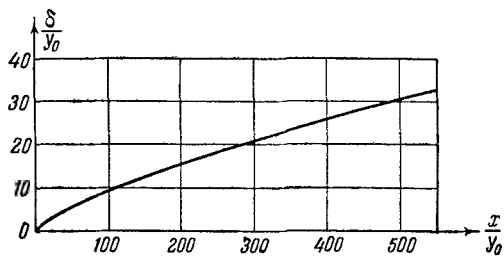

Рис. 199.

Кривая $\delta = \delta(x)$ изображена на рис. 199.

В качестве второго примера на применение соотношения (7.3) рассмотрим задачу о смешении широкого однородного потока воз-

духа, бегущего со скоростью $v_x = v = \text{const.}$, $v_y = 0$, с окружающим его спокойным воздухом. Так как здесь речь идёт о свободной турбулентности и стенки отсутствуют, то нам нельзя будет ориентироваться на P_{xy} как на известную величину. Напротив, величина l, о которой мы уже имели случай говорить, может считаться здесь

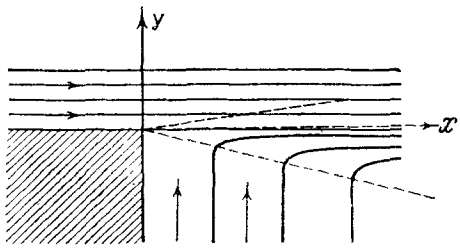

Рис. 200.

пропорциональной ширине той зоны, в которой существует турбулентность [1]). Зону эту примем ограниченной лучами, исходящими из начала координат (рис. 200), в соответствии с чем и будем считать:

$$l = cx, \tag{8.9}$$

$$\Psi = vxF\left(\frac{y}{x}\right) = vxF(\eta)\left(\eta = \frac{y}{x}\right), \tag{8.10}$$

где Ψ — функция тока, а c — постоянная, подлежащая определению. Теперь осреднённое уравнение турбулентного движения (рассматривается идеальная несжимаемая жидкость) принимает, вследствие (7.3) и (8.9), вид:

$$\rho\left(\bar{v}_x\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho c^2 x^2\left(\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial y}\right)^2\right], \tag{8.11}$$

а по (8.10), так как $\left(F'\text{ означает }\frac{dF}{d\eta}\right)$

$$\bar{v}_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} = vF', \quad \bar{v}_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = v\left(\frac{y}{x}F' - F\right),$$

после простых преобразований

$$FF'' + 2c^2F''F''' = 0.$$

[1]) Tollmien W., Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. Zeitschr. f. angew. Math. und Mech., 6 (1926), стр. 468.

Уравнение это может быть удовлетворено, либо если

$$F''=0$$

($\bar{v}_x=\text{const.}$, $v_y=0$ или $\bar{v}_x=0$, $\bar{v}_y=\text{const.}$), либо если

$$F+2c^2F'''=0;$$

тогда

$$F=Ae^{-\frac{\eta}{\sqrt[3]{2c^2}}}+Be^{-\frac{\eta}{2\sqrt[3]{2c^2}}}\left[c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\eta}{\sqrt[3]{2c^2}}+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\eta}{\sqrt[3]{2c^2}}\right]. \tag{8.12}$$

На «верхнем» крае турбулентного луча

$$y=a_1x$$

мы должны положить

$$\bar{v}_x=v,\quad \frac{\partial\bar{v}_x}{\partial y}=0,\quad \bar{v}_y=0,$$

т. е. должны считать

$$F'=1,\ F''=0,\ F=a_1 \text{ при } \eta=a_1.$$

На «нижнем» крае

$$y=-a_2x$$

мы должны положить

$\bar{v}_x=0$, $\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial y}=0$, т. е. принять, что $F'=F''=0$ при $\eta=-a_2$.

Эти пять условий позволяют не только определить три произвольные постоянные c_1, c_2, c_3, участвующие в решении уравнения (8.12),

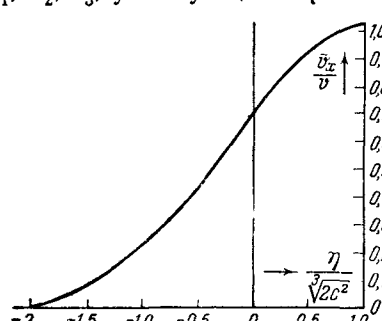

Рис. 201.

но также и найти неизвестные величины a_1 и a_2. Величину c следует определить из экспериментальных данных. На рис. 201

изображена функция $\bar{v}_x$, причём по оси ординат отложены $\bar{v}_x/v$, по оси абсцисс — значения $\frac{\eta}{\sqrt[3]{2c^2}}$. Рис. 202, где нанесены

Рис. 202.

результаты, экспериментальные и теоретические, показывает, насколько велико совпадение теории с данными опытов.

ЛИТЕРАТУРА

К ГЛАВЕ I

Берс Л., Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, перев. с англ., ИЛ, Москва, 1961.

Гудерлей К., Теория околозвуковых течений, пер. с нем., ИЛ, Москва, 1960.

Донов А., Второе приближение для уравнений одноразмерной акустики, Изв. Акад. наук СССР, 1938.

Донов А., Плоское крыло с острыми кромками в сверхзвуковом потоке, Изв. Акад. наук СССР, 1939, серия матем., стр. 603—626.

Зауэр Р., Введение в газовую динамику, пер. с нем., Гостехиздат, 1947.

Кибель И. А, К вопросу о сопротивлении при скоростях, близких к скорости звука, Труды конференции по изучению стратосферы, Акад. наук СССР, 1934.

Кочин Н. Е., Sur la theorie des ondes de choc dans un fluide. Rendic. del Circolo Mat. di Palermo, т. 50, 1926 (см. также Кочин Н. Е., Собрание трудов).

Красильщикова Е. А., Влияние вихревой пелены при установившемся движении крыла, ДАН СССР, 58 (1947), № 6.

Красильщикова Е. А., Влияние концевых кромок при движении крыла с вибрациями со сверхзвуковой скоростью, ДАН СССР, 58 (1947), № 5

Красильщикова Е. А., Влияние концевых кромок при движении крыла со сверхзвуковой скоростью, ДАН СССР, 58 (1947), № 4.

Красильщикова Е. А., Возмущенное движение воздуха при вибрациях крыла, движущегося со сверхзвуковой скоростью, ДАН СССР, **16** (1947), № 6.

Курант Р. и Фридрихс К., Сверхзвуковые течения и ударные волны, перев. с англ., ИЛ, Москва, 1950.

Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, 1953.

Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, Гостехиздат, Москва, 1957.

Овсянников Л. В., Об одном газовом течении с прямой линией перехода, ПММ, т. XIII, вып. 5, 1949.

Рыжов О. С., О газовых течениях в соплах Лаваля, ПММ, т. XXII, вып. 3, 1958.

Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, Гостехиздат, Москва, 1957.

Станюкович К. П., Теория неустановившихся движений газа, Гостехиздат, 1948.

Фалькович С. В., Околозвуковые плоские течения газа с особыми точками на звуковой линии, ПММ, т. XXV, вып. 2, 1961.

Ферри А., Аэродинамика сверхзвуковых течений, пер. с англ., Гостехиздат, Москва, 1952.

Франкль Ф. И., Вихревое движение и обтекание тел в плоскопараллельном течении сверхзвуковой скорости. «Реактивное движение». 1935, стр. 82—92.
Франкль Ф. И., Исследования в области околозвуковых течений. Инженерный журнал, вып. 1, 1961.
Франкль Ф. И., Сверхзвуковые течения осевой симметрии, Известия Артилл. академии, Ленинград, № 1, 1934.
Франкль Ф. И., Карпович Е. А., Газодинамика тонких тел, Гостехиздат, Москва, 1948.
Хейз У. Д. и Пробстин Р. Ф., Теория гиперзвуковых течений, пер. с англ., ИЛ, Москва, 1962.
Хильтон У., Аэродинамика больших скоростей, ИЛ, Москва, 1955.
Хоуарт Л., Современное состояние аэродинамики больших скоростей, пер. с англ., ИЛ, Москва, 1955.
Христианович С. А., Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях, Труды ЦАГИ, вып. 481, 1940.
Чаплыгин С. А., О газовых струях. Собрание сочинений, т. II, Гостехиздат, Москва, 1948.
Черный Г. Г., Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью, Гостехиздат, Москва, 1959.
Busemann A., Aerodynamischer Auftrieb bei Ueberschallgeschwindigkeit. Luftfahrtforschung, **12** (1935), стр. 210—220.
Busemann A., Drücke auf kegelförmige Spitzen bei Bewegung mit Ueberschallgeschwindigkeit, Z. angew. Math. Mech., **9** (1929).
Busemann A., Walchner O., Profileigenschaften bei Ueberschallgeschwindigkeit, Forsch.-Arb. Ing.-Wes., № 4, 1933.
Crocco L., Singolarita, della corrente gassosa iperacustica nell'interno di una prora a diedro. L'aerotechnica, **17** (1937), № 6, стр. 518—534.
Goldstein H., Neumann J., Blast Wave Calculations, Commun. Pure and Appl. Math., **3** (1955).
Meyer Th, Ueber zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas das mit Ueberschallgeschwindigkeit strömt. Forsch.-Arb. Ing.-Wes., № 62, 1908.
Sears W. (редактор), General theory of high speed aerodynamics, т. 6, 1955.
Taylor G., The formation of a blast wave by a very intensive explosion, Proc. Roy. Soc., 1950.
Taylor, Maccool, Air pressure on a cone moving at high speeds. Proc. Roy. Soc., (A), London, **139** (1933), стр. 278—297.
Ward G., Linearized theory of steady high-speed flow, 1955.

К ГЛАВЕ II

Гидродинамическая теория смазки, сборник статей под ред. Л. С. Лейбензона, ГТТИ, Москва, 1934.
Голубев В. В., Теория крыла аэроплана конечного размаха, гл. 2. Труды ЦАГИ, вып. 108, 1931.
Гольдштейн С., Современное состояние гидродинамики, вязкой жидкости, пер. с англ., ИЛ, Москва, 1948.
Дюрэнд В. Ф., Аэродинамика, т. III, перев. с англ., Оборонгиз, Москва, 1939; статья Л. Прандтля «Механика вязких жидкостей».
Ламб Г., Гидродинамика, пер. с англ., Гостехиздат, Москва, 1947.
Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, Москва, 1953.

Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, изд. 2, Физматгиз, Москва, 1957 и 1959.
Лойцянский Л. Г., Ламинарный пограничный слой, Физматгиз, Москва, 1962.
Прандтль Л., Гидроаэромеханика, перев. с нем., ИЛ, Москва, 1949.
Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, пер с нем., ИЛ, Москва, 1960.
Brillossin M., Zecons sur la viscosité des liquides et des gaz, Paris, 1907.
Görtler H. (издатель), Grenzschichtforschung-Springer, 1958.
Hopf Z., Zähe Flussigkeiten, Handbuch der Physik, 7 (1927), стр. 91—172.
Oseen C. W., Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik, Leipzig, 1927.
Tollmien W., Grenzschichttheorie, Handbuch der Experimentalphysik, т. 4, ч. 1, стр. 239—289.
Villat H., Leçons sur l'hydrodynamik, Leipzig, 1927.

К ГЛАВЕ III

Бэчелор Дж., Теория однородной турбулентности, перев. с англ., ИЛ, Москва, 1955.
Гольдштейн С., Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости, пер. с англ., ИЛ, Москва, 1948.
Колмогоров А. Н., Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости, ДАН СССР, 1941.
Колмогоров А. Н., Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности, ДАН СССР, 1941.
Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
Линь Цзя-цзю, Теория гидродинамической устойчивости, пер. с англ., ИЛ, Москва, 1958.
Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, Гостехиздат, Москва, 1957.
Лойцянский Л. Г., Перенос тепла в турбулентном движении, ПММ, т. XXIV, вып. 4, 1960.
Прандтль Л., Гидро-аэромеханика, пер. с нем., ИЛ, Москва, 1951.
Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, Гостехиздат, Москва, 1957.
Таунсенд А., Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом, перев. с англ., ИЛ, Москва, 1959.
Lettau, Atmosphärische Turbulenz, 1939.
Richardson, Weather prediction by numerical process, 1922.
Шлихтинг Г., Возникновение турбулентности, пер. с нем., ИЛ, Москва, 1962.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адамар (Hadamard J.) 339
Аккерет (Ackeret J.) 89
Астров В. 174, 177

Бабенко К. И. 273
Беккер (Becker R.) 482
Белоцерковский О. М. 191, 204, 320, 322
Берс (Bers L.) 717
Блазиус (Blasius H.) 488, 570, 604
Бриджмэн (Bridgman P. W.) 411
Бриллуен (Brillouin M.) 434, 719
Буземан (Busemann A.) 65, 89, 233, 301, 302, 610, 718
Бэчелор (Batchelor J.), 720
Бюргерс (Burgers J. M.) 632

Валландер С. В. 78, 206, 231, 320
Вальхнер (Walchner) 89, 718
Ватсон (Watson J. N.) 472
Вендт (Wendt H.) 232
Вилла (Villat H.) 632, 720
Власова З. П. 357

Гаген (Hagen G.) 427, 431, 658
Гамель (Hamel G.) 460, 478
Гёртлер (Görtler H.) 720
Голубев В. В. 565, 719
Гольдштейн (Goldstein S.) 670, 719, 720
Гоулдстайн (Goldstine H.) 719
Глауэрт (Glauert H.) 265
Гудерлей (Guderley K.) 717
Гуревич М. И. 303, 309, 314

Диббл (Dibble C. G.) 163
Донов А. 89, 717
Дородницын А. А. 191, 242, 320, 610, 615, 619, 628, 631
Дюренд (Durand) 719

Жермен (Jermain P.) 231, 320
Жуковский Н. Е. 541
Журавский Н. Е. 313

Зауэр (Sauer R.) 717
Зоммерфельд (Sommerfeld A.) 536, 670

Изаксон А. А. 691
Извеков Б. И. 686

Казакова Р. К. 357
Карман (Kármán Ih.) 145, 559, 610, 699
Карпович Е. А. 718
Келдыш М. В. 106
Келлер Л. В. 698, 701, 703, 706
Кельвин (Kelvin) 658
Кибель И. А. 717, 718
Колмогоров А. Н. 699, 720
Кондрашева И. Л. 357
Кочин Н. Е. 345, 378, 485, 604, 628, 686, 717
Краснльщикова Е. А. 273, 717
Крафт (Kraft) 163
Крокко (Crocco L.) 104, 718
Кузьмин Р. О. 530
Курант Р. 717

Лайтхилл (Lighthill M. J.) 21, 213, 219
Ламб (Lamb H.) 518, 719
Ландау Л. Д. 87, 368, 385, 717, 719, 720
Левин В. 174, 177
Лейбензон Л. С. 563
Леттау (Lettau) 720
Линь (Lin C. C.) 671, 675, 680, 682, 720
Лифшиц Е. М. 368, 385, 717, 719, 720
Лойцянский Л. Г. 604, 628, 631, 699, 717, 719, 720

Мейер (Meyer T.) 175, 719
Мизес (Mises R.) 302, 549, 553, 670
Милликен (Millikan R. A.) 510
Миллионщиков М. Д. 699
Монин А. С. 397, 627

Навье (Navier C. L.) 387, 388
Нейман (Neumann J.) 719
Некрасов А. И. 106
Никольский А. А. 165, 231, 237, 315, 318, 320
Никурадзе И. 711

Обухов А. М. 699, 705
Овсянников Л. В. 717
Орр (Orr W. M. F.) 670
Осватич (Oswatitsch K.) 206
Осеен (Oseen C. W.) 372, 478, 516, 528, 543, 632, 633, 634, 641, 656, 720
Охоцимский Д. Е. 357

Павлов Е. 174, 177
Пекерис (Pekeris) 670
Петров Н. П. 534
Пёшль (Pöschl Th.) 437
Польгаузен (Pohlhausen K.) 578, 594
Прандтль (Prandtl L.) 262, 263, 265, 372, 543, 565, 571, 670, 706, 709, 711, 719, 720
Пробстин (Probstien R. F) 718
Пуазейль (Poiseuille) 431
Пуассон (Poisson S. D.) 387, 388

Рейнольдс (Reynolds O.) 410, 427, 432, 658, 691, 699
Релей (Reyleigh) 104
Ринглеб (Ringleb F.) 163
Ричардсон (Richardson E. G.) 687, 699, 705, 720
Розенблатт (Rosenblatt A.) 479
Розенбрук (Rosenbrook G.) 671
Рыжов О. С. 718
Рябинков Г. М. 206

Седов Л. И. 351, 354, 411, 718, 720
Сен-Венан (Saint-Venant B.) 388
Синг (Synge) 666
Сирс (Sears W.) 719
Скан Сильвиа (Sylvia Skan W.) 584, 603
Сквайр (Squire J. L.) 667
Скрэмстэд (Skramstad) 683
Слезкин Н. А. 145
Смирнов В. И. 302, 454, 456, 530
Соболев С. Л. 302
Станюкович К. П. 718
Стокс (Stokes G. G.) 388, 521, 504

Таганов Г. И. 165
Татаренчик В. В. 158
Таунсенд (Townsand A.) 720
Тейлор (Taylor G.) 351, 659, 665, 699, 705, 719
Тёпфер (Töpfer) 571
Титьенс (Tietjens O.) 670, 711
Толмин (Tollmien W.) 158, 670, 671, 680, 681, 715, 720

Уиттекер 472
Уорд (Ward G. N.) 273, 719

Фалькович С. В. 180, 184, 269, 718
Феррари (Ferrari C.) 258
Ферри (Ferri A.) 718
Фикк (Fick) 701
Фокнер (Falkner V. M.) 584, 603
Франк (Frank P.) 302

Франкль Ф. И. 86, 106, 179, 181, 184, 185, 187, 190, 241, 718
Фридман А. А. 698

Хантше (Hantsche W.) 323
Хартри (Hartree D. R.) 604
Хауэрс (Howarth L.) 596, 699, 718
Хильтон (Hilton W.) 718
Хименц (Hiemenz K.) 593, 595
Хопф (Hopf L.) 670, 720
Христианович С. А. 69, 106, 130, 134, 138, 141, 146, 165, 177, 718
Хэйз (Hayes W. D.) 208, 213, 718

Цейлон (Zeilon) 656
Цянь Сюэ-сеиь 145, 258, 656

Чаплыгин С. А 106, 114, 116, 120, 128, 145, 302, 541, 718
Черный Г. Г. 208, 718
Чушкин П. И. 245, 325

Шиллер (Schiller L.) 711
Шлихтинг (Schlichting H.) 269, 584, 684, 719, 720
Шмидт (Schmidt) 699
Шубауер (Schubauer) 602, 683
Щенников В. В. 221

Эдерс (Ehlers) 68

Юрьев И. М. 138, 141

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Взрыв 17
— без противодавления 350
— односторонний 345
— плоский 350
— с противодавлением 357
— сферический 354
— цилиндрический 354
Волна 10, 18
— баллистическая 18
— ударная 191
Вязкость 369

Газ идеальный 17
— идеально-диссоциирующийся 21, 213
— совершенный 17
Гиперповерхность характеристическая 27
Гипотеза Кармана 707
Гипоциссоида 39, 222
Градиент адиабатический 686
— сверхадиабатический 686

Движение см. Течение
— атмосферы 459
— безвихревое осесимметрическое при сверхзвуковой скорости 225
— — плоское со сверхзвуковой скоростью 50, 147
— — сжимаемой жидкости 114
— вихревое плоское со сверхзвуковой скоростью 44
— в пограничном слое 667
— внутри трубы 228
— — угла, меньшего чем π 77
— вязкой жидкости 369
— — — в цилиндрической трубе 436
— газа вне выпуклой поверхности 69
— — внутри трубы 74
— — вокруг искривленного контура 69
Движение атмосферы с дозвуковой скоростью 130
— гиперзвуковое 100, 211
— жидкости перед телом 525
— — позади тела 525
— — при исчезающей вязкости 632
— ламинарное 658
— между двумя коаксиальными цилиндрами 660
— неустановившееся 325
— — одномерное 325
— одномерное вязкой сжимаемой жидкости 481
— около вогнутой поверхности 77
— пластинки внутри эллиптического цилиндра 435
— поршня в неограниченной среде 338
— — в неограниченном цилиндре 335
— с дозвуковой скоростью 114
— с осевой симметрией неустановившееся 221
— с очень большой сверхзвуковой скоростью 206
— снаряда под углом к оси симметрии 257
— стреловидного крыла 309
— сферы в вязкой жидкости 516
— турбулентное 373, 658
— — между двумя гладкими параллельными стенками 709
— установившееся плоское 32
— — пространственное 245
— цилиндра 528
— — внутри другого неподвижного цилиидра 435
Динамика газовая 9
Диссипация энергии 401
Диссоциация 213
Диффузия вихревого слоя 443
— вихря 405, 450

Жидкость вязкая 370
— идеальная 372
— маловязкая 372
— сжимаемая 627
— сильновязкая 372

Задача Коши 24
— плоская, численные методы решения 190
— пространственная 245
— Трикоми 187
Закон Гагена—Пуазейля 431
— Кулона 534
— подобия 406
— — Рейнольдса 410
— — Фруда 409
— Релея 106

Изотропность вязкой жидкости 379
Истечение газа из бесконечно широкого сосуда 125
— — — отверстия 73
— — — —,сопровождаемое переходом через скорость звука 174
Источник 463
— в диффузоре 465

Коэффициент внутреннего трения 370, 384
— вязкости 370, 384
— — кинематический 384
— — турбулентный 447
— корреляции 702
— Ламэ 390, 395
— температуропроводности 420
Кривая «яблоковидная» 232
Крыло в плоскопараллельном сверхзвуковом потоке 87
— конечного размаха в сверхзвуковом потоке 262

Линеаризация уравнений 247
Линия переходная 169
— предельная 157

Мера обмена 702
— рассеяния 702, 705
Метод Дородницына 191, 610
— источников 439
— Кармана 575
— Ламба 518
— Польгаузена 602
— Прандтля 266
— Франкля 225
— Хауэрса 602
— Христиановича 130, 144, 146

Моменты корреляционные 698
— связи 698

Напряжения добавочные 693, 706
— — рейнольдсовские 698
— касательные 377
— нормальные 377
Насадок Борда 177
Неустойчивость 658

Обильность источника 463
Обтекание излучающей пластинки 623
— конического острия 229
— криволинейного контура 549
— круглого конуса осесимметрическое 229
— — цилиндра со сверхзвуковой скоростью 191
— крыла бесконечного размаха 251
— — конечного размаха 250
— осесимметричное с отошедшей ударной волной 320
— осесимметричных тел 229
— пластинки без теплоотдачи 613
— — со сверхзвуковой скоростью 87
— плоской пластинки 652
— полубесконечной пластинки несжимаемой жидкостью 485
— профиля с острой передней кромкой 86
— сверхзвуковое конуса 306
— — крыла «малого удлинения» 285
— снаряда 254
— тонкого крыла с острыми кромками сверхзвуковое 273
— — тела со сверхзвуковой скоростью 208
— тупого профиля со сверхзвуковой скоростью 104
— угла, большего чем π 71
— цилиндра 524, 644
Отрыв вихрей 544
— слоя 589
«Отскакивание» поверхности разрыва 104

Парадокс Стокса 511
— Эйлера—Даламбера 87
Пелена вихревая 274
Переход через скорость звука 156
Поверхность разрыва 10, 12
— — в плоской задаче 35
— —, ее размазывание 484
— — сильная 18
— — слабая 18

Поверхность разрыва стационарная 17
Подслой ламинарный 710
Постоянная Маскерони 530
— Стефана—Больцмана 609
Потенциал источника 263
— скорости 263
— ускорения 263
Поток фиктивный 134, 135
Процесс диффузии 370
— перемешивания 700
— теплопроводности 371
Путь перемешивания 706

Разрушение течения 167
Разрыв 18
— сильный 77, 341
— — в одномерной нестационарной задаче 329
— слабый 21
Реакция потока на тело 641
Решение Гамеля 475, 478
Ряды Чаплыгина 184

Семейство гипоциссоид 233
Сжатие струи 130
Скачок уплотнения 10, 18
Скорости удлинений главные 376
Скорость звука 24
— критическая 41
— максимальная в сжимаемой жидкости 157
— перемещения поверхности разрыва 19
— распространения поверхности разрыва 13
— — — сильного разрыва 29
— — — слабого разрыва 24
— — характеристики 27
Слой вихревой цилиндрический 459
— пограничный 544
— — в диффузоре 578
— — в несжимаемой жидкости вдоль плоской пластинки 569
— — в сжимаемой жидкости 608
— — на произвольном профиле 627
Смешение потока воздуха с окружающим его спокойным воздухом 714
Соотношение Кармана интегральное 558, 561, 563
— Лейбензона 565, 566
— Прандтля, его обобщение 629
Сопло Лаваля 75, 158, 229
— — безударное 174, 179
Сопло Лаваля, его построение 75
Сопротивление волновое 87
Сток 463
— в диффузоре 465
Струя ламинарная 584

Температура торможения 610
Тензор добавочных напряжений 699
— единичный 382
— напряжений 378
— рассеивания 706
— скоростей деформации 374
— — —, его главные значения 376
— — —, — — оси 376
Теорема Прандтля—Глауэрта 106, 262
— Цемплена 31
Теория Гейзенберга 670
— исчезающей вязкости 543
— пограничного слоя 372, 543
— — —, приближенные методы 588
— смазки, гидродинамическая 534
— струй Кирхгофа—Жуковского 114
— турбулентности 658
— Чаплыгина 106
Теплосодержание 34
Течение см. Движение
— в диффузоре 460, 474, 475
— в плоском диффузоре 578
— вязкой жидкости вдоль пластинки 545
— газа, преграждённое плоскими стенками 117
— жидкости внутри цилиндрической трубы 406
— —, вызываемое вращением сферы 502, 504
— — между двумя цилиндрами 433
— — — — концентрическими цилиндрами 447
— коническое 229
— — сверхзвуковое 301
— ламинарное 410, 431
— — в цилиндрической трубе 427
— морское, его возникновение под действием ветра 445
— нестационарное одномерное 437
— плоское между двумя параллельными пластинками 499
— при больших числах Рейнольдса 542
— — малых числах Рейнольдса 499
— Пуазейля 431
— расширения 166
— сжатия 167, 236

Течение сжимаемой жидкости между двумя параллельными плоскими стенками 421
— смешанное 168
— стационарное одномерное 432
— струйное 117
— турбулентное 410, 431
— —, внешняя задача 659
— —, внутренняя задача 659
— через насадок Борда 177
Толщина вытеснения 556
— пограничного слоя 556
— потери импульса 562
Турбулентность 658
— изотропная 699
— «локально однородная» 699
— «локально изотропная» 699
— однородная 699
— развитая 686

Угол Маха 49
Удар сжатия 18
— струи в пластинку 120
Уравнение Бернулли 34, 41, 42
— Блазиуса 488
— вековое 665
— Дарбу 149
— для функции тока ψ 405
— Мизеса 555
— неразрывности 19, 32
— притока тепла для вязкой сжимаемой жидкости 416, 418
— теории теплопроводности 438
— Фикка 701
Уравнения газовой динамики 18
— Гельмгольца обобщенные 404, 634
— движения вязкой жидкости 387, 388
— — — — в форме Ламба 389
— — — — при больших числах Рейнольдса 542
— — — — при малых числах Рейнольдса 498
— — — несжимаемой жидкости в переменных Лагранжа 397
— — — — — в сферических координатах 396
— — — — — в цилиндрических координатах 395
— Ламба 32
— Навье — Стокса 387, 693
— пограничного слоя для сжимаемой жидкости 566
Уравнения Прандтля 545
— Стокса, обобщенные 517
— Рейнольдса 691
Условие адиабатичности 33
Условия граничные для движения несжимаемой жидкости 398
Условия динамической совместности 17
— кинематической совместности 21
— начальные для движения несжимаемой жидкости 397
— совместности 23
— тождественности 21
Устойчивость пограничного слоя 671
— течения между пластинками 666

Формула Аккерета 263, 307
— Ламба 534
— Стокса 508
— Шварца 645
Формулы приближенные Аккерета 89
— — Буземана 89
— — Вальхнера 89
— — Донова 89
Функция Крампа 443
— тепловая единицы массы 34
— Хартри 604

Характеристики 27, 329
— безвихревого движения 56
— вихревого движения со сверхзвуковой скоростью 47
— второго семейства 47, 51
— одномерного движения 329
— первого семейства 47, 51
— системы уравнений газовой динамики 24
— турбулентности 699

Циркуляция 264, 268
— для сжимаемой жидкости 137, 139
Циссоида Диоклеса 39

Число Маха 42, 415
— Прандтля 420, 610
— Рейнольдса 409, 658
— — критическое 658
— Фруда 409

Эллипс Буземана 66
Энтальпия 34
Энтропия 33, 220
Эпициклоида 52
Эффект концевой 274

Кочин Николай Евграфович,
Кибель Илья Афанасьевич,
Розе Николай Владимирович.

Теоретическая гидромеханика, ч. II.

М., Физматгиз, 1963 г., 728 стр. с илл.

Редактор *Н. И. Розальская*
Техн. редактор *Е. А. Ермакова*
Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 12/X 1962 г. Подписано к печати 26/III 1963 г. Бумага 60×90/16. Физ. печ. л. 45,5. Условн. печ. л. 45,5. Уч.-изд. л. 42,89. Тираж 12 000 экз. Т-04906. Цена книги 1 р. 39 к. Заказ 787.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УЦБ и ПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29